Hans Journal of Wireless Communications 无线通信, 2015, 5(5), 91-97
Published Online October 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/hjwc
http://dx.doi.org/10.12677/hjwc.2015.55013

Blind Source Separation Algorithms Based on Nonnegative Matrix Factorization Using Different Learning Rates

Yijun Mao, Zhijin Zhao, Junna Shang

School of Communication Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou Zhejiang
Email: hdumyj@126.com

Received: Sep. 27th, 2015; accepted: Oct. 19th, 2015; published: Oct. 26th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

Abstract

The iterative multipliable update formulas are used in blind source separation algorithms based on non-negative matrix factorization (NMF). However, the methods to select the learning rates and affect algorithms' performance remain to be researched. This paper gives a derivation of different learning rates when selecting various iterative update formulas. A lot of computer simulations about these combinations are carried, and they show that a denominator of the effective iterative update formulas must contain information of the error function. In addition, its terms of denominator and numerator should be balanced.

Keywords

Non-Negative Matrix Factorization (NMF), Blind Source Separation (BSS), Learning Rates, Error Function

不同学习速率下NMF盲源分离算法

毛翊君，赵知劲，尚俊娜

杭州电子科技大学通信工程学院，浙江 杭州
Email: hdumyj@126.com

收稿日期：2015年9月27日；录用日期：2015年10月19日；发布日期：2015年10月26日

文章引用: 毛翊君, 赵知劲, 尚俊娜. 不同学习速率下 NMF 盲源分离算法[J]. 无线通信, 2015, 5(5): 91-97.
http://dx.doi.org/10.12677/hjwc.2015.55013

摘　要

基于非负矩阵分解(NMF)的盲源分离算法采用乘性更新规则，但如何选择学习速率以及其对算法性能影响没有详细研究。对此，本文推导给出了选择不同学习速率时各种迭代更新公式，并对各种组合进行了大量计算机仿真实验，通过比较分析发现，有效的迭代更新公式的分母必须包含误差函数信息，分子分母的项数应尽可能平衡。

关键词

非负矩阵分解，盲分离，学习速率，误差函数

1. 引言

非负矩阵分解[1] [2] (Nonnegative Matrix Factorization, NMF)是盲源信号[3]分离主要理论工具之一，已引起学术界广泛关注和研究[4] [5]。为了保证分离唯一性和分离性能，需要在误差函数中添加各种约束条件[6]-[9]，如：行列式约束、稀疏性约束、正交性约束等。为保证分解矩阵的非负性，一般采用乘性更新规则。由于施加了多种约束条件，利用自然梯度下降法时，可以选择多种不同的学习速率，如何选择合适的学习速率，现有文献没有给出说明。对此本文进行了理论推导和大量实验研究，为基于NMF盲源分离算法的深入研究提供了理论基础。

2. NMF盲分离基本理论

令$\boldsymbol{V} \in R^{m\times N}$表示采样信号矩阵，$\boldsymbol{W} \in R^{m\times n}$代表混合矩阵，$\boldsymbol{H} \in R^{n\times N}$代表源信号矩阵，且$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{H}$。盲源信号分离是指在源信号$\boldsymbol{H}$和混合过程$\boldsymbol{W}$未知的情况下，从观察到的多个混合信号$\boldsymbol{V}$中重建出源信号$\boldsymbol{H}$的方法。利用NMF进行盲源信号分离，就是要将$\boldsymbol{V}$分解成两个矩阵$\boldsymbol{W}$和$\boldsymbol{H}$的乘积，并使分解误差尽可能小，采用2范数衡量NMF，其误差函数为$D(\boldsymbol{W},\boldsymbol{H}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\|^2$。为了提高盲源分离算法性能，对误差函数施加行列式、稀疏性和正交性约束，设计NMF的优化目标函数如式(1)所示：

$$\begin{aligned} &F(\boldsymbol{W},\boldsymbol{H}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\|^2 + \mu vol(\boldsymbol{W}) + \gamma J(\boldsymbol{H}) + \alpha K(\boldsymbol{H}) \\ &\text{subject to } W_{ik}, H_{kj} > 0, \sum_i W_{ik} = 1, 1 \le k \le n \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$vol(\boldsymbol{W})$、$J(\boldsymbol{H})$和$K(\boldsymbol{H})$分别由式(2)、(3)和(4)给出；μ,γ,α是平衡参数，为了保证NMF算法收敛，取比较小的正数。对于超定盲源分离，即$m > n$情况，有

$$vol(\boldsymbol{W}) = \sqrt{\det\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)} \tag{2}$$

$$\min J(\boldsymbol{H}) = \|\boldsymbol{H}\|^0 = \sum_{i,j}|H_{ij}|^0 \tag{3}$$

$$\min K(\boldsymbol{H}) = \left\|\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{I}\right\| \tag{4}$$

利用自然梯度下降法，求矩阵$\boldsymbol{W}$和矩阵$\boldsymbol{H}$的更新规则分别如式(5)和(6)所示。

$$\boldsymbol{W}_{ik} \leftarrow \boldsymbol{W}_{ik} - \eta_w \frac{\partial F(\boldsymbol{W},\boldsymbol{H})}{\partial \boldsymbol{W}_{ik}} \tag{5}$$

$$H_{kj} \leftarrow H_{kj} - \eta_H \frac{\partial F(\boldsymbol{W},\boldsymbol{H})}{\partial \boldsymbol{H}_{kj}} \tag{6}$$

目标函数 $F(\boldsymbol{W},\boldsymbol{H})$ 对 $\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的偏导分别如式(7)和(8)所示：

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{W},\boldsymbol{H})}{\partial \boldsymbol{W}_{ik}} = \left[-\boldsymbol{V}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right]_{ik} + \mu \det\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)\left[\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)^{-1}\right]_{ik} \tag{7}$$

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{W},\boldsymbol{H})}{\partial \boldsymbol{H}_{kj}} = \left[-\boldsymbol{W}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\right]_{kj} + \gamma + 2\alpha\left[\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{H}\right]_{kj} \tag{8}$$

3. 迭代更新公式

3.1. W 迭代公式推导

由于非负矩阵分解要求得到的分解结果 $\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是非负的，所以采用乘性迭代更新公式。为了得到 $\boldsymbol{W}$ 的乘性迭代更新公式，由式(7)可见，理论上可以选择三种不同的学习速率，从而应该有三种不同的 $\boldsymbol{W}$ 迭代更新公式。现以第一种学习速率选择为例，具体推导如下。

$\boldsymbol{W}$ 的第一种学习速率可选择为

$$\eta_w = \frac{\boldsymbol{W}_{ik}}{\left[\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right]_{ik}} \tag{9}$$

将式(7)代入式(5)右边，可得

$$\boldsymbol{W}_{ik} - \eta_w \frac{\partial F(\boldsymbol{W},\boldsymbol{H})}{\partial \boldsymbol{W}_{ik}} = \boldsymbol{W}_{ik} - \eta_w\left[-\boldsymbol{V}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right]_{ik} - \eta_w \mu \det\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)\left[\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)^{-1}\right]_{ik} \tag{10}$$

将式(12)代入上式可得

$$\boldsymbol{W}_{ik} - \eta_w \frac{\partial F(\boldsymbol{W},\boldsymbol{H})}{\partial \boldsymbol{W}_{ik}} = \eta_w\left[\boldsymbol{V}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} - \mu \det\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)^{-1}\right]_{ik} \tag{11}$$

因此可得关于 $\boldsymbol{W}$ 的第一种迭代更新公式为：

$$\boldsymbol{W}_{ik} \leftarrow \boldsymbol{W}_{ik} \frac{\left[\boldsymbol{V}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right]_{ik} - \mu \det\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)\left[\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)^{-1}\right]_{ik}}{\left[\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right]_{ik} + \varepsilon} \tag{12}$$

其中，ε 是一个很小的正数，是为了防止分母为零。下文其他处不再说明。

$\boldsymbol{W}$ 的第二种学习速率可选择为

$$\eta_w = \frac{\boldsymbol{W}_{ik}}{\mu\left[\det\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)^{-1}\right]_{ik}} \tag{13}$$

类似上述推导可得 $\boldsymbol{W}$ 的第二种迭代更新公式为：

$$\boldsymbol{W}_{ik} \leftarrow \boldsymbol{W}_{ik} \frac{\left[\boldsymbol{V}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right]_{ik} - \left[\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right]_{ik}}{\mu \det\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)\left[\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)^{-1}\right]_{ik} + \varepsilon} \tag{14}$$

$\boldsymbol{W}$ 的第三种学习速率可选择为

$$\eta_w = \frac{\boldsymbol{W}_{ik}}{\left[\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right]_{ik} + \mu\left[\det\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)^{-1}\right]_{ik}} \tag{15}$$

类似上述推导可得 $\boldsymbol{W}$ 的第三种迭代更新公式为：

$$\boldsymbol{W}_{ik} \leftarrow \boldsymbol{W}_{ik}\frac{\left[\boldsymbol{V}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right]_{ik}}{\left[\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right]_{ik} + \mu\left[\det\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\right)^{-1}\right]_{ik} + \varepsilon} \tag{16}$$

从式(12)、(14)和(16)可以发现，式(12)和(16)分母中包含有误差函数信息项 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}$，可以有效实现对 $\boldsymbol{W}$ 的更新。

3.2. *H* 迭代公式推导

为了得到 $\boldsymbol{H}$ 的乘性迭代更新公式，由式(8)可见，理论上有 7 种不同的学习速率选择，从而应该有 7 种不同的 $\boldsymbol{H}$ 迭代更新公式。类似 $\boldsymbol{W}$ 迭代更新公式推导，分别可得 7 种不同的学习速率选择和 $\boldsymbol{H}$ 迭代更新公式如下。

$\boldsymbol{H}$ 的第一种学习速率选择为：

$$\eta_H = \frac{\boldsymbol{H}_{kj}}{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\right]_{kj}} \tag{17}$$

对应的 $\boldsymbol{H}$ 第一种乘性迭代更新公式为：

$$\boldsymbol{H}_{kj} \leftarrow \boldsymbol{H}_{kj}\frac{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\right]_{kj} + \left[2\alpha\boldsymbol{H}\right]_{kj} - \gamma - \left[2\alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right]_{kj}}{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\right]_{kj} + \varepsilon} \tag{18}$$

$\boldsymbol{H}$ 的第二种学习速率选择为：

$$\eta_H = \frac{\boldsymbol{H}_{kj}}{\gamma} \tag{19}$$

对应的 $\boldsymbol{H}$ 第二种乘性迭代更新公式为：

$$\boldsymbol{H}_{kj} \leftarrow \boldsymbol{H}_{kj}\frac{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\right]_{kj} + \left[2\alpha\boldsymbol{H}\right]_{kj} - \left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\right]_{kj} - \left[2\alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right]_{kj}}{\gamma + \varepsilon} \tag{20}$$

$\boldsymbol{H}$ 的第三种学习速率选择为：

$$\eta_H = \frac{\boldsymbol{H}_{kj}}{\left[2\alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right]_{kj}} \tag{21}$$

对应的 $\boldsymbol{H}$ 的第三种乘性迭代更新公式为：

$$\boldsymbol{H}_{kj} \leftarrow \boldsymbol{H}_{kj}\frac{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\right]_{kj} + \left[2\alpha\boldsymbol{H}\right]_{kj} - \left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\right]_{kj} - \gamma}{\left[2\alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right]_{kj} + \varepsilon} \tag{22}$$

$\boldsymbol{H}$ 的第四种学习速率选择为：

$$\eta_H = \frac{\boldsymbol{H}_{kj}}{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\right]_{kj} + \gamma} \tag{23}$$

对应的 $\boldsymbol{H}$ 的第四种乘性迭代更新公式为：

$$\boldsymbol{H}_{kj} \leftarrow \boldsymbol{H}_{kj} \frac{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\right]_{kj} + \left[2\alpha\boldsymbol{H}\right]_{kj} - \left[2\alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right]_{kj}}{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\right]_{kj} + \gamma + \varepsilon} \tag{24}$$

$\boldsymbol{H}$ 的第五种学习速率选择为：

$$\eta_H = \frac{\boldsymbol{H}_{kj}}{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\right]_{kj} + \left[2\alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right]_{kj}} \tag{25}$$

对应的 $\boldsymbol{H}$ 的第五种乘性迭代更新公式为：

$$\boldsymbol{H}_{kj} \leftarrow \boldsymbol{H}_{kj} \frac{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\right]_{kj} + \left[2\alpha\boldsymbol{H}\right]_{kj} - \gamma}{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\right]_{kj} + \left[2\alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right]_{kj} + \varepsilon} \tag{26}$$

$\boldsymbol{H}$ 的第六种学习速率选择为：

$$\eta_H = \frac{\boldsymbol{H}_{kj}}{\gamma + \left[2\alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right]_{kj}} \tag{27}$$

对应的 $\boldsymbol{H}$ 的第六种乘性迭代更新公式为：

$$\boldsymbol{H}_{kj} \leftarrow \boldsymbol{H}_{kj} \frac{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\right]_{kj} + \left[2\alpha\boldsymbol{H}\right]_{kj} - \left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\right]_{kj}}{\gamma + \left[2\alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right]_{kj} + \varepsilon} \tag{28}$$

$\boldsymbol{H}$ 的第七种学习速率选择为：

$$\eta_H = \frac{\boldsymbol{H}_{kj}}{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\right]_{kj} + \gamma + \left[2\alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right]_{kj}} \tag{29}$$

对应的 $\boldsymbol{H}$ 第七种乘性迭代更新公式为：

$$\boldsymbol{H}_{kj} \leftarrow \boldsymbol{H}_{kj} \frac{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\right]_{kj} + \left[2\alpha\boldsymbol{H}\right]_{kj}}{\left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\right]_{kj} + \gamma + \left[2\alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right]_{kj} + \varepsilon} \tag{30}$$

从上述迭代更新公式可以发现，只有式(18)、(24)、(26)和(30)含有误差函数信息项。所以 $\boldsymbol{W}$ **和** $\boldsymbol{H}$ 的乘性迭代更新公式可行组合形式如表 1 所示。

4. 算法仿真与性能分析

源信号图像如图 1 所示，随机产生非负混合矩阵，经过混合得到混合的图像信号。经过大量的仿真实验得到平衡参数的合适取值分别为：$\gamma = 0.001$、$\mu = 50$ 和 $\alpha = 0.00001$，利用迭代公式更新 $\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{H}$，迭代 30,000 次，更新迭代终止，最终得到由混合信号矩阵 $\boldsymbol{V}$ 分离出的混合矩阵 $\boldsymbol{W}$ 和源信号 $\boldsymbol{H}$。

4.1. 迭代公式组合的有效性分析

大量的实验表明，分母中不包含有误差函数信息的迭代公式无法有效更新 $\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{H}$，分离不出源信号，与我们前文判断一致。

现通过实验验证八种不同的迭代公式组合是否有效。应用上述八种迭代更新公式组合分离上述混合信号，算法能正常运行的用√表示，不能正常运行的用×表示，结果如表 1 所示。由表可见，即使八种组

合分母中都包含了误差函数信息，但也只有三种组合方式是有效的，即组合 3、组合 4 和组合 7，所以可以得到三种算法，分别称为算法 1、算法 2 和算法 3。分析这三组迭代公式可见，迭代公式的分子分母项数基本平衡。

4.2. 三种算法性能分析

三种算法分离得到的图像信号分别如图 2 至图 4 所示。三种算法 10 次分离得到的源信号重构平均信噪比 SNR 如表 2 所示。由表 2 可见，算法 2 性能最好，算法 1 次之，算法 3 略差；三种算法性能在同一数量级，都能够较好地分离出源信号。

Table 1. Probability analysis of different iterative formulas
表 1. 不同迭代公式组合的可行性分析

方法	可行性
组合 1：式(12)和式(18)	×
组合 2：式(12)和式(24)	×
组合 3：式(12)和式(26) (算法 1)	√
组合 4：式(12)和式(30) (算法 2)	√
组合 5：式(16)和式(18)	×
组合 6：式(16)和式(24)	×
组合 7：式(16)和式(26) (算法 3)	√
组合 8：式(16)和式(30)	×

Table 2. SNR of three algorithms
表 2. 三种算法的重构平均信噪比(单位：dB)

图像编号	图 1	图 2	图 3	图 4
算法 2	6.4819	13.0446	12.0084	8.6149
算法 1	6.4619	12.7737	11.1487	8.5825
算法 3	6.3913	12.0751	10.8859	8.8719

Figure 1. Source image signal
图 1. 源图像信号

Figure 2. Picture of Algorithm 1
图 2. 算法 1 分离的图像信号

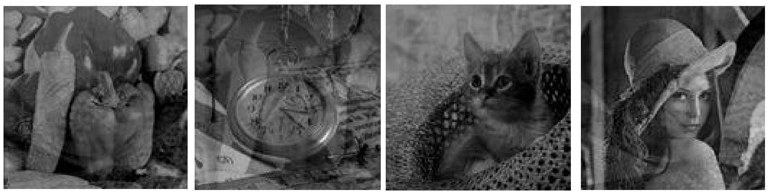

Figure 3. Picture of Algorithm 2
图 3. 算法 2 分离的图像信号

Figure 4. Picture of Algorithm 3
图 4. 算法 3 分离的图像信号

5. 结束语

本文研究了学习速率选择对 NMF 的盲源分离算法性能影响。首先推导给出了选择不同学习速率时各种迭代更新公式，然后进行了大量计算机仿真实验，最后通过比较分析发现，有效的迭代更新公式的分母必须包含误差函数信息，分子分母的项数应尽可能平衡。

致 谢

首先，我要感谢我的导师赵知劲教授。如果不是赵老师的悉心指导，无私地提出宝贵的修改意见，就不会呈现出这样一篇内容详实、推导严谨的论文。紧接着，我要感谢我的家人。在我专注于论文写作的过程中，是他们的鼓励与理解，让我得以全身心地投入我的写作，同时也激励着我去不断完善我的论文。最后，我要感谢所有帮助过我的老师和同学，这篇论文是大家共同智慧的结晶。再次感谢。

参考文献 (References)

[1] Lee, D.D. and Seung, H.S. (1999) Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization. *Nature*, **401**, 788-791.

[2] 李乐，章毓晋 (2008) 非负矩阵分解算法综述. *电子学报*, **36**, 737-743.

[3] 马建仓，牛奕龙，陈海洋 (2006) 盲信号处理. 国防工业出版社，北京.

[4] 殷海青，刘红卫 (2010) 一种基于 L1 稀疏正则化和非负矩阵分解的盲源信号分离新算法. *西安电子科技大学学报*, **37**, 835-841.

[5] Zdunek, R. and Cichocki, A. (2007) Nonnegative matrix factorization with constrained second-order optimization. *Signal Processing*, **87**, 1904-1916. http://dx.doi.org/10.1016/j.sigpro.2007.01.024

[6] 张倩 (2013) 水声信号盲源分离方法研究. 硕士论文，哈尔滨工业大学，哈尔滨.

[7] 卢宏，赵知劲，杨小牛 (2011) 基于行列式和稀疏性约束的 NMF 的欠定盲分离方法. *计算机应用*, **31**, 553-555+558.

[8] Wang, S., et al. (2014) A K-L divergence constrained sparse NMF for hyperspectral unmixing signal. *Proceedings of* 2014 *IEEE International Conference on Security, Pattern Analysis, and Cybernetics*, Wuhan, 18-19 October 2014, 223-228. http://dx.doi.org/10.1109/SPAC.2014.6982689

[9] 张宇飞 (2010) 加稀疏约束的非负矩阵分解. 硕士论文，大连理工大学，大连.