International Journal of Fluid Dynamics 流体动力学, 2013, 1, 10-14
http://dx.doi.org/10.12677/ijfd.2013.11002 Published Online March 2013 (http://www.hanspub.org/journal/ijfd.html)

Lattice Boltzmann Model for the Ginzburg-Landau Superfluid Flows*

Jianying Zhang[1], Guangwu Yan[2]

[1]College of Engineering, Peking University, Beijing
[2]College of Mathematics, Jilin University, Changchun
Email: zhangjy11@yahoo.cn, yangw_jlu@yahoo.cn

Received: Jan. 28th, 2013; revised: Feb. 10th, 2013; accepted: Feb. 28th, 2013

Abstract: In this paper, a lattice Boltzmann model for the Ginzburg-Landau superfluid flow is proposed. By using complex lattice Boltzmann equation and complex Chapman-Enskog expansion, we obtain a series of partial differential equations on the complex equilibrium distribution function in the different time scales, and the complex Ginzburg-Landau equation with the second-order truncation error. By employing the velocity potential function, we get the kinetic equations of the Ginzburg-Landau superfluid flow.

Keywords: Lattice Boltzmann Model; Ginzburg-Landau Superfluid; Potential Flow

用于 Ginzburg-Landau 超流体流动的格子 Boltzmann 模型*

张建影 [1]，闫广武 [2]

[1]北京大学工学院，北京
[2]吉林大学数学学院，长春
Email: zhangjy11@yahoo.cn, yangw_jlu@yahoo.cn

收稿日期：2013 年 1 月 28 日；修回日期：2013 年 2 月 10 日；录用日期：2013 年 2 月 28 日

摘　要：本文构造了用于模拟 Ginzburg-Landau 超流体流动的格子 Boltzmann 模型。通过给出复格子 Boltzmann 方程，以及应用复 Chapman-Enskog 展开，我们得到了复平衡分布函数满足的不同时间尺度上的系列偏微分方程。利用这些系列方程，我们得到了具有二阶截断误差的复 Ginzburg-Landau 方程。进一步引入速度势函数，得到了 Ginzburg-Landau 超流体流动的动力学方程。

关键词：格子 Boltzmann 模型；的 Ginzburg-Landau 超流体；位势流

1. 引言

格子 Boltzmann 方法(LBM)是用于模拟计算流体动力学的一种很有潜力的数值方法，它的算法简单，适应于复杂的几何流动边界，尤其是程序代码简单，容易进行并行处理等方面的优势而备受关注[1-4]。

LBM 的基本思想是假设格点上的流体是由一些满足格子 Boltzmann 方程的粒子组成，这些粒子的分布存在满足一定条件的平衡态，通过调整平衡态分布函数的形式，给出宏观尺度上的动力学方程，这样，流体力学的计算转化成格子 Boltzmann 方程的求解。该算法可以用于不可压缩流动，多相多组分流体[5,6]，包括颗粒悬浮液[7]，磁流体[8]，反应扩散系统[9]，流体在多孔介质中的流动[10]，以及可压缩流[11-13]。该方法也可以用于偏微分方程的求解，狄拉克方程[14]，非线性薛定谔方程[15]，Pitaevski 方程[16]，以及复 Ginzburg-Landau 方程[17]。

在本文中，我们考虑 Ginzburg-Landau 超流体流动的格子 Boltzmann 模型。该流动满足的复 Ginzburg-

*资助信息：中国博士后科学基金(编号：2011M500002)项目资助。

Landau 方程可表示为复变量 $A(\boldsymbol{x},t)$ 的偏微分方程

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{1}{2}\mathrm{i}\nabla^2 A+H(A), \tag{1}$$

这里 A, H 为复变量，i 为虚数单位。

我们对如下两个问题进行讨论：1) 复 Ginzburg-Landau 方程格子 Boltzmann 模型的构造，2) Ginzburg-Landau 超流体流动的动力学方程与复 Ginzburg-Landau 方程的联系。我们的策略是建立复格子 Boltzmann 方程，由此给出复分布函数的平衡态满足的矩方程，这样可以恢复到复 Ginzburg-Landau 方程，再由此方程出发，给出超流体流动的动力学方程。

本文的结构如下，在下一节中，我们给出了格子 Boltzmann 模型的描述。在第 3 节中，我们给出了超流体流动方程的推导过程。在第 4 节中给出了几点讨论。

2. 复格子 Boltzmann 模型

2.1. 复格子 Boltzmann 方程

考虑二维空间的 FHP 网格[15]。我们定义复分布函数 $F_\alpha(\boldsymbol{x},t)$ 为：位置 $\boldsymbol{x}$，时刻 t，具有速度 $\boldsymbol{e}_\alpha$ 的粒子波函数，其实部和虚部可以看成单粒子分布函数。

复变量 $A(\boldsymbol{x},t)$ 定义如下

$$A(\boldsymbol{x},t)=\sum_\alpha F(\boldsymbol{x},t)。 \tag{2}$$

为了得到稳定的宏观量 $A(\boldsymbol{x},t)$，我们假设分布函数 $F_\alpha(\boldsymbol{x},t)$ 具有局部平衡态 $F_\alpha^{eq}(\boldsymbol{x},t)$，即

$$\sum_\alpha F_\alpha^{eq}(\boldsymbol{x},t)=A(\boldsymbol{x},t)。 \tag{3}$$

复格子 Boltzmann 方程可以写成如下形式

$$\begin{aligned}&F_\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_\alpha,t+1)-F_\alpha(\boldsymbol{x},t)\\&=-\frac{1}{\tau}\left[F_\alpha(\boldsymbol{x},t)-F_\alpha^{eq}(\boldsymbol{x},t)\right]+\omega_\alpha(\boldsymbol{x},t)\end{aligned} \tag{4}$$

这里 τ 为单松弛时间，复变量 $\omega_\alpha(\boldsymbol{x},t)$ 是非碰撞项，其表示粒子增加引起的分布函数的变化。

为了从方程(4)中求得 $F_\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_\alpha,t+1)$，迭代过程分成两个步骤：

碰撞：

$$\begin{aligned}&F_\alpha(\boldsymbol{x},t+1)-F_\alpha(\boldsymbol{x},t)\\&=-\frac{1}{\tau}\left[F_\alpha(\boldsymbol{x},t)-F_\alpha^{eq}(\boldsymbol{x},t)\right]+\omega_\alpha(\boldsymbol{x},t),\end{aligned} \tag{5}$$

流：

$$F_\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_\alpha,t+1)\Leftarrow F_\alpha(\boldsymbol{x},t+1)。 \tag{6}$$

在方程(4)中，局部平衡态 $F_\alpha^{eq}(\boldsymbol{x},t)$ 和复变量 $\omega_\alpha(\boldsymbol{x},t)$ 需要确定。

2.2. 不同时间尺度上的系列偏微分方程

Knudsen 数定义为 $k=\frac{\ell}{L}$，这里 ℓ 为平均自由程，L 为流动的特征长度。在运算过程中，我们选择其与时间步长 Δt 相等[17]。这样，在物理尺度上，方程(4)写成

$$\begin{aligned}&F_\alpha(\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{e}_\alpha,t+k)-F_\alpha(\boldsymbol{x},t)\\&=-\frac{1}{\tau}\left[F_\alpha(\boldsymbol{x},t)-F_\alpha^{eq}(\boldsymbol{x},t)\right]+\omega_\alpha(\boldsymbol{x},t),\end{aligned} \tag{7}$$

在方程(7)中，我们假设 $\omega_\alpha(\boldsymbol{x},t)$ 为 2 阶量[17]，即

$$\omega_\alpha(\boldsymbol{x},t)=k^2\theta_\alpha(\boldsymbol{x},t)。 \tag{8}$$

在假设小 Knudsen 数的前提下，对实部和虚部分别应用 Chapman-Enskog 展开，得到

$$F_\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}k^nF_\alpha^{(n)}=F_\alpha^{(0)}+kF_\alpha^{(1)}+k^2F_\alpha^{(2)}+\cdots。 \tag{9}$$

在方程(9)中，$F_\alpha^{(0)}$ 为 $F_\alpha^{eq}(\boldsymbol{x},t)$。讨论不同的时间尺度 $t_0,t_1,\cdots$, 它们是 $t_n=k^nt, n=0,1,\cdots$, 以及

$$\frac{\partial}{\partial t}=\sum_{n=0}^{\infty}k^n\frac{\partial}{\partial t_n}。 \tag{10}$$

这样，我们得到不同时间尺度上的系列偏微分方程

$$\Delta F_\alpha^{eq}=-\frac{1}{\tau}F_\alpha^{(1)}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}F_\alpha^{eq}+C_2\Delta^2F_\alpha^{eq}=-\frac{1}{\tau}F_\alpha^{(2)}+\theta_\alpha, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&C_3\Delta^3F_\alpha^{eq}+2C_2\Delta\frac{\partial}{\partial t_1}F_\alpha^{eq}+\frac{\partial}{\partial t_2}F_\alpha^{eq}\\&+\Delta\tau\theta_\alpha=-\frac{1}{\tau}F_\alpha^{(3)}\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&C_4\Delta^4F_\alpha^{eq}+3C_3\Delta^2\frac{\partial}{\partial t_1}F_\alpha^{eq}+2C_2\Delta\frac{\partial}{\partial t_2}F_\alpha^{eq}+\frac{\partial}{\partial t_3}F_\alpha^{eq}\\&+C_2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}F_\alpha^{eq}+\frac{\partial}{\partial t_1}\tau\theta_\alpha+C_2\Delta^2\tau\theta_\alpha=-\frac{1}{\tau}F_\alpha^{(4)},\end{aligned} \tag{14}$$

$$C_5\Delta^5 F_\alpha^{eq} + 4C_4\Delta^3 \frac{\partial}{\partial t_1} F_\alpha^{eq} + 3C_3\Delta^2 \frac{\partial}{\partial t_2} F_\alpha^{eq} + 2C_2\Delta \frac{\partial}{\partial t_3} F_\alpha^{eq} + \frac{\partial}{\partial t_4} F_\alpha^{eq} + 3C_3\Delta \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} F_\alpha^{eq} + 2C_2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} F_\alpha^{eq} + \frac{\partial}{\partial t_2}\tau\theta_\alpha + \frac{\partial}{\partial t_1} 2C_2\Delta\tau\theta_\alpha + C_3\Delta^3\tau\theta_\alpha = -\frac{1}{\tau} F_\alpha^{(5)}, \tag{15}$$

$$C_6\Delta^6 F_\alpha^{eq} + 5C_5\Delta^4 \frac{\partial}{\partial t_1} F_\alpha^{eq} + 4C_4\Delta^3 \frac{\partial}{\partial t_2} F_\alpha^{eq} + 3C_3\Delta^2 \frac{\partial}{\partial t_3} F_\alpha^{eq} + 2C_2\Delta \frac{\partial}{\partial t_4} F_\alpha^{eq} + \frac{\partial F_\alpha^{eq}}{\partial t_5} + 6C_4\Delta^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} F_\alpha^{eq} + 6C_3\Delta \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} F_\alpha^{eq} + 2C_2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_3} F_\alpha^{eq} + C_3 \frac{\partial^3}{\partial t_1^3} F_\alpha^{eq} + C_2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} F_\alpha^{eq} + \frac{\partial}{\partial t_3}\tau\theta_\alpha + \frac{\partial}{\partial t_2} 2C_2\Delta\tau\theta_\alpha + \frac{\partial}{\partial t_1} 3C_3\Delta^2\tau\theta_\alpha + C_4\Delta^4\tau\theta_\alpha + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} C_2\tau\theta_\alpha = -\frac{1}{\tau} F_\alpha^{(6)}, \tag{16}$$

其中 $\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial t_0} + \boldsymbol{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}$，系数 C_i 为

$$C_2 = \frac{1}{2} - \tau\text{，} \tag{17}$$

$$C_3 = \tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\text{，} \tag{18}$$

$$C_4 = -\tau^3 + \frac{3}{2}\tau^2 - \frac{7}{12}\tau + \frac{1}{24}\text{，} \tag{19}$$

$$C_5 = \tau^4 - 2\tau^3 + \frac{5}{4}\tau^2 - \frac{1}{4}\tau + \frac{1}{120}\text{，} \tag{20}$$

$$C_6 = -\tau^5 + \frac{5}{2}\tau^4 - \frac{13}{6}\tau^3 + \frac{3}{4}\tau^2 - \frac{31}{360}\tau + \frac{1}{720}\text{。} \tag{21}$$

2.3. 复 Ginzburg-Landau 方程的恢复

为了得到复 Ginzburg-Landau 方程，假设平衡态分布函数 $F_\alpha^{eq}(\boldsymbol{x},t)$ 满足如下条件

$$\sum_\alpha F_\alpha^{eq}(\boldsymbol{x},t) e_{\alpha j} = 0\text{，} \tag{22}$$

$$\sum_\alpha F_\alpha^{eq}(\boldsymbol{x},t) e_{\alpha k} e_{\alpha j} = \lambda\beta A(\boldsymbol{x},t)\delta_{kj}\text{。} \tag{23}$$

这里 δ_{kj} 是 Kronecker 符号 λ,β 是实参数。

对方程(11)求和，有 t_0 尺度上的守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial t_0} A(\boldsymbol{x},t) = 0\text{。} \tag{24}$$

进一步，作 $(11)+(12)\times k$，并对 α 求和，有

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \beta\lambda k\left(\tau - \frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\left(A\delta_{jk}\right) + k\sum_\alpha \theta_\alpha + O\left(k^2\right) \tag{25}$$

方程(25)就是具截断误差 $O\left(k^2\right)$ 的复 Ginzburg-Landau 方程，其中 $\lambda k\beta\left(\tau - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{i}$ 以及 $k\sum_\alpha \theta_\alpha = H = \mathrm{i}(A+B)$。假设 θ_α 与 α 无关，则

$$\theta(\boldsymbol{x},t) = \frac{H}{(b+1)k}\text{，} \tag{26}$$

$$\omega_\alpha(\boldsymbol{x},t) = \frac{kH}{(b+1)}\text{。} \tag{27}$$

2.4. 平衡态分布函数 $F_\alpha^{eq}(\boldsymbol{x},t)$

根据方程(3)，(22)和(23)，我们得

$$F_\alpha^{eq}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\lambda\beta D}{bc^2} A(\boldsymbol{x},t), \alpha = 1,2,\cdots,b \tag{28}$$

$$F_0^{eq}(\boldsymbol{x},t) = \left(1 - \frac{\lambda\beta D}{c^2}\right) A(\boldsymbol{x},t)\text{。} \tag{29}$$

其中，$D(=2)$ 是空间维数，$b(=6)$ 格点的邻近格点数，$c = |\boldsymbol{e}_\alpha|$ 为粒子运动速度。

2.5. 模型的截断误差

对方程做运算 $(11)+(12)\times k+(13)\times k^2+(14)\times k^3$ 并对 α 求和，有

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \beta\lambda k\left(\tau - \frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\left(A\delta_{jk}\right) + H + E_2 + E_3 + O\left(k^4\right) \tag{30}$$

方程(30)中，E_2 为三阶误差项，E_3 为四阶误差项，

$$E_2 = 0\text{，} \tag{31}$$

$$E_3 = -k^3\left\{\left(\lambda\beta C_4 \frac{3c^2}{D+2} - 3\lambda^2\beta^2 C_2 C_3 + \lambda^2\beta^2 C_2^3\right)\nabla^4 A + \left[3(b+1)\lambda\beta C_3 + \tau C_2 \frac{bc^2}{D} - (b+1)\lambda\beta C_2^2\right]\nabla^2\theta + \frac{(C_2+\tau)}{k}\left\{\left(a - d|A|^2\right)\left[(b+1)\theta - \lambda\beta C_2\nabla^2 A\right] - 2dA\,\mathrm{Re}\left[\overline{A}\left((b+1)\theta - \lambda\beta C_2\nabla^2 A\right)\right]\right\}\right\} \tag{32}$$

这里 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}, \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k \partial x_k}$ 。

3. 超流体流动方程的恢复

复 Ginzburg-Landau 方程可以通过引入速度势函数导出超流体流动方程[15]

$$A(\boldsymbol{x},t) = R(\boldsymbol{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\boldsymbol{x},t)} 。\tag{33}$$

代入方程(25)，并且假设

$$\mathrm{i}B = \mathrm{i}\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} ,\tag{34}$$

这里 ξ 为实数，有

$$\frac{\partial R}{\partial t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} R\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} R + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2}$$
$$+(-1)\left[\frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} R + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial R}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} R\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2}\right] + \mathrm{i}\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \tag{35}$$

方程两边去掉 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ ，分开实部和虚部，得

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial R}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{1}{2}R\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} ,\tag{36}$$

$$R\frac{\partial \phi}{\partial t} = R + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2} - \frac{1}{2}R\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)^2 + \xi 。\tag{37}$$

用 $2R$ 乘方程(36)，得

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(R^2\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) 。\tag{38}$$

用 $\frac{1}{R}$ 乘方程(37)得

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 1 + \frac{1}{2R}\frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\xi}{R} 。\tag{39}$$

对方程(39)求偏导 $\frac{\partial}{\partial x_k}$ 有

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_k} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2R}\frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2} + \frac{\xi}{R}\right) \tag{40}$$

如果引入密度 ρ ，和速度 v_j ，

$$\rho(\boldsymbol{x},t) \equiv R^2(\boldsymbol{x},t) ,\tag{41}$$

$$v_j(\boldsymbol{x},t) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}\phi(\boldsymbol{x},t) 。\tag{42}$$

方程(36)，(37)变成如下形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} ,\tag{43}$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = -v_j\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2R}\frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2} + \frac{\xi}{R}\right) 。\tag{44}$$

则得超流体流动的动力学方程。超流体的压力由下式给出

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2R}\frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2} + \frac{\xi}{R}\right) 。\tag{45}$$

如果 $\rho = \mathrm{const}$ ，那么 $R = \sqrt{\rho} = \mathrm{const}$ ，方程(44)成为

$$\nabla^2 \phi = 0 。\tag{46}$$

则压力由下式给出

$$p = -\rho\left(\frac{1}{2R}\frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2} + \frac{\xi}{R}\right) \tag{47}$$

根据 $\rho(\boldsymbol{x},t) \equiv R^2(\boldsymbol{x},t)$ ，则

$$p = -\rho\frac{\xi}{R} = -R\xi 。\tag{48}$$

因此，

$$\xi = -\frac{p}{R} ,\tag{49}$$

$$B = -\frac{p}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} 。\tag{50}$$

在 $R = \mathrm{const}$ 的情况下，方程(36)-(37)给出不可压缩流动的 Navier-Stokes 方程。

4. 结论

在本文中，提出一个用于 Ginzburg-Landau 超流体流动的格子 Boltzmann 模型。使用的是复格子 Boltzmann 方程和复形式的不同的时间尺度系列偏微分方程。在二阶的非碰撞项的假设下，恢复了复 Ginzburg-Landau 方程，进一步假设速度存在势函数，则得到超流体流动的动力学方程。

最后，需要指出，这种方法的得到的压力具有很大的灵活性，在一定的假设下，此超流体动力学方程可以恢复到常规流体的动力学方程。仍然有许多亟待解决的问题，例如这种流动的等熵性质的研究，数值

模拟的探索等，这些问题，我们将在进一步的工作中体现。

5. 致谢

本文得到中国博士后科学基金(No. 2011M500002)资助。在完成本文过程中，作者与陈十一教授，王沫然教授进行了有价值的讨论，受益匪浅，在此致谢。

参考文献 (References)

[1] Y. H. Qian, D. D'Humieres and P. Lallemand. Lattice BGK model for Navier-Stokes equations. EPL (Europhysics Letters), 1992, 17(6): 479-484.
[2] S. Y. Chen, G. D. Doolen. Lattice Boltzmann method for fluid flows. Annual Review of Fluid Mechanics, 1998, 3: 314-322.
[3] H. D. Chen, S. Y. Chen and M. H. Matthaeus. Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice Boltzmann gas method. Physical Review A, 1992, 45: 5339-5342.
[4] R. Benzi, S. Succi and M. Vergassola. The lattice Boltzmann equation: Theory and applications. Physics Reports, 1992, 222 (3): 147-197.
[5] X. W. Shan, H. D. Chen. Lattice Boltzmann model of simulating flows with multiple phases and components. Physical Review E, 1993, 47: 1815-1819.
[6] L. S. Luo. Theory of the lattice Boltzmann method: Lattice Boltzmann models for nonideal gases. Physical Review E, 2000, 62: 4982-4996.
[7] A. Ladd. Numerical simulations of particle suspensions via a discretized Boltzmann equation, Part 2. Numerical results. Journal of Fluid Mechanics, 1994, 271: 311-339.
[8] S. Y. Chen, H. D. Chen, D. Martinez, et al. Lattice Boltzmann Model for simulation of Magnetohydrodynamics. Physical Review Letters, 1991, 67(27): 3776-3779.
[9] S. P. Dawson, S. Y. Chen and G. D. Doolen. Lattice Boltzmann computations for reaction—Diffusion equations. Journal of Chemical Physics, 1993, 98(2): 1514-1523.
[10] S. Succi, E. Foti and F. J. Higuera. 3-Dimensional flows in complex geometries with the lattice Boltzmann method. EPL (Europhysics Letters), 1989, 10: 433-438.
[11] G. W. Yan, Y. S. Chen and S. X. Hu. Simple lattice Boltzmann model for simulating flows with shock wave. Physical Review E, 1999, 59: 454-459.
[12] K. Qu, Q. Shu and Y. T. Chew. Alternative method to construct equilibrium distribution function in lattice Boltzmann method simulation of inviscid compressible flows at high Mach number, Physical Review E, 2007, 75(3): 036706.
[13] Y. B. Gan, A. G. Xu, G. C. Zhang, X. J. Yu and Y. J. Li. Two-dimensional lattice Boltzmann model for compressible flows with high Mach number. Physica A, 2008, 387: 1721-1732.
[14] S. Succi. Lattice quantum mechanics: An application to Bose-Einstein condensation. International Journal of Modern Physics C, 1998, 9(8): 1577-1585.
[15] J. Y. Zhang, G. W. Yan. A lattice Boltzmann model for the nonlinear Schrödinger equation. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2007, 40(33): 10393-10405.
[16] S. Palpacelli, S. Succi. Quantium lattice Boltzmann simulation of expanding Bose-Einstein condensates in random potentials. Physical Review E, 2008, 77: 066708.
[17] J. Y. Zhang, G. W. Yan. Lattice Boltzmann model for the complex Ginzburg-Landau equation. Physical Review E, 2010, 81: 066705.