

# Effects of Variable Thermal Conductivity and Viscosity on MHD Stagnation-Point Flow

Shengnan Li

College of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang Liaoning  
Email: 740632865@qq.com

Received: Nov. 25<sup>th</sup>, 2016; accepted: Dec. 9<sup>th</sup>, 2016; published: Dec. 15<sup>th</sup>, 2016

Copyright © 2016 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

The two-dimensional MHD stagnation-point flow with variable thermal conductivity and viscosity is studied. The thermal conductivity and viscosity are considered as functions of temperature. The governing Navier-Stokes equations are transformed into a set of ordinary differential equations (ODEs) by similarity transformation. The transformed ODEs are solved numerically using shooting method. Numerical calculations for various magnetic parameters, fluid viscosity parameters and Prandtl numbers are carried out, and the effects of magnetic strength and temperature changes to the skin friction coefficient, heat transfer near the wall and flow field characteristics are discussed in detail.

## Keywords

Stagnation-Point Flow, MHD Flow, Similarity Solutions, Variable Thermal Conductivity, Variable Viscosity

---

## 考虑变热传导系数和粘性系数的MHD驻点流问题研究

李胜男

沈阳师范大学数学与系统科学学院, 辽宁 沈阳  
Email: 740632865@qq.com

## 摘要

本文研究了考虑变热传导系数和粘性系数的二维定常MHD驻点流动问题。其中热传导系数和粘性系数是温度的函数。通过相似变换，将N-S控制方程组转化为常微分方程组；再利用打靶法计算此常微分方程组的数值解。分别对不同的磁场参数、流体粘性参数和普朗特数进行了数值计算，详细分析了磁场效应和温度变化对壁面摩擦系数、壁面传热及流场特征等的影响。

## 关键词

驻点流，MHD流，相似解，变热传导系数，变粘性系数

## 1. 引言

二维驻点流问题是流体力学中的一个经典问题，并且被广泛应用于工业应用领域。例如，均匀磁场下导电流体的驻点流问题在现代冶金和金属加工过程中起着非常重要的作用，因为其最终产品的质量往往取决于金属冷却速率，而这个速率又与壁面边界层结构有关。

Hiemenz [1]最先研究了经典二维平板驻点流问题，并且得到了N-S控制方程的精确解。从此，许多研究者对这个问题进行了不同方面的研究，例如三维驻点流问题、非定常驻点流问题、斜驻点流问题及带有热边界层的驻点流问题。Mahapatra [2]等对平板二维定常不可压粘性导电流体的MHD边界层方程给出了精确的相似解，研究了常温表面上的流体温度分布情况。Grosan [3]研究了固定平板MHD斜入射驻点流问题。在他的研究中，考虑了大小为常数的横向磁场。Lok [4]等研究了拉伸/收缩平板上粘性导电流体的MHD斜入射驻点流问题，其中外加磁场是均匀的，方向平行于斜入射驻点流的分界流线。Mahapatra [5]等考虑了收缩平板上斜入射驻点流的传热和辐射问题，研究发现流体内某一点的温度随着有效普朗特数的增加而减小。Chiam [6]表示出了拉伸表面驻点流边界层传热问题的相似解，并讨论了其对流场的影响，其中热传导系数随着温度线性变化。Ali [7]等扩展了此问题，考虑了感应磁场对流场的影响，研究了正交于拉伸平板的粘性不可压驻点流问题和常热传导系数的传热问题。Singh [8]等研究了固定横向磁场下MHD斜入射驻点流问题。

本文研究变粘性系数二维粘性不可压驻点流问题，其中热传导系数和粘性系数都是温度的函数，同时考虑感应磁场对整个流场的影响。

## 2. 基本方程组

本文考虑二维定常粘性不可压流体在正交于固定平板  $y=0$  平面上流动，如图1所示。导电流体放置在外加磁场  $H$  中，同时考虑感应磁场的影响。根据 Davies [9]，此问题的控制方程可以写为：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\mu_0}{4\pi\rho_\infty} \left( H_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) = \left( u_e \frac{du_e}{dx} - \frac{\mu_0 H_e}{4\pi\rho_\infty} \frac{dH_e}{dx} \right) + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu(T) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial H_1}{\partial x} + v \frac{\partial H_1}{\partial y} - H_1 \frac{\partial u}{\partial x} - H_2 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\sigma\mu_0} \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} \quad (3)$$

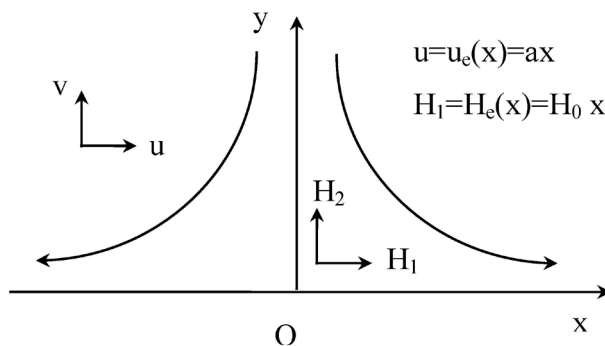


Figure 1. Physical model and coordinate system

图 1. 物理模型及坐标系

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho_{\infty} C_p} \frac{\partial}{\partial y} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4)$$

其中:  $x$  和  $y$  是沿平板表面及与其垂直平面建立的笛卡尔坐标;  $u$  和  $v$  是沿  $x$  和  $y$  轴的速度分量;  $H_1$  和  $H_2$  是沿  $x$  和  $y$  轴的磁场强度分量;  $\rho_{\infty}$  是流体密度;  $\mu_0$  是磁导率;  $\sigma$  是电导率;  $C_p$  是常压下的比热;  $u_e(x)$  和  $H_e(x)$  是边界层边界的  $x$  轴方向速度分量和磁场强度分量。

本文中, 粘性系数为  $T$  的函数, 定义为

$$\frac{1}{\mu(T)} = \frac{1}{\mu_{\infty}} [1 + \delta(T - T_{\infty})] \quad (5)$$

或

$$\frac{1}{\mu(T)} = \alpha(T - T_r) \quad (6)$$

其中,  $\alpha = \frac{\delta}{\mu_{\infty}}$ ,  $T_r = T_{\infty} - \frac{1}{\delta}$ 。  $\alpha$  和  $T_r$  都是常数, 大小取决于  $\mu_{\infty}$  和  $T_{\infty}$  的参比状态及小参数  $\delta$ , 反映流体的热性能。

已经发现, 对于  $0^{\circ}\text{F}$  至  $400^{\circ}\text{F}$  的液体金属, 热传导系数是关于  $T$  的线性函数。我们假设热传导系数有以下形式[10]

$$k(T) = k_{\infty} \left( 1 + \varepsilon \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} \right) \quad (7)$$

其中,  $\varepsilon = (k_w - k_{\infty})/k_{\infty}$  是一个小量级参数,  $k_w$  和  $k_{\infty}$  分别是壁面上及远离壁面处的热传导系数,  $T_w$  和  $T_{\infty}$  是壁面上及远离壁面处的流体温度。

边界条件如下

$$y = 0: u = 0, v = 0, \frac{\partial H_1}{\partial y} = H_2 = 0, \dots \quad (8)$$

$$y \rightarrow \infty: u = u_e(x) = ax, H_1 = H_e(x) = H_0 x, T = T_{\infty} \quad (9)$$

其中,  $a$  是大于零的常数,  $H_0$  是外流场均匀磁场的大小。

引入下面的相似变换

$$u = axf'(\eta), v = -\sqrt{av_{\infty}}f(\eta) \quad (10)$$

$$H_1 = H_0 x g'(\eta), \quad H_2 = -H_0 \sqrt{\frac{v_\infty}{a}} g(\eta) \quad (11)$$

$$T = T_\infty + \theta(\eta)(T_w - T_\infty), \quad \eta = \sqrt{\frac{a}{v_\infty}} y, \quad v_\infty = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \quad (12)$$

非线性偏微分方程组(1)~(4)可转化为如下常微分方程组

$$f''' - \frac{\theta' f''}{\theta - \theta_r} - \left( \frac{\theta}{\theta_r} - 1 \right) [ff'' - ff' + 1 + \beta(g'g' - gg'' - 1)] = 0 \quad (13)$$

$$\lambda g''' + fg'' - f''g = 0 \quad (14)$$

$$(1 + \varepsilon\theta)\theta'' + \varepsilon\theta'\theta' + \text{Pr} f\theta' = 0 \quad (15)$$

边界条件(8)~(9)转化为

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (16)$$

$$g(0) = 0, \quad g'(\infty) = 1, \quad g''(0) = 0 \quad (17)$$

$$\theta(0) = 1, \quad \theta(\infty) = 0 \quad (18)$$

其中：参数  $\lambda$ ， $\text{Pr}$ ， $\beta$  和  $\theta_r$  分别表示磁普朗特数的倒数，普朗特数，磁参数和流体粘性参数。其定义为

$$\lambda = \frac{1}{4\pi\mu_0\sigma v_\infty} \quad (19)$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu_\infty C_p}{k_\infty} \quad (20)$$

$$\beta = \frac{\mu_0}{4\pi\rho_\infty} \left( \frac{H_0}{a} \right)^2 \quad (21)$$

$$\theta_r = -\frac{1}{\delta(T_w - T_\infty)} = \frac{T_r - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (22)$$

当流体粘性系数为常数时，方程(13)退化为

$$f''' + ff'' - ff' + 1 + \beta(g'g' - gg'' - 1) = 0 \quad (23)$$

该结果与 Ali *et al.* [7]方程的结果一致。

当热传导系数为常数时，方程(15)退化为

$$\theta'' + \text{Pr} f\theta' = 0 \quad (24)$$

该结果与 Mahapatra *et al.* [5]方程的结果一致。

我们关注的量为表面摩擦系数和努赛尔特数，分别定义为

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho_\infty u_e^2} = \text{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \frac{\theta_r}{\theta_r - 1} f''(0) \quad (25)$$

$$\text{Nu} = \frac{xq_w}{k_\infty(T_w - T_\infty)} = -\text{Re}_x^{-\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon)\theta'(0) \quad (26)$$

其中，壁面剪切应力  $\tau_w = \left[ \mu(T) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_{y=0}$ ，壁面热流量  $q_w = \left[ -k(T) \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right]_{y=0}$ ， $\text{Re}_x = \frac{u_e x}{v_\infty}$  为当地雷诺数。

### 3. 结果与讨论

我们采用龙格-库塔方法和打靶法对方程(13)~(15)及其边界条件(16)~(18)进行数值求解。为了检验所使用数值求解方法的正确性和准确性，我们计算了粘性系数  $\mu(T)$  取常数且不考虑磁场，即  $\beta = 0$  时  $f''(0)$  的值。数值结果与 Howarth [11] 和 Li *et al.* [12] 的结果进行了对比，如表 1 所示。可以发现，计算结果与之前发表过的结果吻合良好，说明我们的数值方法是准确的。

首先计算了表面摩擦系数  $f''(0)$  随磁系数  $\beta$  和流体粘性参数  $\theta_r$  的变化。如图 2 所示，表面摩擦系数随着  $\beta$  的增加而减小，也随着  $-\theta_r$  的增加而减小。图 3 给出了当地努赛尔特数  $-\theta'(0)$  随  $P_r$  数变化情况，可以发现， $-\theta'(0)$  随  $P_r$  数的增加而增加，随着  $\varepsilon$  的增加而减小。

图 4~6 表示，当  $P_r = 0.72$ ， $\theta_r = -1$  和  $\varepsilon = 0.1$  时，磁系数  $\beta$  对水平速度剖面  $f'(\eta)$ 、感应磁场剖面  $g'(\eta)$ 、温度剖面  $\theta(\eta)$  的影响。可以看出，速度和感应磁场随着  $\beta$  的增加而减小，而温度随着  $\beta$  的增加而增加。

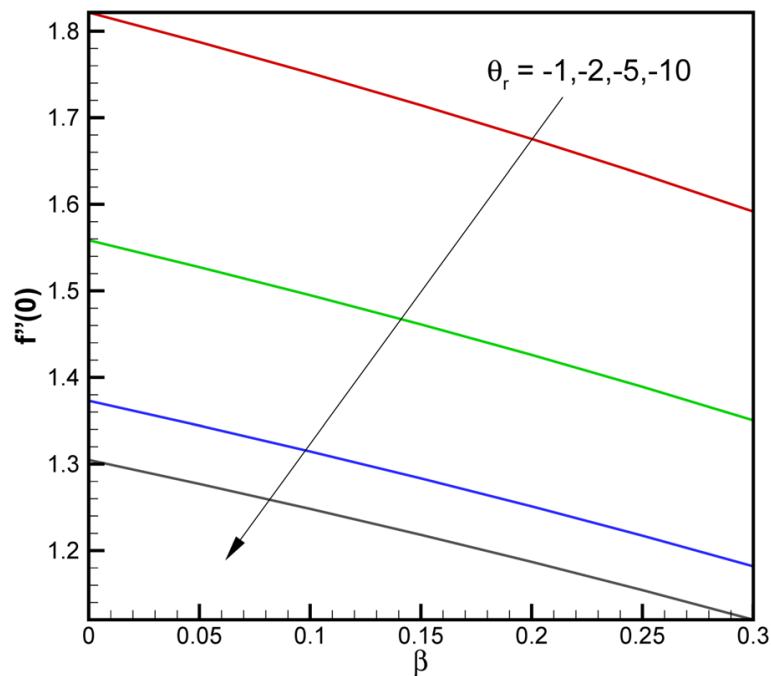
图 7~9 表示，当  $P_r = 0.72$ ， $\beta = 0.1$ ， $\varepsilon = 0.1$  时，粘性系数  $\theta_r$  对水平速度剖面  $f'(\eta)$ 、感应磁场剖面  $g'(\eta)$  和温度剖面  $\theta(\eta)$  的影响。可以看出，速度和感应磁场随着  $-\theta_r$  的增加而减小，而温度随着  $-\theta_r$  的增加而增加。

图 10~12 表示，当  $\theta_r = -1$ ， $\beta = 0.1$  和  $\varepsilon = 0.1$  时，普朗特数  $P_r$  对水平速度剖面  $f'(\eta)$ 、感应磁场剖面  $g'(\eta)$  和温度剖面  $\theta(\eta)$  的影响，可以看出，速度、感应磁场和温度都随着  $P_r$  的增加而减小。从图 12 中

**Table 1.** Value of  $f''(0)$  when  $\mu(T) = \text{const}$  and  $\beta = 0$

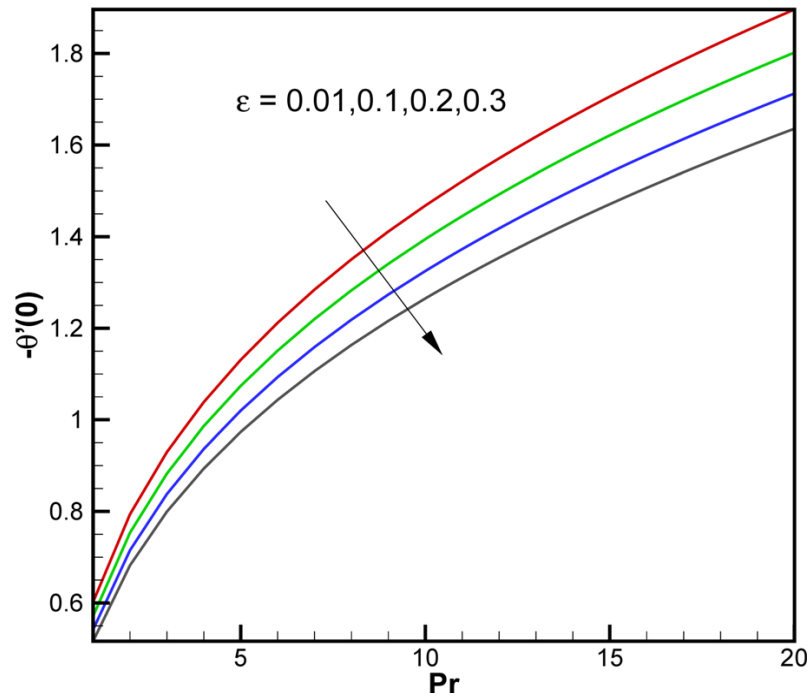
**表 1.**  $f''(0)$  的数值( $\mu(T)$  为常数,  $\beta = 0$ )

L. Howarb (1934)	G. Li (2008)	Present paper
1.2326	1.2326	1.2326



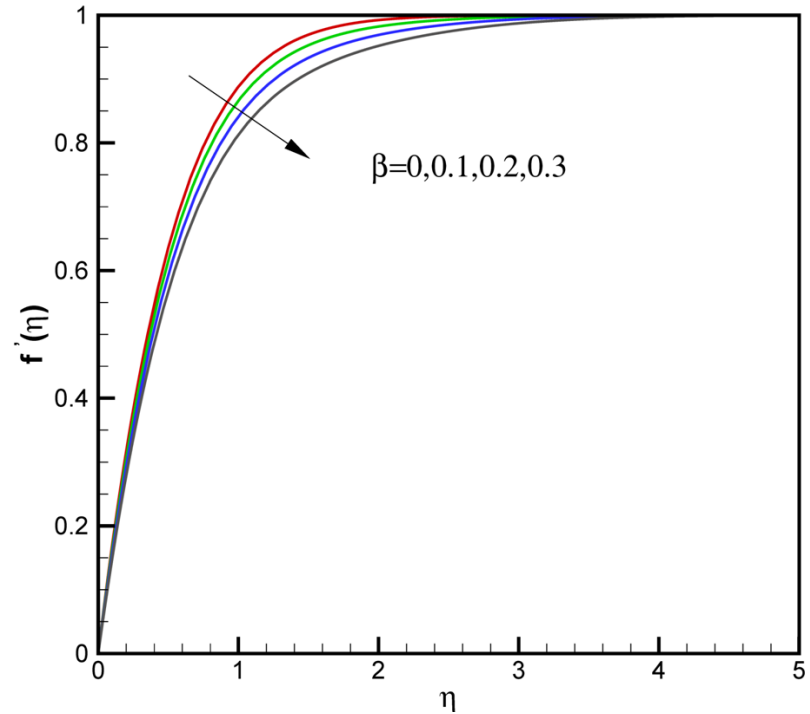
**Figure 2.** Variation of  $f''(0)$  with  $\beta$  for different  $\theta_r$ , when  $P_r = 0.72$  and  $\varepsilon = 0.1$

**图 2.**  $P_r = 0.72$ ， $\varepsilon = 0.1$  时，不同  $\theta_r$  值对应的  $f''(0)$  随  $\beta$  的变化



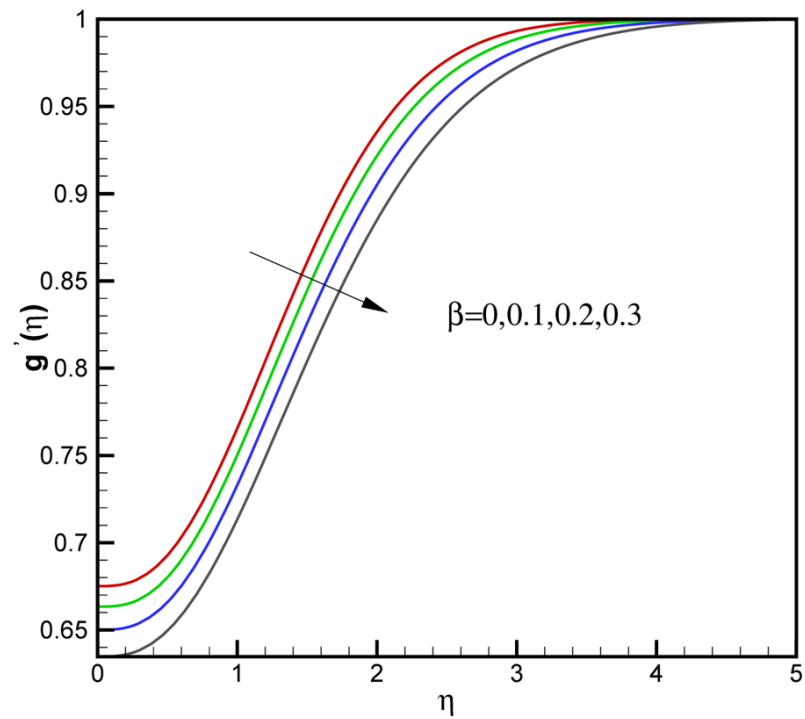
**Figure 3.** Variation of  $\theta'(0)$  with  $Pr$  for different  $\epsilon$  when  $\beta=0.1$  and  $\theta_r=-1$

**图 3.**  $\beta=0.1$  ,  $\theta_r=-1$  时, 不同  $\epsilon$  值对应的  $-\theta'(0)$  随  $Pr$  的变化



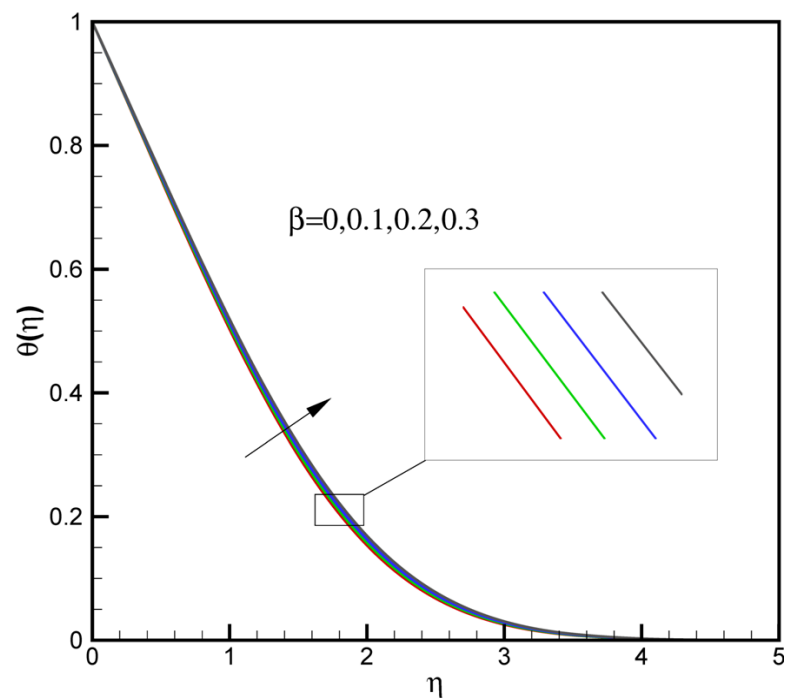
**Figure 4.** Velocity profiles for different values of  $\beta$  when  $Pr=0.72$  ,  $\theta_r=-1$  and  $\epsilon=0.1$

**图 4.**  $Pr=0.72$  ,  $\theta_r=-1$  ,  $\epsilon=0.1$  时, 不同  $\beta$  值对应的  $f'(\eta)$  剖面



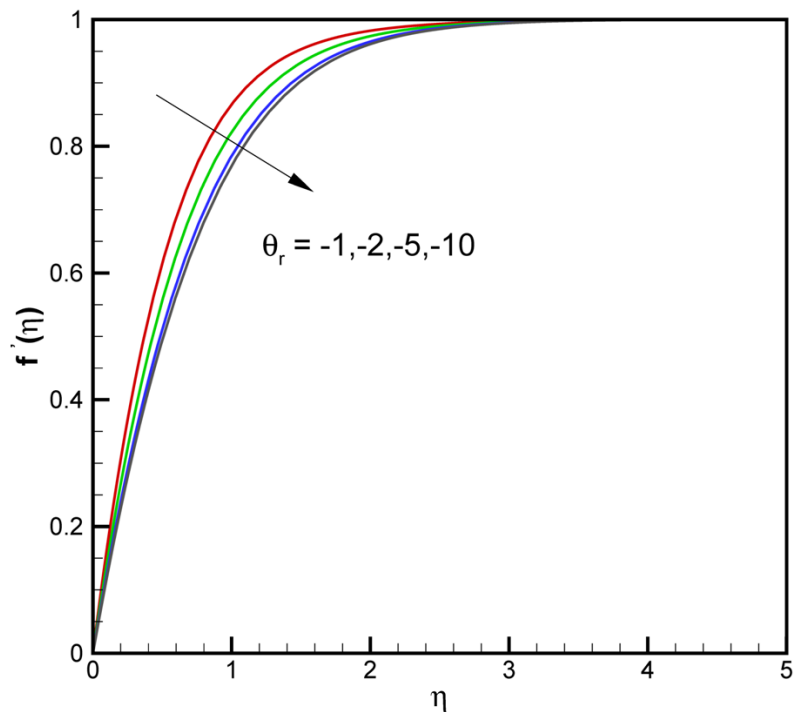
**Figure 5.**  $g'(\eta)$  profiles for different values of  $\beta$  when  $Pr=0.72$ ,  $\theta_r=-1$  and  $\varepsilon=0.1$

**图 5.**  $Pr=0.72$ ,  $\theta_r=-1$ ,  $\varepsilon=0.1$ 时, 不同  $\beta$  值对应的  $g'(\eta)$  剖面



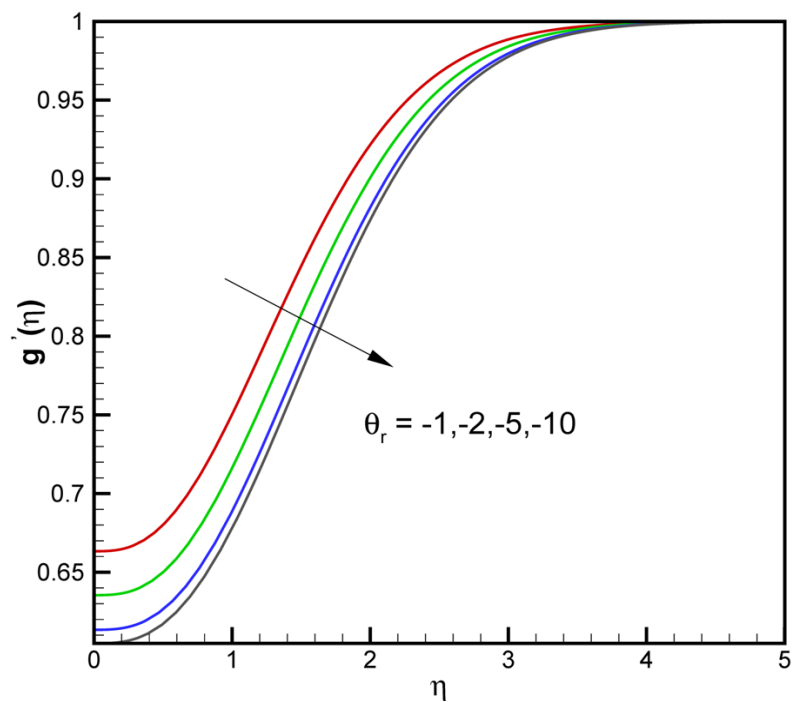
**Figure 6.** Temperature profiles for different values of  $\beta$  when  $Pr=0.72$ ,  $\theta_r=-1$  and  $\varepsilon=0.1$

**图 6.**  $Pr=0.72$ ,  $\theta_r=-1$ ,  $\varepsilon=0.1$ 时, 不同  $\beta$  值对应的  $\theta(\eta)$  剖面



**Figure 7.** Velocity profiles for different values of  $\theta_r$  when  $Pr = 0.72$ ,  $\beta = 0.1$  and  $\varepsilon = 0.1$

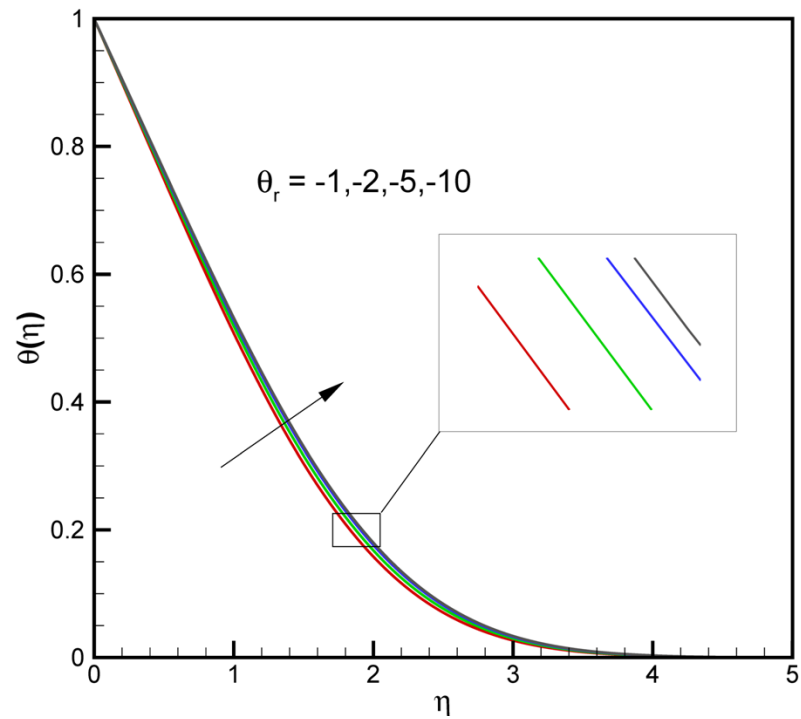
**图 7.**  $Pr = 0.72$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ 时, 不同  $\theta_r$  值对应的  $f'(\eta)$  剖面



**Figure 8.**  $g'(\eta)$  profiles for different values of  $\theta_r$  when  $Pr = 0.72$ ,  $\beta = 0.1$  and  $\varepsilon = 0.1$

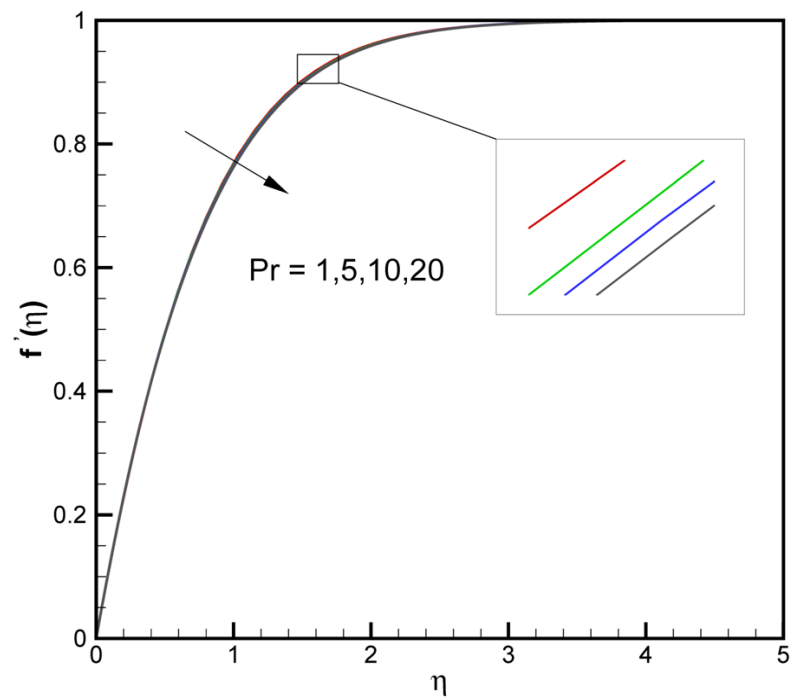
**图 8.**  $Pr = 0.72$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ 时, 不同  $\theta_r$  值对应的  $g'(\eta)$  剖面





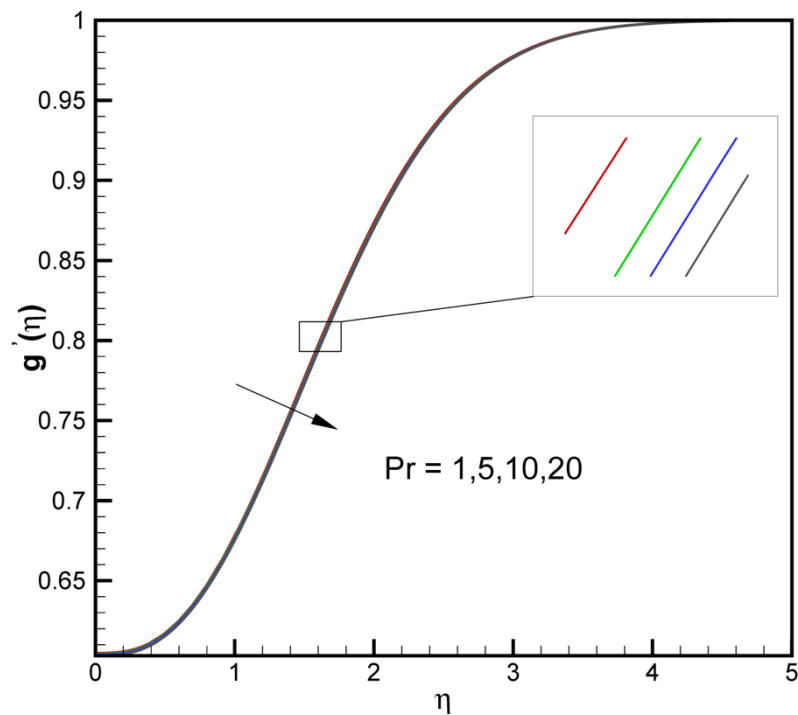
**Figure 9.** Temperature profiles for different values of  $\theta_r$ , when  $Pr=0.72$ ,  $\beta=0.1$  and  $\varepsilon=0.1$

**图 9.**  $Pr=0.72$ ,  $\beta=0.1$ ,  $\varepsilon=0.1$ 时, 不同  $\theta_r$  值对应的  $\theta(\eta)$  剖面



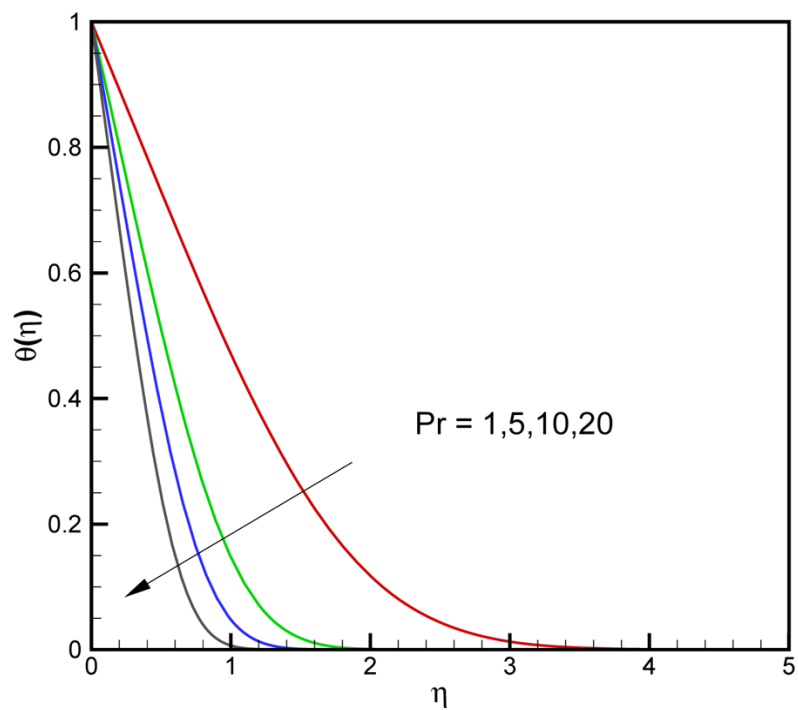
**Figure 10.** Velocity profiles for different values  $Pr$  when  $\theta_r=-1$ ,  $\beta=0.1$  and  $\varepsilon=0.1$

**图 10.**  $\theta_r=-1$ ,  $\beta=0.1$ ,  $\varepsilon=0.1$ 时, 不同  $Pr$  值对应的  $f'(\eta)$  剖面



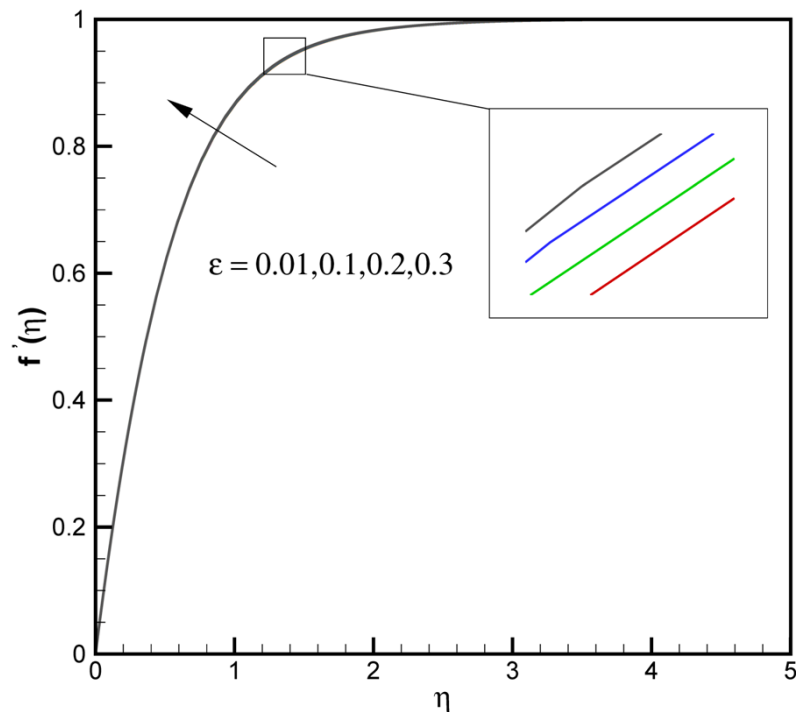
**Figure 11.**  $g'(\eta)$  profiles for different values of  $Pr$  when  $\theta_r = -1$ ,  $\beta = 0.1$  and  $\varepsilon = 0.1$

**图 11.**  $\theta_r = -1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ 时, 不同  $Pr$  值对应的  $g'(\eta)$  剖面



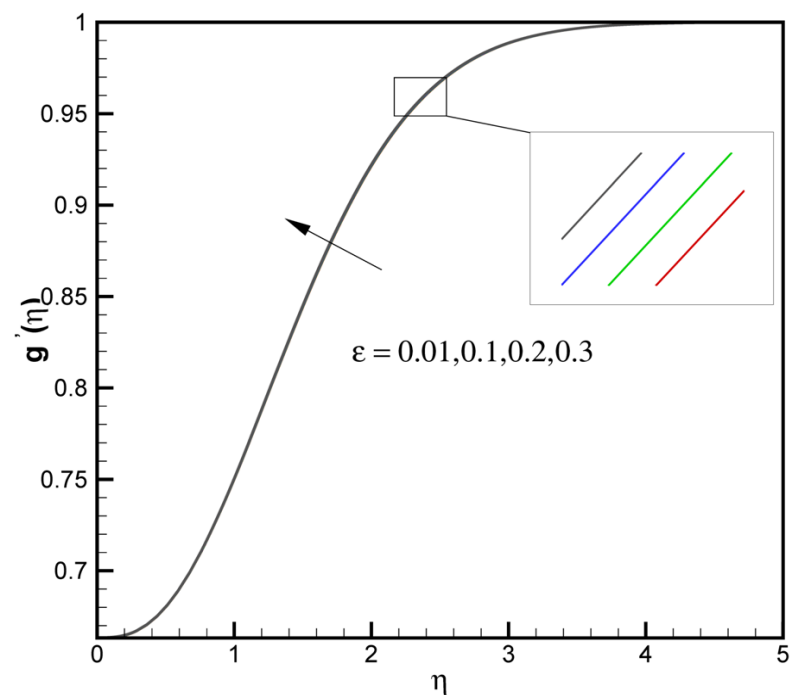
**Figure 12.** Temperature profiles for different values of  $Pr$  when  $\theta_r = -1$ ,  $\beta = 0.1$  and  $\varepsilon = 0.1$

**图 12.**  $\theta_r = -1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ 时, 不同  $Pr$  值对应的  $\theta(\eta)$  剖面



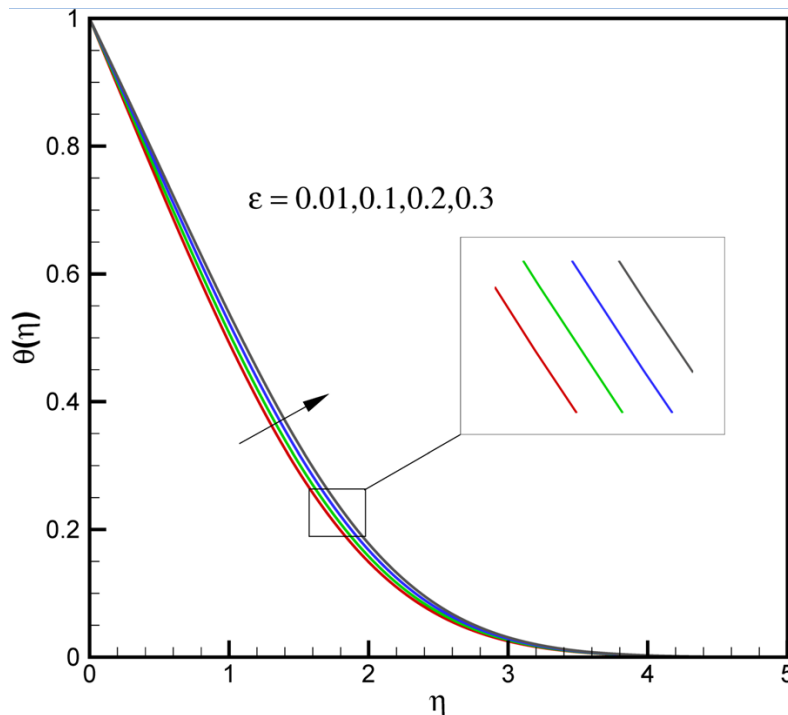
**Figure 13.** Velocity profiles for different values of  $\varepsilon$  when  $\theta_r = -1$ ,  $\beta = 0.1$  and  $Pr = 0.72$

**图 13.**  $\theta_r = -1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $Pr = 0.72$  时, 不同  $\varepsilon$  值对应的  $f'(\eta)$  剖面



**Figure 14.**  $g'(\eta)$  profiles for different values of  $\varepsilon$  when  $\theta_r = -1$ ,  $\beta = 0.1$  and  $Pr = 0.72$

**图 14.**  $\theta_r = -1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $Pr = 0.72$  时, 不同  $\varepsilon$  值对应的  $g'(\eta)$  剖面



**Figure 15.** Temperature profiles for different values of  $\varepsilon$  when  $\theta_r = -1$ ,  $\beta = 0.1$  and  $Pr = 0.72$

**图 15.**  $\theta_r = -1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $Pr = 0.72$  时, 不同  $\varepsilon$  值对应的  $\theta(\eta)$  剖面

可以发现, 热边界层厚度随着  $Pr$  的增加而减少。这个结果是我们所期望得到的, 因为传热能力会随着  $Pr$  的增加而减小, 即热边界层厚度将会减少。

图 13~15 表示, 当  $\theta_r = -1$ ,  $\beta = 0.1$  和  $Pr = 0.72$  时,  $\varepsilon$  对水平速度剖面  $f'(\eta)$ 、感应磁场剖面  $g'(\eta)$  和温度剖面  $\theta(\eta)$  的影响, 可以看出, 速度、感应磁场和温度都随着  $\varepsilon$  的增加而增加。从图 13~14 中也可以发现  $\varepsilon$  对水平速度剖面  $f'(\eta)$  和感应磁场剖面  $g'(\eta)$  的影响很微弱, 这是因为  $\varepsilon$  没有出现在方程 (13)~(14) 中, 导致  $\varepsilon$  没有直接通过温度影响  $f'(\eta)$  和  $g'(\eta)$ 。

#### 4. 结论

本文研究了考虑感应磁场的二维粘性导电流体驻点流问题, 详细分析了变热传导系数和变粘性系数下流场随磁系数、粘性参数及普朗特数的变化情况。主要结果总结如下: 速度和感应磁场随着  $\beta$  和  $-\theta_r$  的增加而减小, 而温度随着  $\beta$  和  $-\theta_r$  的增加而增加。速度、感应磁场和温度都随着  $Pr$  的增加而减小, 随着  $\varepsilon$  的增加而增加。 $\varepsilon$  对速度剖面和感应磁场剖面的影响较对温度剖面的影响弱。

#### 基金项目

辽宁省自然科学基金资助项目(2015020650)。

#### 参考文献 (References)

- [1] Hiemenz, K. (1991) Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. *Dingler's Polytech.*, **3326**, 321-324.
- [2] Mahapatra, T.R. and Gupta, A.S. (2001) Magnetohydrodynamic Stagnation-Point Flow towards a Stretching Sheet. *Acta Mechanica*, **152**, 191-196. <https://doi.org/10.1007/BF01176953>

- [3] Grosan, T., Pop, I., Revnic, C. and Ingham, D.B. (2009) Magnetohydrodynamic Oblique Stagnation-Point Flow. *Meccanica*, **44**, 565-572. <https://doi.org/10.1007/s11012-009-9196-0>
- [4] Lok, Y.Y., Merkin, J.H. and Pop, I. (2015) MHD Oblique Stagnation-Point Flow towards a Stretching/Shrinking Surface. *Meccanica*, **50**, 1-13. <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0188-y>
- [5] Mahapatra, T.R., Nandy, S.K. and Gupta, A.S. (2012) Oblique Stagnation-Point Flow and Heat Transfer towards a Shrinking Sheet with Thermal Radiation. *Meccanica*, **47**, 1325-1335. <https://doi.org/10.1007/s11012-011-9516-z>
- [6] Chiam, T.C. (1996) Heat Transfer with Variable Conductivity in a Stagnation-Point Flow towards a Stretching Sheet. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **23**, 239-248.
- [7] Ali, F.M., Nazar, R., Arifin, N.M. and Pop, I. (2011) MHD Stagnation-Point Flow and Heat Transfer towards Stretching Sheet with Induced Magnetic Field. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, **4**, 409-418. <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1426-6>
- [8] Singh, P., Tomer, N.S., Kumar, S. and Sinha, D. (2010) MHD Oblique Stagnation-Point Flow towards a Stretching Sheet with Heat Transfer. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **6**, 94-111.
- [9] Davies, T.V. (1963) The Magneto-Hydrodynamic Boundary Layer in the Two-Dimensional Steady Flow Past a Semi-Infinite Flat Plate I, Uniform Conditions at Infinity. *Proceedings of the Royal Society A*, **273**, 496-508. <https://doi.org/10.1098/rspa.1963.0105>
- [10] Prasad, K.V., Vajravelu, K. and Datti, P.S. (2010) The Effects of Variable Fluid Properties on the Hydro-Magnetic Flow and Heat Transfer over a Non-Linearly Stretching Sheet. *International Journal of Thermal Sciences*, **49**, 603-610. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2009.08.005>
- [11] Howarth, L. (1934) On Calculation of the Steady Flow in the Boundary Layer near the Surface of a Cylinder in a Stream. Aeronautical Research Committee Reports and Memoranda No. 1632.
- [12] Li, G. and Gao, Z. (2008) Exact Solution for Two Dimensional Unsteady Oblique Stagnation Point Flow—An Application of Interacting Shear Flows Theory. *Acta Aerodynamica Sinica*, **26**, 83-86.

**期刊投稿者将享受如下服务:**

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [ijfd@hanspub.org](mailto:ijfd@hanspub.org)