

# A Four-Order Difference Type Lattice Boltzmann Model for the Poisson Equation

Bo Yan<sup>1</sup>, Jianchao Wang<sup>1</sup>, Guangwu Yan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>College of Civil Engineering, Jilin Jianzhu University, Changchun Jilin

<sup>2</sup>College of Mathematics, Jilin University, Changchun Jilin

Email: yangw\_jlu@126.com, dhr\_byan@126.com

Received: Mar. 3<sup>rd</sup>, 2017; accepted: Mar. 20<sup>th</sup>, 2017; published: Mar. 23<sup>rd</sup>, 2017

---

## Abstract

A four-order difference type lattice Boltzmann model is employed to investigate the Poisson equation in this paper. By using the steady lattice Boltzmann equation and the multi-spatial scale expansion, the Poisson equation with four-order accuracy is obtained. Examples show that the numerical results agree well with exact solutions.

## Keywords

Finite Difference Method, Lattice Boltzmann Model, Poisson Equation

---

# 一种用于Poisson方程的四阶差分型格子 Boltzmann模型

闫 铂<sup>1</sup>, 王建朝<sup>1</sup>, 闫广武<sup>2</sup>

<sup>1</sup>吉林建筑大学土木工程学院, 吉林 长春

<sup>2</sup>吉林大学数学学院, 吉林 长春

Email: yangw\_jlu@126.com, dhr\_byan@126.com

收稿日期: 2017年3月3日; 录用日期: 2017年3月20日; 发布日期: 2017年3月23日

---

## 摘 要

本文给出了用于求解Poisson方程的四阶差分型格子Boltzmann模型, 应用定常的格子Boltzmann方程和空间多尺度展开, 得到了截断误差是四阶精度的Poisson方程。数值例子表明, 该模型在精度上较相

应的二阶模型有所提高。

**关键词**

有限差分法, 格子Boltzmann模型, Poisson方程

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.  
 This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).  
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

**1. 引言**

Poisson 方程在流体力学中有广泛的应用。例如, 在具势流动的势函数求解和涡流系统的流函数求解等问题中, Poisson 方程的求解直接影响流体力学量的精度。最近研究表明, 格子 Boltzmann 方法(LBM)可成功应用于求解反应扩散方程[1]、交叉扩散方程[2]、Ginzburg-Landau 方程[3]、波动方程[4]、Poisson 方程[5] [6]等。本文提出了一种用于 Poisson 方程的有限差分格子 Boltzmann 模型(FDLBM)。与以前的 LBM 模型不同[7] [8] [9] [10], 本文所构造的模型没有粒子速度, 在迭代中只有粒子从一个位置到相邻位置的位移。与其它调用矩阵公式和带有预处理的 LBM 不同, 我们将有限差分格式引入到标准 LBM 方程中。数值结果表明, 该模型与解析解吻合的很好。

**2. 格子 Boltzmann 模型**

**2.1. 迭代方程**

考虑一  $D(=2)$  维空间, 将其离散成网格, 网格中心与相邻的  $b$  个格点通过格线相连。每个格点的粒子可以分为  $b+1$  个部分, 每一部分的状态只与本身和相邻粒子有关。定义从  $\mathbf{x}$  位置到同一位置的位移为  $\mathbf{e}_0$ , 从  $\mathbf{x}$  位置到其他相邻格点的位移为

$$\mathbf{e}_\alpha = \left[ x_0 \cos \frac{2(\alpha-1)\pi}{b} + y_0 \sin \frac{2(\alpha-1)\pi}{b} \right], \quad \alpha = 1, \dots, b. \tag{1}$$

其中  $|\mathbf{e}_\alpha|=1$ ,  $x_0, y_0$  分别为  $x, y$  方向的单位矢量。

由于二维 Poisson 方程独立于时间, 所以把 LBM 方程改写为

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{e}_\alpha) - f_\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x})], \tag{2}$$

其中  $f_\alpha(\mathbf{x})$  为  $\mathbf{x}$  位置粒子的分布函数,  $f_\alpha^{eq}(\mathbf{x})$  为同一位置的平衡态分布函数,  $\tau$  为松弛因子,  $\varepsilon$  为空间步长的量级,  $\mathbf{e}_\alpha$  为  $\alpha$  方向的单位矢量。

定义宏观量

$$u(\mathbf{x}) = \sum_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}). \tag{3}$$

此外, 局部平衡态分布函数  $f_\alpha^{eq}(\mathbf{x})$  满足守恒条件

$$\sum_\alpha f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}). \tag{4}$$

认为模型中  $f_\alpha^{eq}(\mathbf{x})$  为迭代后的最终状态，而不是过渡状态。迭代过程从宏观量  $u$  的任意分布开始到最终平衡状态结束，即 Poisson 方程的解。所以方程(2)写为

$$f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}) = \tau f_\alpha(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{e}_\alpha) + (1 - \tau) f_\alpha(\mathbf{x}). \quad (5)$$

在方程(5)中，由于不含时间，所以迭代的表述与标准 LBM 方程不同。宏观量只用  $f_\alpha^{eq}(\mathbf{x})$ ，即  $\mathbf{x}$  位置及其相邻位置的分布值计算。因为方程中没有  $f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha, t+1)$  项用来迭代，所以不需要流动过程。

将方程(5)中的  $f_\alpha(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{e}_\alpha)$  写成五点差分格式，其精度为二阶精度。令  $\mathbf{x}$  结点坐标为  $(i, j)$ ，四个相邻结点坐标依次为  $(i+1, j)$ ， $(i, j+1)$ ， $(i-1, j)$ ， $(i, j-1)$ 。带入五结点差分公式，得到二阶精度 Poisson 方程的 FDLBM 模型

$$f_\alpha^{eq}(i, j) = (1 - \tau) f_\alpha(i, j) + \frac{\tau}{4} [f_\alpha(i-1, j) + f_\alpha(i+1, j) + f_\alpha(i, j-1) + f_\alpha(i, j+1) + \varepsilon^2 \theta_\alpha(i, j)], \quad (6)$$

其中  $\theta(i, j)$  定义为  $\sum_\alpha \theta_\alpha(i, j) = g(i, j)$ 。

特别地，二阶精度 Laplace 方程的 FDLBM 模型表示为

$$f_\alpha^{eq}(i, j) = (1 - \tau) f_\alpha(i, j) + \frac{\tau}{4} [f_\alpha(i-1, j) + f_\alpha(i+1, j) + f_\alpha(i, j-1) + f_\alpha(i, j+1)]. \quad (7)$$

四阶精度的差分格式与九个结点有关，带入方程(5)，得出四阶精度 Poisson 方程的 FDLBM 模型

$$\begin{aligned} f_\alpha^{eq}(i, j) = & (1 - \tau) f_\alpha(i, j) \\ & + \frac{\tau}{20} \left\{ 4 [f_\alpha(i-1, j) + f_\alpha(i+1, j) + f_\alpha(i, j-1) + f_\alpha(i, j+1)] \right. \\ & + f_\alpha(i-1, j-1) + f_\alpha(i+1, j-1) + f_\alpha(i-1, j+1) + f_\alpha(i+1, j+1) \\ & \left. + 6\varepsilon^2 \theta_\alpha(i, j) + \frac{\varepsilon^4}{2} \nabla^2 \theta_\alpha(i, j) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

相应地，对于 Laplace 方程，(8)式可表示为

$$\begin{aligned} f_\alpha^{eq}(i, j) = & (1 - \tau) f_\alpha(i, j) \\ & + \frac{\tau}{20} \left\{ 4 [f_\alpha(i-1, j) + f_\alpha(i+1, j) + f_\alpha(i, j-1) + f_\alpha(i, j+1)] \right. \\ & \left. + f_\alpha(i-1, j-1) + f_\alpha(i+1, j-1) + f_\alpha(i-1, j+1) + f_\alpha(i+1, j+1) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

## 2.2. 精度分析

将(6)式两端对  $\alpha$  求和，得出关于  $u$  的方程

$$u^{eq}(i, j) = (1 - \tau) u(i, j) + \frac{\tau}{4} [u(i-1, j) + u(i+1, j) + u(i, j-1) + u(i, j+1) + \varepsilon^2 g(i, j)], \quad (10)$$

其中， $u^{eq}(i, j)$  表示  $u^{n+1}(i, j)$  的结果， $n$  为迭代步数。在  $(i, j)$  点附近进行 Taylor 展开，有

$$u^{eq}(i, j) = (1 - \tau) u(i, j) + \frac{\tau}{4} \left[ 4u(i, j) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \Big|_{(i, j)} + O(\varepsilon^4) + \varepsilon^2 g(i, j) \right]. \quad (11)$$

当  $n \rightarrow \infty$  时， $u^{eq}(i, j)$  等价于  $u(i, j)$ 。那么，

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \Big|_{(i, j)} + g(i, j) = O(\varepsilon^2). \quad (12)$$

同样地, (8)式两端对  $\alpha$  求和, 得出关于  $u$  的方程

$$\begin{aligned}
 u^{eq}(i, j) &= (1-\tau)u(i, j) \\
 &+ \frac{\tau}{20} \left\{ 4[u(i-1, j)+u(i+1, j)+u(i, j-1)+u(i, j+1)] \right. \\
 &\quad \left. + u(i-1, j-1)+u(i+1, j-1)+u(i-1, j+1)+u(i+1, j+1) \right. \\
 &\quad \left. + 6\varepsilon^2 g(i, j) + \frac{\varepsilon^4}{2} \nabla^2 g(i, j) \right\}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

在  $(i, j)$  点附近进行 Taylor 展开, 得

$$\begin{aligned}
 u^{eq}(i, j) &= \frac{\tau}{20} \left[ 20u(i, j) + 6\varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \Big|_{(i, j)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varepsilon^4}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u \Big|_{(i, j)} + O(\varepsilon^6) + 6\varepsilon^2 g(i, j) + \frac{\varepsilon^4}{2} \nabla^2 g \Big|_{(i, j)} \right] \\
 &+ (1-\tau)u(i, j).
 \end{aligned} \tag{14}$$

因为  $\nabla^2 u = -g$ , 所以

$$\frac{\tau}{20} \left[ 6\varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \Big|_{(i, j)} + 6\varepsilon^2 g(i, j) \right] = O(\varepsilon^6). \tag{15}$$

即

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \Big|_{(i, j)} + g(i, j) = O(\varepsilon^4). \tag{16}$$

方程(12)和(16)分别为二阶和四阶精度的修正 Poisson 方程。

### 3. 数值算例

下面应用本文所提出的 FDLBM 模型求解 Laplace 方程和 Poisson 方程。

**例 1:** 考虑一个二维 Laplace 方程

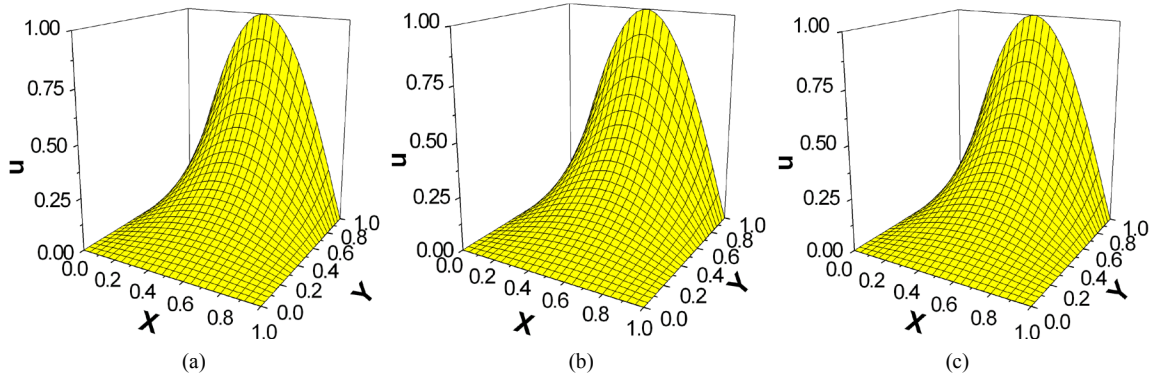
$$\nabla^2 u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1. \tag{17}$$

其 Dirichlet 边界条件为  $u(x, 0) = 0$ ,  $u(x, 1) = \sin \pi x$ ,  $u(0, y) = 0$ ,  $u(1, y) = 0$ 。方程的解析解为

$$u(x, y) = \frac{\sin \pi x \sinh \pi y}{\sinh \pi}. \tag{18}$$

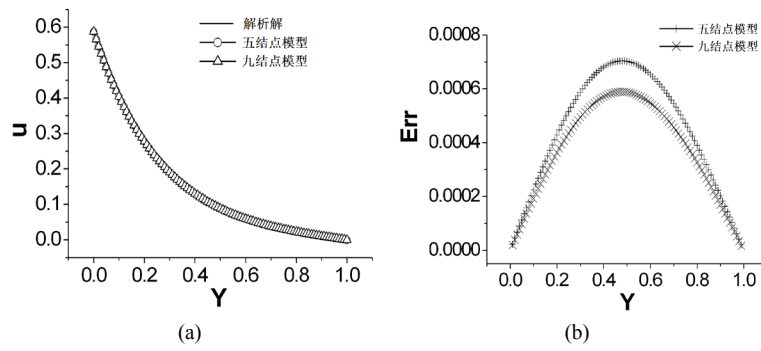
本文使用了二阶和四阶模型计算例 1。其模拟结果与解析解的比较如图 1 所示。其它参数为: 格子数  $100 \times 100$ ,  $\Delta x = 0.01$ ,  $\tau = 0.99$ 。计算域内宏观量  $u(x, y)$  的初值为 0, 边界条件为上述的 Dirichlet 边界条件。在模拟过程中, 边界上函数的分布等于平衡态分布, 由宏观量  $u(x, y)$  给出。把  $u(x, y)$  的新旧值之差设置为结束迭代的条件, 当最大差值小于  $1 \times 10^{-6}$  时, 迭代结束。然后,  $u(x, y)$  的值即为 Laplace 方程的数值模拟结果。图 1(a)和图 1(b)分别给出了  $N_1 = 10360$  和  $N_2 = 8937$  时的模拟结果, 其中  $N_1$  和  $N_2$  分别为五结点和九结点 FDLBM 模型的迭代步数; 图 1(c)为解析解。从图中可以看出数值模拟结果与解析解有很好的 consistency。

为了进一步比较, 图 2 给出了  $x = 0.3$  处的解析解和数值解曲线以及两个 FDLBM 模型的绝对误差曲



**Figure 1.** Comparison between the numerical results and the exact solution of Laplace equation: (a) 5-bit FDLBM model; (b) 9-bit FDLBM model; (c) Exact solution

**图 1.** Laplace 方程的数值解与解析解的比较: (a) 五结点 FDLBM 模型; (b) 九结点 FDLBM 模型; (c) 解析解



**Figure 2.** (a) Comparison between numerical results and analytical solution at  $x = 0.3$ ; (b) The absolute errors of the two FDLBM models for Laplace equation at  $x = 0.3$

**图 2.** (a) Laplace 方程数值解和解析解在  $x = 0.3$  处的比较; (b) Laplace 方程两个 FDLBM 模型数值解在  $x = 0.3$  的绝对误差曲线

线。绝对误差  $Err = |u^N - u^E|$ ，其中  $u^N$  为数值解， $u^E$  为解析解。从图 2(a)中可以看出，FDLBM 模型与解析解吻合的很好；图 2(b)表明，九结点模型比五结点模型误差小，两个模型的误差都是可接受的。此外，表 1 给出了不同位置的解析解和数值解以及绝对误差。从表中可以看出，FDLBM 模型的误差是令人满意的。

**例 2:** 考虑下列齐次 Helmholtz 方程[5] [11]

$$\nabla^2 u = \lambda^2 u. \tag{19}$$

计算域为  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ 。边界条件与解析解相同，即

$$u(0, y) = \frac{\sinh \mu(1-y)}{\sinh \mu}, \quad u(1, y) = -\frac{\sinh \mu(1-y)}{\sinh \mu};$$

$$u(x, 0) = \cos \pi x, \quad u(x, 1) = 0.$$

在本文中， $\mu = \sqrt{\lambda^2 + \pi^2}$ ， $\lambda = 2$ 。该方程的解析解为

$$u(x, y) = \cos \pi x \frac{\sinh \mu(1-y)}{\sinh \mu}. \tag{20}$$

图 3(a)、图 3(b)和图 3(c)分别给出了五结点模型、九结点模型和解析解的计算结果，其中五结点模型和九结点模型的迭代步数分别为  $N_1 = 4321$  和  $N_2 = 3719$ 。除边界外，迭代的初值条件为  $u(x, y) = 0$ 。程

序终止的条件与例 1 相同。从图中可以发现，FDLBM 模型的模拟结果与解析解吻合的很好。

此外，图 4 和表 2 给出了 FDLBM 模型的计算结果与解析解的比较。格子数为  $100 \times 100$ ，松弛因子  $\tau = 0.99$ 。可以看出，两个模型的绝对误差都小于  $7.1 \times 10^{-4}$ ，FDLBM 模拟结果与解析解有较好的一致性。

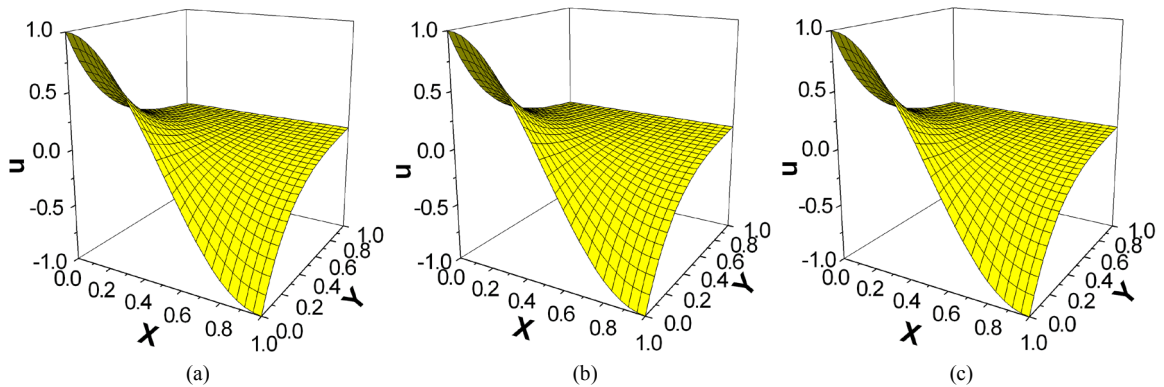
图 4 和表 2 表明，我们的模型可以用来模拟 Poisson 方程。

在两个数值例子中，松弛因子  $\tau$  都等于 0.99。在模拟过程中，我们发现  $\tau \in [0, 1]$ ；并且随着  $\tau$  的增大，数值结果更精确。

**Table 1.** The comparison between exact solution and LBM results and the absolute errors of the two models at  $x = 0.3$  for Laplace equation

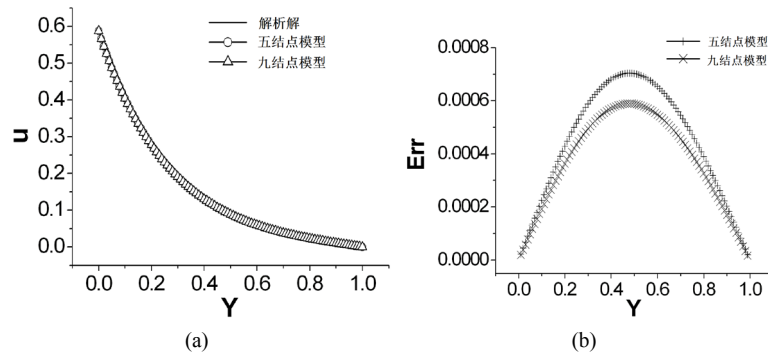
**表 1.** Laplace 方程  $x = 0.3$  处的解析解和 LBM 结果的比较以及两个模型的绝对误差

$y$	解析解	五结点模型	九结点模型	$E_m$ (五结点模型)	$E_m$ (九结点模型)
0.2	4.696902E-02	4.601930E-02	4.616745E-02	9.497181E-04	8.015707E-04
0.4	1.130988E-01	1.115642E-01	1.118012E-01	1.534604E-03	1.297601E-03
0.6	2.253665E-01	2.238407E-01	2.240709E-01	1.525804E-03	1.295596E-03
0.8	4.295711E-01	4.286378E-01	4.287722E-01	9.332895E-04	7.988811E-04



**Figure 3.** Comparison between the numerical results and the exact solution of Poisson equation: (a) 5-bit FDLBM model; (b) 9-bit FDLBM model; (c) Exact solution

**图 3.** Poisson 方程的数值解与解析解的比较：(a) 五结点 FDLBM 模型；(b) 九结点 FDLBM 模型；(c) 解析解



**Figure 4.** (a) Comparison between numerical results and analytical solution at  $x = 0.3$ ; (b) The absolute errors of the two FDLBM models for Laplace equation at  $x = 0.3$

**图 4.** (a) Laplace 方程数值解和解析解在  $x = 0.3$  处的比较；(b) Laplace 方程两个 FDLBM 模型数值解在  $x = 0.3$  的绝对误差曲线

**Table 2.** The comparison between exact solution and LBM results and the absolute errors of the two models at  $x = 0.3$  for Poisson equation

**表 2.** Poisson 方程  $x = 0.3$  处的解析解和 LBM 结果的比较以及两个模型的绝对误差

$y$	解析解	五结点模型	九结点模型	$E_r$ (五结点模型)	$E_r$ (九结点模型)
0.2	2.785282E-01	2.780996E-01	2.781648E-01	4.286170E-04	3.634095E-04
0.4	1.310715E-01	1.303903E-01	1.305002E-01	6.811917E-04	5.712956E-04
0.6	5.975582E-02	5.910169E-02	5.920795E-02	6.541312E-04	5.478710E-04
0.8	2.315299E-02	2.276313E-02	2.282591E-02	3.898609E-04	3.270805E-04

## 4. 结论

与以前的格子 Boltzmann 模型相比, 本文提出的模型优势是可以直接模拟定常问题, 不需要采用时间相关法。由于采用不含时间的格子 Boltzmann 方程, 使得算法清晰, 程序代码简单。

我们发现, 松弛因子被限定在  $[0,1]$  区间内, 这是由于迭代过程是松弛迭代, 而不是超松弛迭代。与经典格子 Boltzmann 模型不同, 本算法松弛因子在  $[0,1]$  区间是稳定的, 而在  $[1,2]$  区间不稳定。随着  $\tau$  的增大, 收敛被加速, 数值结果变得精确。

从计算结果中发现, 九结点模型比五结点模型误差小, 这是因为九结点模型包含了更多相邻结点的信息, 使得九结点模型是四阶精度而五结点模型是二阶精度。

## 基金项目

国家自然科学基金 No. 51406067, No. 11272133; 吉林省教育厅科研项目(吉教科合字[2016]第 141 号)。

## 参考文献 (References)

- [1] Chen, S.Y., Dawson, S.P., Doolen, G.D., Janecky, D.R. and Lawniczak, A. (1995) Lattice Methods and Their Applications to Reacting Systems. *Computers & Chemical Engineering*, **19**, 617-646. [https://doi.org/10.1016/0098-1354\(94\)00072-7](https://doi.org/10.1016/0098-1354(94)00072-7)
- [2] Zhang, J.Y. and Yan, G.W. (2015) Lattice Boltzmann Simulation of Pattern Formation under Cross-Diffusion. *Computers and Mathematics with Applications*, **69**, 157-169. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2014.11.016>
- [3] Zhang, J.Y. and Yan, G.W. (2014) Three Dimensional Lattice Boltzmann Model for the Complex Ginzburg-Landau Equation. *Journal of Scientific Computing*, **60**, 660-683. <https://doi.org/10.1007/s10915-013-9811-z>
- [4] Yan, G.W. (2000) A Lattice Boltzmann Equation for Waves. *Journal of Computational Physics*, **161**, 61-69. <https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6486>
- [5] Chai, Z.H. and Shi, B.C. (2008) A Novel Lattice Boltzmann Model for the Poisson Equation. *Applied Mathematical Modelling*, **32**, 2050-2058. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.06.033>
- [6] 王博宇, 闫广武. 用于求解 Poisson 方程的格子 Boltzmann 模型[J]. 吉林大学学报(理学版), 2015, 53(3): 407-413.
- [7] Xu, A.G. (2004) Finite-Difference Lattice-Boltzmann Methods for Binary Fluids. *Physical Review E*, **71**, Article ID: 066706. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.066706>
- [8] Guo, Z.L. and Zhao, T.S. (2005) Finite-Difference-Based Lattice Boltzmann Model for Dense Binary Mixtures. *Physical Review E*, **71**, Article ID: 026701. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.026701>
- [9] Cao, N.Z., Chen, S.Y., Jin, S. and Daniel, M. (1997) Physical Symmetry and Lattice Symmetry in the Lattice Boltzmann Method. *Physical Review E*, **55**, R21-R24. <https://doi.org/10.1103/physreve.55.r21>
- [10] Peng, G.W., Xi, H.W. and Comer, D. (1999) Finite Volume Scheme for the Lattice Boltzmann Method on Unstructured Meshes. *Physical Review E*, **59**, 4675-4682. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.59.4675>
- [11] Averbuch, A., Vozovoi, L. and Israeli, M. (1997) On a Fast Direct Elliptic Solver by a Modified Fourier Method. *Numerical Algorithms*, **15**, 287-313. <https://doi.org/10.1023/A:1019106223154>

**期刊投稿者将享受如下服务：**

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[ijfd@hanspub.org](mailto:ijfd@hanspub.org)