

# Unsteady Wave Evolution and Test Verification for Three-Dimensional Translating-Pulsating Source Green Function

Wenbin Xiao\*, Wei Liu, Xinghua Cheng, Yongxian Wang

College of Meteorology and Oceanology, National University of Defense Technology, Changsha Hunan  
Email: [hgxiaowb727@126.com](mailto:hgxiaowb727@126.com)

Received: Nov. 20<sup>th</sup>, 2018; accepted: Dec. 5<sup>th</sup>, 2018; published: Dec. 12<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

In order to investigate the characteristics of unsteady wave patterns for three-dimension translating-pulsating source Green function, a method with the combination of theoretical analysis and test verification is proposed in present paper. By adopting stationary-phase analysis method, the parametric equations of stationary-phase curves for far-field waves of Bessho-type translating-pulsating source Green function are derived. In the framework of frequency-domain theory, the steady shapes of unsteady wave patterns are obtained on the free surface. For the unsteady wave patterns such as ring-fan wave and ring wave, fan wave and outer-V wave and inner-V wave, the evolution laws of wave-pattern behavior are analyzed in detail. Based on the towing-tank test of two ship models advancing parallel in waves, wetness phenomena on the shipboard for a ship model is captured in typical operating condition and an estimation method of the propagation region of radiation-diffraction waves is given for the advancing ship in waves. The present paper demonstrates that the unsteady wave patterns of Bessho-type translating-pulsating source Green function are inclusive of two kinds: one kind is the circular wave pattern under the consideration of forward speed effect and the other kind is the Kelvin wave pattern with the harmonic pulsating effect taken into account. And the test observation of shipboard wetness verifies the correctness of far-field wave propagation for translating-pulsating source Green function primarily.

## Keywords

Translating-Pulsating Source, Unsteady Wave Patterns, Stationary-Phase Analysis Method, Model Test

---

# 三维移动脉动源非定常波系演变与试验验证

肖汶斌\*, 刘 巍, 程兴华, 王勇献

\*通讯作者。

国防科技大学气象海洋学院, 湖南 长沙  
Email: hgxiaowb727@126.com

收稿日期: 2018年11月20日; 录用日期: 2018年12月5日; 发布日期: 2018年12月12日

## 摘要

为探究三维移动脉动源格林函数的非定常波系特性, 本文建立了一套理论分析和试验验证相结合的研究方法。基于同相分析法, 推导了Bessho型三维移动脉动源格林函数远场波系的等相曲线族方程, 在频域理论框架内获得了自由面上移动脉动源非定常波系的稳态形式, 系统分析了环形-扇形波与环形波、扇形波与外侧楔形波以及内侧楔形波的演变规律。依托两船模在波浪中并行航行的水池拖曳试验, 捕捉了典型工况下模型舷间流体的舷侧上浪现象, 提出了波浪中有航速船模辐射-绕射波传播范围的估算方法。研究表明Bessho型移动脉动源格林函数的非定常波系主要包含计及航速移动效应的圆形波系和计及简谐脉动作用下的开尔文波系两大类, 并通过模型舷侧上浪观测初步验证了移动脉动源远场波系传播特征的正确性。

## 关键词

移动脉动源, 非定常波系, 同相分析法, 模型试验

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在频域范围内, 三维移动脉动源格林函数是针对有航速船舶在波浪中的水动力问题而提出的[1]。三维频域移动脉动源格林函数同时兼顾了航行速度和振荡频率对船体耦合水动力的影响, 其航速效应在线性自由面边界条件、物面边界条件、流场速度势的边界元积分方程、水动力系数和波浪作用力的数学表达式中均有体现, 数值模拟的船体自由面波形随着航速的增大向船后传播的特征愈加明显[2], 因此在处理有航速情形下的浮体水动力问题中具有一定的理论优势[3] [4]。

Haskind 型为三维移动脉动源格林函数的最初表达形式, 经过简化推导后来又出现了 Havelock 型[5]、Michell 型[6]和 Bessho 型[7]三种形式的移动脉动源格林函数。其中, Bessho 型格林函数的数学表达式各项均为初等函数形式, 且仅涉及单重积分, 在数值计算中具有比 Havelock 型和 Michell 型更加明显的优势。然而, 部分学者认为 Bessho 型移动脉动源格林函数的物理意义并不如上述两类格林函数明确[8]。分析可知, Havelock 型和 Michell 型格林函数的近场和远场扰动项分别对应于格林函数表达式的子项, 而 Bessho 型格林函数的近场和远场扰动项均耦合在整段积分区间内。开展 Bessho 型移动脉动源非定常波系的理论与试验研究不仅有利于其物理含义的明确, 而且对于深化理解船舶在波浪中的扰动波特性也十分有益。

## 2. Bessho 型移动脉动源格林函数

在无限水深之中, 假设移动脉动源以航行速度  $U$  作定深运动, 其脉动频率为  $\omega_e$ , 若源点  $q$  和场点  $p$  坐标分别为  $(\xi, \eta, \zeta)$  和  $(x, y, z)$ , 则 Bessho 型三维移动脉动源格林函数关于变量  $\theta$  的单重积分表达式

如下[9]:

$$G(p, q) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) - \frac{i}{2\pi} K_0 T(\omega) \quad (1)$$

式中:

$$T(\omega) = \int_{-\pi+\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\varphi-i\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1+4\tau \cos \theta}} \left[ k_2 \exp(k_2 \omega) - \operatorname{sgn} c \cdot k_1 \exp(k_1 \omega) \right] d\theta,$$

$$\left. \begin{matrix} r \\ r' \end{matrix} \right\} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z \mp \zeta)^2}, \quad \omega = Z + i(X \cos \theta + Y \sin \theta),$$

$$\left. \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \left( 1 + 2\tau \cos \theta \pm \sqrt{1 + 4\tau \cos \theta} \right), \quad K_0 = g/U^2,$$

$$\alpha = \begin{cases} \cos^{-1}(1/4\tau) & (4\tau > 1) \\ -i \cosh^{-1}(1/4\tau) & (4\tau < 1) \end{cases}, \quad \operatorname{sgn} c = \operatorname{sign}[\cos(\operatorname{Re}(\theta))],$$

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \epsilon = \sinh^{-1} \frac{|Z|}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \tau = U\omega_c/g,$$

$$X = K_0(x-\xi), \quad Y = K_0|y-\eta|, \quad Z = K_0(z+\zeta).$$

### 3. 同相分析法

移动脉动源格林函数的扰动项可分为近场和远场两部分。从物理角度分析,格林函数对空间流场扰动的数值贡献主要包含两类:一类扰动形式随着随动坐标系不发生变化,这与近场部分相对应;而另一类扰动形式与随动坐标系存在相对运动,该部分与远场部分相对应。如果观察者位于随动坐标系上,则所观察到的相对运动必定是以波的形式传播,因此格林函数的非定常波系与其远场扰动项相对应。

显然, Bessho 型移动脉动源格林函数的近场和远场扰动项均包含在  $T(\omega)$  之中。引入变量置换  $m = k_1 \cos \theta$  和  $M = \operatorname{sgn} c \cdot m$ , 可将移动脉动源扰动项  $T(\omega)$  转换为关于变量  $M$  的积分形式, 此时被积函数中的指数部分如下:

$$\Psi(M) = (m-\tau)^2 Z + i \cdot \left[ Xm + \operatorname{sgn} s \cdot Y \sqrt{(m-\tau)^4 - m^2} \right] \quad (2)$$

分析上式可知, Bessho 型移动脉动源格林函数沿积分路径的振荡幅度由  $\Psi(M)$  实部决定, 而  $\Psi(M)$  虚部表征振荡的相位信息, 故定义  $\Psi(M)$  虚部为相函数  $\psi(M)$ , 即

$$\psi(M) = Xm + \operatorname{sgn} s \cdot Y \sqrt{(m-\tau)^4 - m^2} \quad (3)$$

依据相函数的相位特性, 可对 Bessho 型移动脉动源格林函数中的近场和远场扰动项进行同相分析。相函数  $\psi(M)$  关于积分变量  $M$  的导数如下:

$$\frac{d\psi}{dM} = \operatorname{sgn} c \cdot \left[ X + \operatorname{sgn} s \cdot Y \frac{2(m-\tau)^3 - m}{\sqrt{(m-\tau)^4 - m^2}} \right] \quad (4)$$

在自由面内, 远场扰动项对应的非定常波系形态与  $X$  和  $Y$  密切相关, 令  $d\psi/dM = 0$ , 则可获得  $X$  和  $Y$  的相互关系如下:

$$\frac{X}{Y} = -\operatorname{sgn} s \cdot \frac{2(m-\tau)^3 - m}{\sqrt{(m-\tau)^4 - m^2}} \quad (5)$$

更进一步, 可获得非定常波系的等相曲线族参数方程如下:

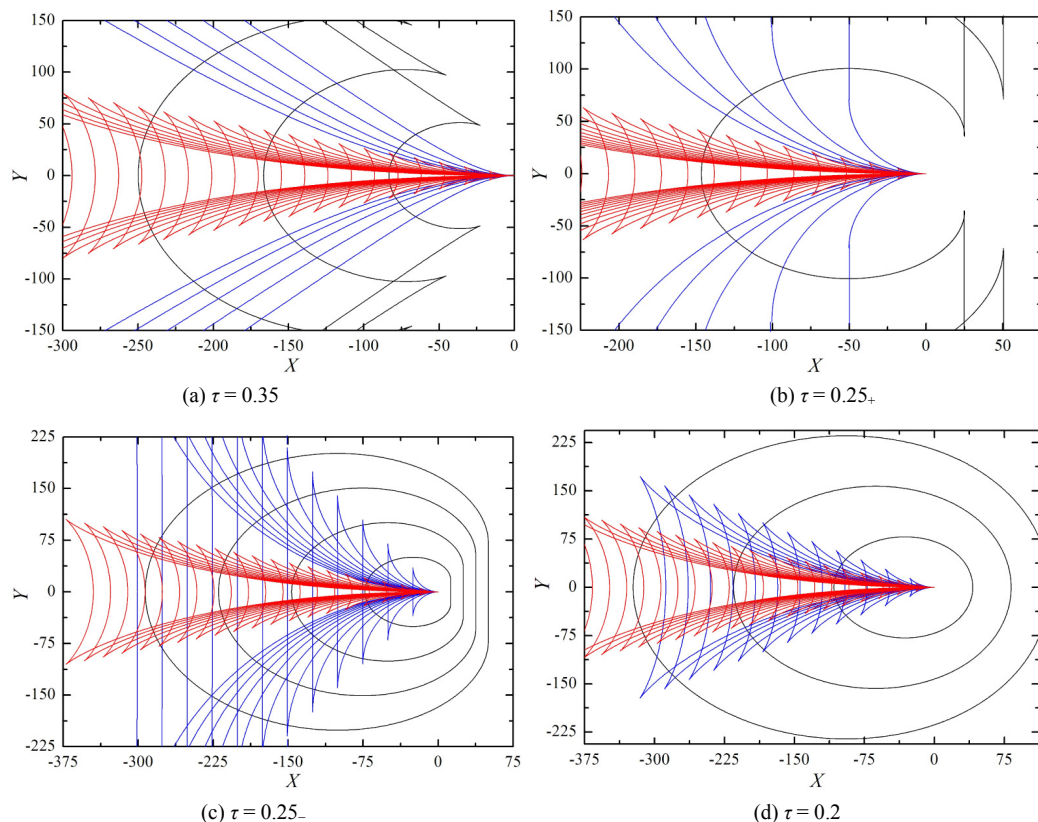
$$\begin{cases} X = \frac{2(m-\tau)^3 - m}{(m-\tau)^3(m+\tau)} \psi \\ Y = -\operatorname{sgn} s \cdot \frac{\sqrt{(m+\tau)^4 - m^2}}{(m-\tau)^3(m+\tau)} \psi \end{cases} \quad (6)$$

上述等相曲线族方程的物理含义为周期性相函数下非定常波系的稳态形式。分析式(6)可知, 水平面上源点和场点的不同相对位置可确定特定瞬时下的波形特征, 如波峰或波谷等。

#### 4. 移动脉动源非定常波系演变特性

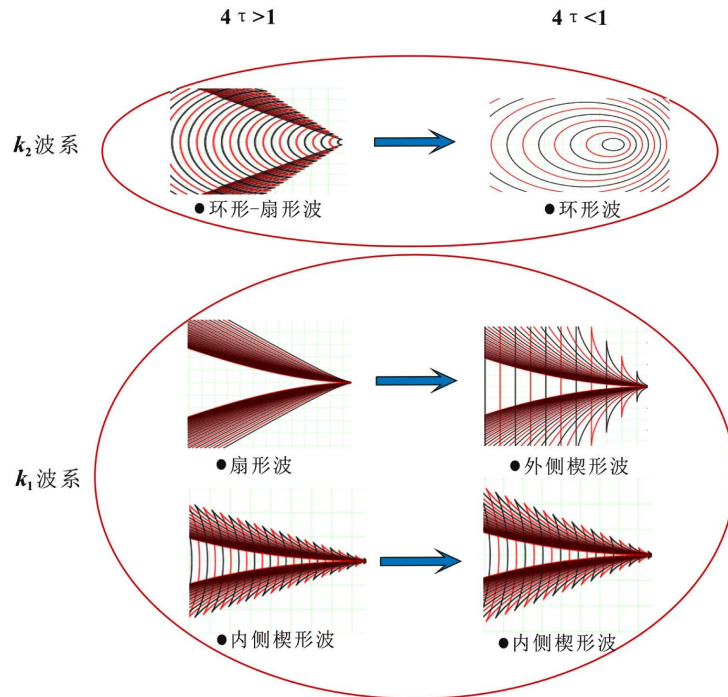
当三维移动脉动源的移动速度和脉动频率均为常数, 此时所获得的数值解应视为非定常流场作用下的频域稳态解。基于同相分析法的近场和远场扰动项分解仍是在频域理论框架内展开的, 因此由等相曲线族描述的非定常波系应为三维移动脉动源在远场传播波的稳态形式。

假设移动脉动源位于平面坐标系中的原点, 其移动方向指向  $ox$  轴的正向。在式(6)中, 令相函数  $\psi = 2n\pi, (n=1, 2, 3, \dots)$ , 则由变量  $m$  的不同取值区间可确定三组不同等值曲线族。图 1 给出了参数  $\tau = 0.35$ 、 $0.25_+$ 、 $0.25_-$ 、 $0.2$  时 Bessho 型移动脉动源格林函数的非定常波系等相线。



**Figure 1.** Unsteady wave patterns of Bessho form translating-pulsating source Green function versus  $\tau$   
**图 1.** Bessho 型移动脉动源在不同参数  $\tau$  下非定常波系形态

在物理含义上, 移动脉动源格林函数是点源一边移动且一边脉动在流场中所产生的速度势, 故该类格林函数所产生的远场波系必定不同于静水中定常移动源格林函数的开尔文波系和波浪中纯脉动源格林函数的圆形波系。依据变量  $\theta$  和  $M$  的积分表达式, 移动脉动源格林函数的非定常波系可分为两大类: 1) 计及航速移动效应的圆形波系, 即  $k_2$  波系; 2) 计及简谐脉动作用下的开尔文波系, 即  $k_1$  波系。图 2 给出了移动脉动源非定常波系形态的演变规律示意图。



**Figure 2.** Evolution of the unsteady wave patterns for Bessho form translating-pulsating source Green function  
**图 2.** Bessho 型移动脉动源格林函数非定常波系形态的演变

分析上图可知: 1) 当  $4\tau > 1$  时, 在自由面内存在三个不同波系, 分别为环形-扇形波、扇形波和内侧楔形波; 2) 当  $4\tau < 1$  时, 自由面内非定常波系的稳定形态演变为环形波、外侧楔形波和内侧楔形波; 3) 随着参数  $\tau$  的减小, 环形-扇形波退化为环形波, 扇形波的退化形式为外侧楔形波, 而内侧楔形波却一直存在; 4) 广义波数中的  $k_2$  对应着环形-扇形波和环形波, 而  $k_1$  对应着扇形波、外侧楔形波和内侧楔形波。

#### 4.1. 环形-扇形波与环形波

$k_2$  波系中的环形-扇形波(图 3)与环形波(图 4)均具有显著的圆形波特征, 这集中反映在点源的下游区域。上述两个波系的不同之处主要体现在: 环形波的等相线为封闭式的曲线, 且点源前方的环形波等相线明显比其下游稠密, 这与点源具有  $ox$  轴正向速度有关; 而环形-扇形波在其波系外缘已具有散波的形态。这里, 环形-扇形波的传播区域可利用该波系的边界与点源移动速度反方向的夹角来定义, 该夹角称之为半楔角, 显然环形波并不存在半楔角。随着参数  $\tau$  的增大, 环形-扇形波的半楔角逐渐变小, 且波系的波长表征出减小的趋势。在参数  $\tau = 0.25$  附近, 点源的前方出现了环形-扇形波或环形波的横波模态, 该横波的传播方向几乎与点源的速度方向平行。

#### 4.2. 扇形波与外侧楔形波

图 5 和图 6 分别为典型参数  $\tau$  下扇形波和外侧楔形波的波系形态。由图可知, 扇形波仅具有散波模

态，而外侧楔形波一直具有横波和散波的特征。与环形-扇形波和环形波相比，不同之处主要体现在扇形波和外侧楔形波均不可能出现在点源的前方。在波系的传播范围方面，当参数  $\tau$  接近于 0.25 时，扇形波和外侧楔形波的半楔角逐渐增大。

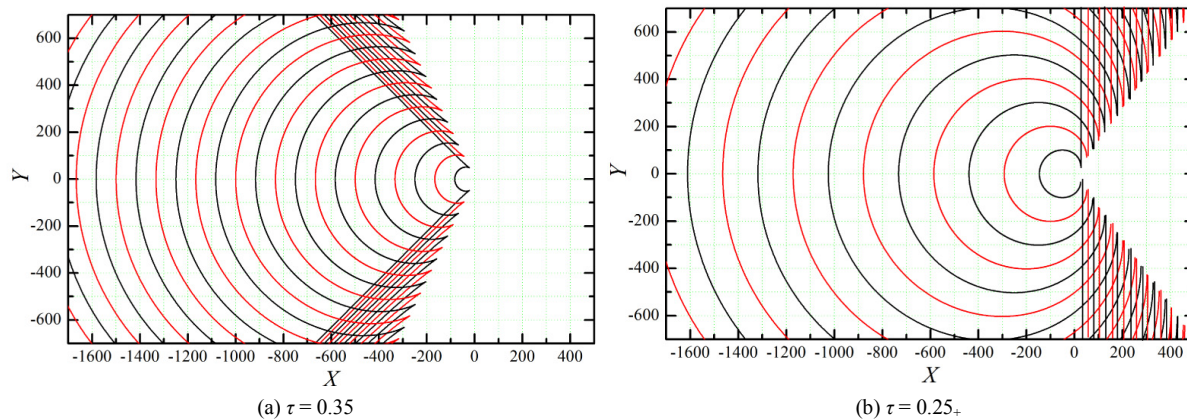


Figure 3. Ring-fan wave patterns

图 3. 环形-扇形波的波系形态

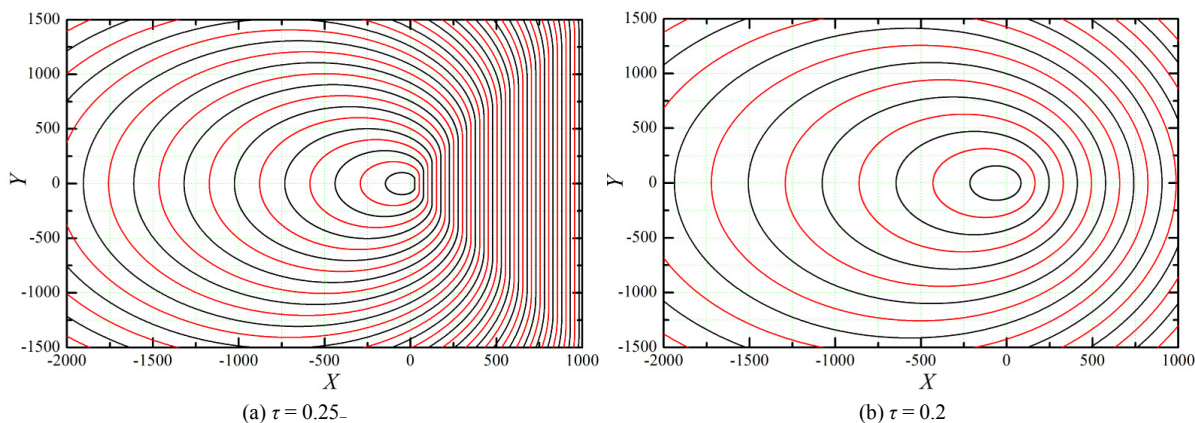


Figure 4. Ring wave patterns

图 4. 环形波的波系形态

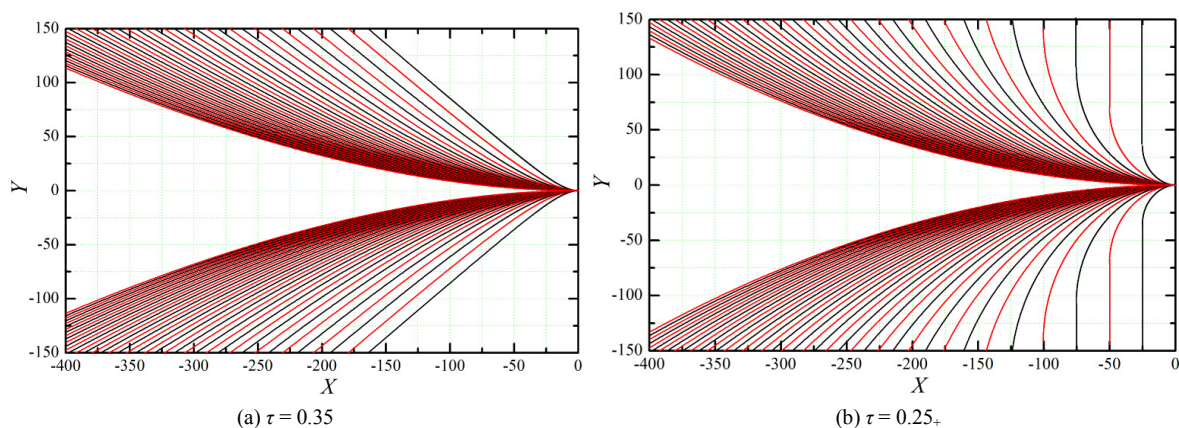


Figure 5. Fan wave patterns

图 5. 扇形波的波系形态

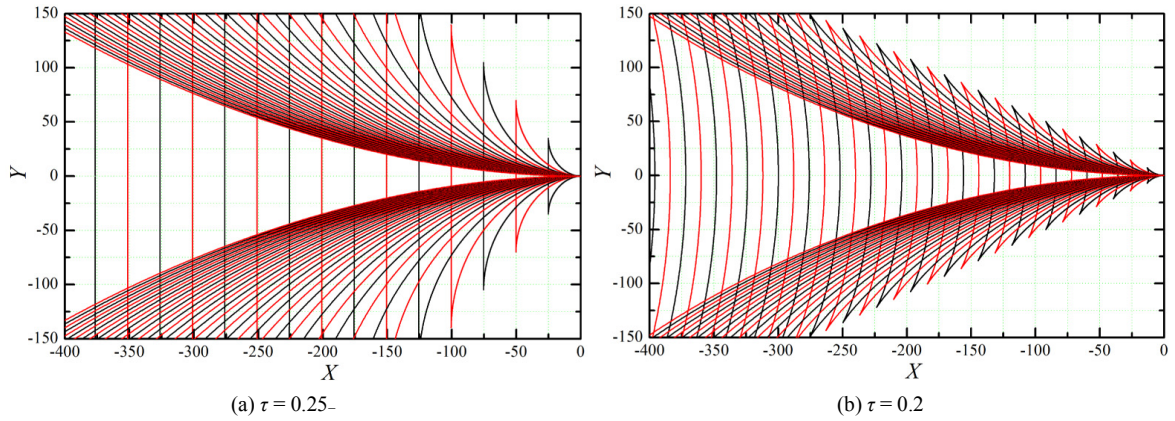


Figure 6. Outer-V wave patterns  
图 6. 外侧楔形波的波系形态

### 4.3. 内侧楔形波

无论参数  $\tau$  如何变化，内侧楔形波是一直存在的移动脉动源非定常波系形式，且具有横波和散波两种特征，详见图 7。随着点源移动速度和脉动频率的增大，该波系向后传播的特征越明显，具体表现为内侧楔形波的半楔角逐渐变小，然而该角度一直小于静水中开尔文波系的半楔角  $19.47^\circ$  [10]。与其他波系相比，内侧楔形波的半楔角在不同参数  $\tau$  范围内的变化并不剧烈，且一直限制在点源的下游区域传播。

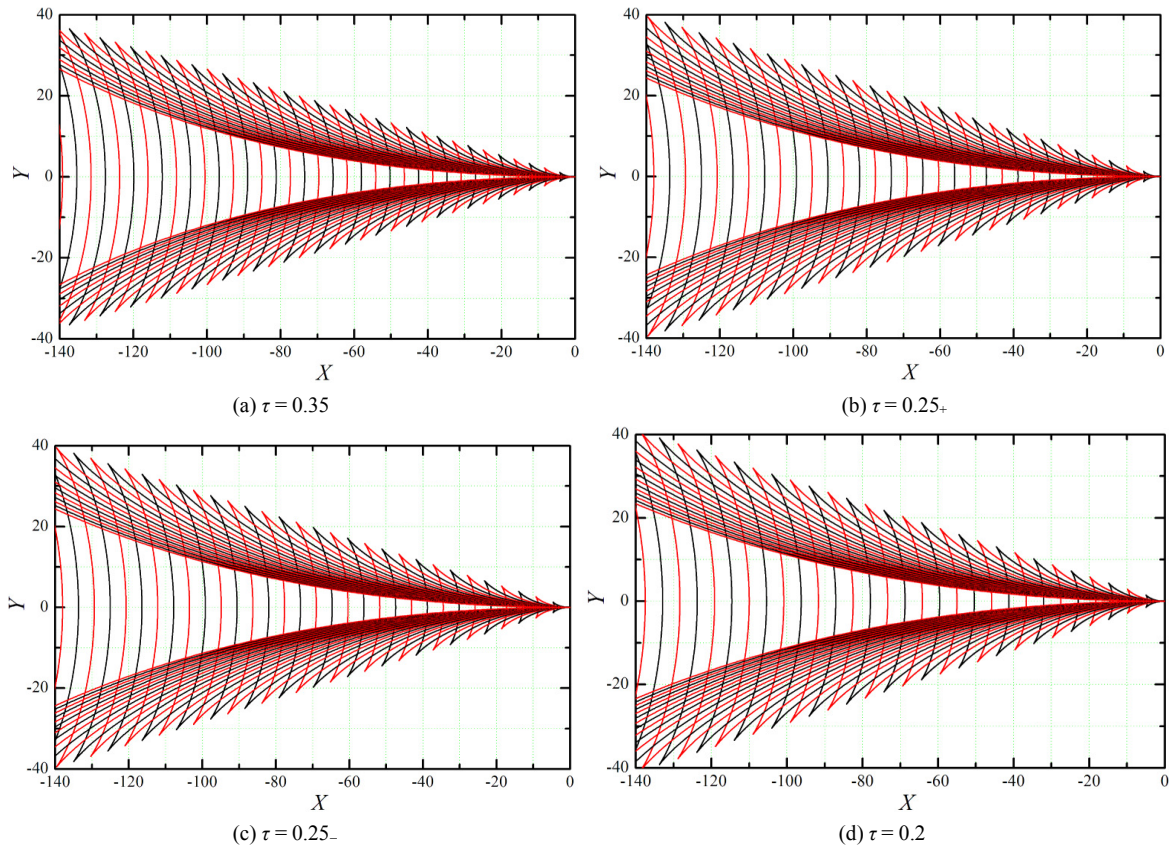


Figure 7. Inner-V wave patterns  
图 7. 内侧楔形波的波系形态

## 5. 基于船体舷侧上浪的试验波形观测

为验证移动脉动源格林函数的波系传播特征，依托两船水池模型拖曳试验，选取模型在波浪中顶浪并行航行的试验工况开展波形观测与分析。此处，船模的垂荡、横摇、纵摇运动保持自由状态，而横荡和艏摇模态保持完全约束状态，即两模型均处于半约束状态。以船 *b* 模型的左舷为观测对象，试验前对模型的各站位用彩笔进行了标识，试验时通过高分辨率相机可以清晰地捕捉到舷间流体拍击船 *b* 舷侧的具体位置，如图 8 所示。

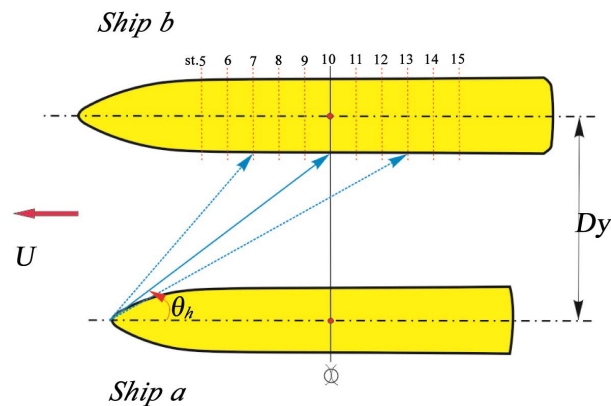


Figure 8. Sketch of the wetness on the shipboard for ship *b*  
图 8. 船 *b* 船体舷侧上浪示意图

两船舷间流体的非定常流动是入射波、两船运动所形成的辐射波以及两船船体遭遇入射波所形成的绕射波在舷间有限空间内相互耦合的结果，这里将因船体的存在而产生的波形统称为辐射 - 绕射波。两模型所产生的辐射 - 绕射波是在船体具有向前航行速度并遭遇入射来波条件下产生的，若忽略两船微幅的纵荡位移，并考虑到并行航行时船体水线长的变化并不大，则船 *a* 所对应的辐射 - 绕射波半楔角  $\theta_h$  可依据下式进行大致估算：

$$\tan \theta_h = \frac{D_y - \frac{B_b}{2}}{\frac{L_a}{2} - \frac{L_b}{20}(10 - st.)} \quad (7)$$

式中： $st.$  为船 *b* 的左舷侧受到船 *a* 辐射 - 绕射波拍击的大致站位号； $L_a$  和  $L_b$  分别为船 *a* 和船 *b* 的水线长， $B_b$  为船 *b* 的水线宽； $D_y$  为并行航行两船中纵剖面之间的距离，即横向间距。

水池试验时，两船模之间的横向间距保持为  $D_y = 0.372L_a$ ，速度傅汝德数为  $F_r = 0.175$ 、 $0.153$ ，且  $4\tau > 1$ 。图 9 为典型入射波波长条件下的试验现场观测照片。

分析上述水池拖曳试验工况可知，在一定航速和入射波条件下，船 *b* 模型的左舷侧受到明显的上浪现象，相同航速时舷侧上浪的位置随着波长的变短而向船艏方向移动。另外，通过对比试验分析可知，拍击船 *b* 舷侧的流体主要来源于船 *a* 的辐射波，因为在一般模半约束(船 *b*)与一般模全约束(船 *a*)试验中所观察到的船 *b* 舷侧拍击现象并不明显，这表明船 *a* 所产生的绕射波要小于其辐射波。

依托水池试验的观测结果，选取船 *a* 辐射 - 绕射波的外包络线来确定其半楔角  $\theta_h$  的大小，这里站位号  $st.$  的读数精确到 0.5 站。图 10 给出了依据式(7)所估算的船 *a* 辐射 - 绕射波半楔角，其中实线为理论计算所获得的单个 Bessho 型移动脉动源格林函数环形 - 扇形波半楔角大小，因为  $4\tau > 1$  时的扇形波和内侧楔形波总被包含在环形 - 扇形波的传播范围内，故可认为环形 - 扇形波的传播区域即为移动脉动源辐射 - 绕射波的传播范围。



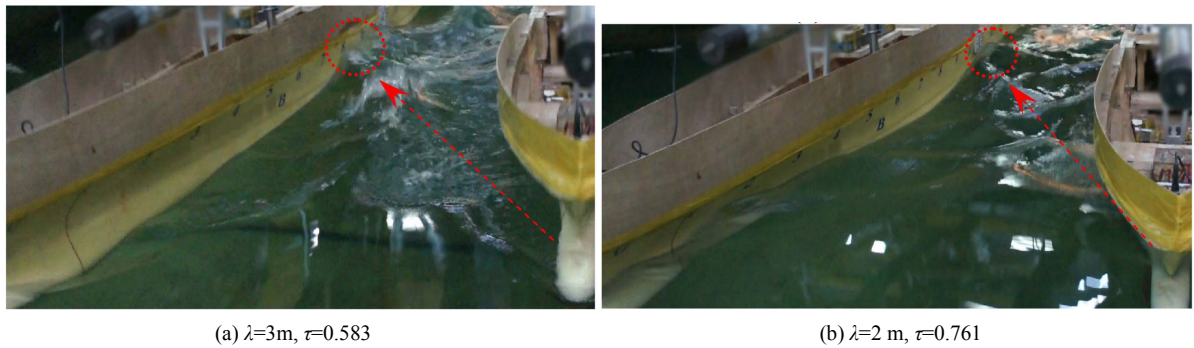


Figure 9. Typical photographs of the wetness on the shipboard for ship *b* at  $F_r = 0.153$

图 9. 船 *b* 船体舷侧上浪现象 ( $F_r = 0.153$ )

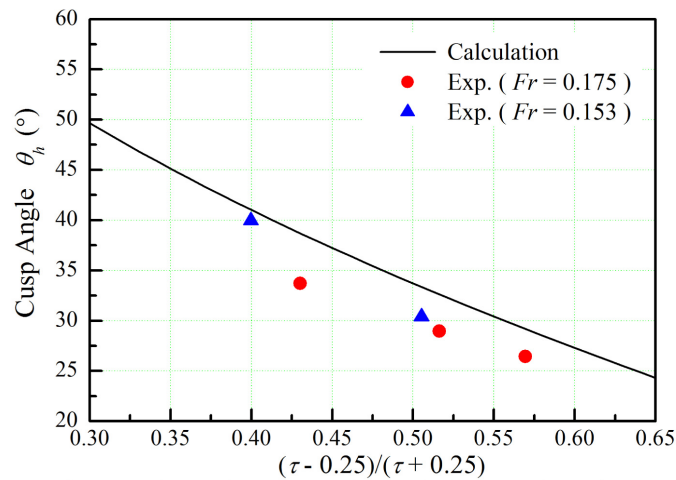


Figure 10. Experimental values of the radiation-diffraction waves for ship *a* and theoretical results of the ring-fan wave pattern of the translating-pulsating source

图 10. 船 *a* 辐射 - 绕射波半楔角的试验值与移动脉动源环形 - 扇形波半楔角的理论值

对比分析上图中半楔角的试验值与理论计算结果可知, 单个移动脉动源在自由面上的环形 - 扇形波与船体辐射 - 绕射波的传播范围是基本吻合的, 两者均随着参数  $\tau$  的增大而呈现逐渐减小的趋势。但试验观测值略小于理论计算结果, 这主要是对点源半楔角的推导是基于线性势流理论, 由于未计及粘性因素而忽略了流体微团之间的能量输运所导致的。

## 6. 结论

1) 针对 Bessho 型移动脉动源格林函数进行积分变换后, 采用同相分析法可获得非定常波系的等相曲线族方程; 随着航行速度和脉动频率的增大, 移动脉动源非定常波系向后方传播的特征愈加显著。

2) 波浪中两船模并行航行的水池拖曳试验结果表明船体辐射 - 绕射波的传播范围与移动脉动源的环形 - 扇形波是基本吻合的, 典型工况下的船体舷侧上浪观测初步验证了移动脉动源远场波系传播特征的正确性。

采用 Bessho 型移动脉动源格林函数为耐波性计算的积分内核函数时, 可认为在船体浸湿表面上布置有满足三维流场定解条件的若干强度点源。对于顶浪并行航行的两船模, 依据航行速度和入射波可确定参数  $\tau$  值的大小, 此时船体表面移动脉动源的传播模态均是一致的, 而点源与点源之间的波形差异主要反映在自由面的波幅上。结合试验现场波形观测的结果可知, 通过假定船体水线最前端处布置有一移动

脉动源来预报船体辐射 - 绕射波传播范围的方法是可行的, 这也进一步表明了 Bessho 型三维移动脉动源格林函数法在求解有航速两船水动力干扰问题中的适用性。

## 基金项目

国家自然科学基金项目(No. 51709267, No. 61702531), 国家重点研发计划项目(2016YFC1401800), 国防科技大学科研计划项目(ZK16-03-46)。

## 参考文献

- [1] Haskind, M.D. (1946) The Hydrodynamic Theory of Ship Oscillations in Rolling and Pitching. *Applied Mathematics and Mechanics*, **10**, 33-36.
- [2] Xu, Y. and Dong, W.C. (2013) Valid Hydrodynamic Interaction Regions of Multiple Ships Advancing in Waves. *Journal of Hydrodynamics*, **25**, 856-866. [https://doi.org/10.1016/S1001-6058\(13\)60433-3](https://doi.org/10.1016/S1001-6058(13)60433-3)
- [3] 洪亮, 朱仁传, 缪国平, 等. 三维频域有航速格林函数的数值计算与分析[J]. 水动力学研究与进展 A 辑, 2013, 28(4): 423-430.
- [4] Yuan, Z.M., Incecik, A. and Alexander, D. (2014) Verification of a New Radiation Condition for Two Ships Advancing in Waves. *Applied Ocean Research*, **48**, 186-201. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2014.08.007>
- [5] Havelock, T.H. (1958) The Effect of Speed of Advance upon the Damping of the Heave and Pitch. *Transactions Institution Naval Architects*, **100**, 131-135.
- [6] 缪国平, 刘应中, 杨勤正, 等. 三维移动脉动源的 Michell 型表达[J]. 中国造船, 1995(131): 1-11.
- [7] Bessho, M. (1977) On the Fundamental Singularity in the Theory of Ship Motions in a Seaway. *Memoirs of the Defense Academy of Japan*, **17**, 95-105.
- [8] Matao, T. (1992) 3D Green Function of Oscillating Body with Forward Speed on Water of Finite Depth. *Journal of Kansai Society of Naval Architects of Japan*, **217**, 67-75.
- [9] Yao, C.B. and Dong, W.C. (2016) Numerical Study on Local Steady Flow Effects on Hydrodynamic Interaction between Two Parallel Ships Advancing in Waves. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **66**, 129-144. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.02.007>
- [10] Fang, M.C., Yang, R.Y. and Shugan, I.V. (2011) Kelvin Ship Wake in the Wind Waves Field and on the Finite Sea Depth. *Journal of Mechanics*, **27**, 71-77. <https://doi.org/10.1017/jmech.2011.9>

### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2328-0557, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [ijfd@hanspub.org](mailto:ijfd@hanspub.org)