International Journal of Fluid Dynamics 流体动力学, 2022, 10(1), 1-8
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ijfd
https://doi.org/10.12677/ijfd.2022.101001

Burgers方程的一类三次有限体积元方法

何斯日古楞[1]，张　婷[2]，杨凯丽[2]

[1]呼和浩特民族学院，数学与大数据学院，内蒙古 呼和浩特
[2]内蒙古大学，数学科学学院，内蒙古 呼和浩特

收稿日期：2022年4月29日；录用日期：2022年5月18日；发布日期：2022年6月10日

摘　要

本文对Burgers方程的初边值问题，用最佳应力点构建对偶网格剖分，并基于分片三次Lagrange插值试探函数空间和分片常数检验函数空间，构造了Crank-Nicolson三次有限体积元格式并证明了数值解的L^2-模最优阶误差估计及其导数在最佳应力节点处的超收敛误差估计。最后，给出数值算例验证了理论分析结果以及所提格式的有效性。

关键词

Burgers方程，三次有限体积元法，收敛性分析

A Cubic Finite Volume Element Method for the Burgers Equation

Siriguleng He[1], Ting Zhang[2], Kaili Yang[2]

[1]School of Mathematics and Big Data, Hohhot Minzu College, Hohhot Inner Mongolia
[2]School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia

Received: Apr. 29th, 2022; accepted: May 18th, 2022; published: Jun. 10th, 2022

Abstract

In this paper, for the initial boundary value problem of the Burgers equation, the optimal stress point is used to construct a dual partition, and based on the trial function space of piecewise cubic Lagrange interpolation and the test function space of piecewise constant, the Crank-Nicolson cubic finite volume element scheme is constructed. And the L^2 norm optimal order error estimate of the numerical solutions and the super-convergence error estimate of the derivative at the optimal stress node are proved. Finally, numerical examples are given to verify the theoretical analysis results and the validity of the proposed scheme.

文章引用: 何斯日古楞, 张婷, 杨凯丽. Burgers 方程的一类三次有限体积元方法[J]. 流体动力学, 2022, 10(1): 1-8.
DOI: 10.12677/ijfd.2022.101001

Keywords

Burgers Equation, Cubic Finite Volume Element Method, Convergence Analysis

1. 引言

考虑如下 Burgers 方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \beta u_{xx}, & (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(a,t) = u(b,t) = 0, & t \in (0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega = (a,b)$，$[0,T]$ 为时间区间，T 为总时间，$\beta > 0$ 是黏性系数，$\varphi(x)$ 为初值函数，u 表示速度。

Burgers 方程是一类带有对流项和扩散项的非线性偏微分方程，可用来描述水波问题、弱激波传播、激波流问题、交通运输流与粘性介质中声波的传播等许多物理现象。此外，Burgers 方程也被用在描述物体流动的数学模型，例如传热、湍流、传质、环境和水资源污染等一些与流体力学相关的问题。带有特殊初边值条件的 Burgers 方程的解析解是可以求解。Hopf [1]和 Cole [2]分别指出，对于任意的初值条件，Burgers 方程能够被转化成可求精确解的线性齐次热方程。因此，原始 Burgers 方程的精确解能够表示成傅里叶展开形式。基于此，Benton 和 Platzman [3]讨论了一维 Burgers 方程的解析解。虽然能够得到傅里叶展开形式的精确解，但是这种解析解的收敛性较慢，需要相当长的序列才能得到高精度的逼近解。因此，仍需要有效数值方法来求解 Burgers 方程。文献[4]将四阶精细积分法与六阶紧致差分格式结合求解了改进 Hopf-Cole 变换所得一维热传导系统，再与分裂技术结合求解了多维 Burgers 系统。文献[5]将 θ 加权格式与 Sinc-Galerkin 法结合离散 Hopf-Cole 变换后的线性问题，并数值计算得到指数收敛结果。文献[6]采用 Hopf-Cole 变换构造了一种无条件稳定的隐式四阶紧致差分格式，并用数值算例检验了所提算法的有效性。文献[7]讨论了 Burgers 方程的有限体积元格式及其误差估计。文献[8]构造基于 Legendre-Gauss-Lobatto 节点的时空 Legendre 谱配置方法求解了 Burgers 方程初边值问题。文[9]对粘性 Burgers 方程的对流项和粘性项分别采用五阶精度加权紧致非线性格式(WCNS)格式和四阶中心差分格式计算，设计了一种高阶精度半隐式 WCNS 格式，再用三阶精度 IMEX RungeKutta 方法计算半离散系统，并给出了稳定性分析。数值结果表验证了所提格式的可行性和优势。文[10]用 Crank-Nicolson 格式和有限差分法分别离散一类空间分数阶 Buegers 方程的时间方向和空间方向，建立了一种时空均为二阶精度的守恒型差分格式。

本文首先用 Hopf-Cole 变换将 Burgers 方程初边值问题(1)转化成线性的其次热方程，再借助文献[11]的思想，构造了一种 Crank-Nicolson 三次有限体积元格式，并分析了格式的 L^2-模最优阶误差分析和最佳应力节点处导数的超收敛误差估计。

2. 三次有限体积元格式

Burgers 方程初边值问题(1)通过 Hopf-Cole 变换

$$u(x,t)=-2\beta\frac{w_x}{w},\tag{2}$$

被转化成具有 Neumann 边界条件的热传导方程

$$\begin{cases} w_t-\beta w_{xx}=0,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T], \\ w_x(a,t)=w_x(b,t)=0,\quad t\in(0,T], \\ w(x,0)=\exp\left(-\dfrac{1}{2\beta}\int_a^x\varphi(s)\mathrm{d}s\right),\quad x\in\Omega. \end{cases}\tag{3}$$

首先将区间 $\Omega=(a,b)$ 剖分成 $I_h=\bigcup_i\left[x_{3(i-1)},x_{3i}\right],(i=1,2,\cdots,M)$，再将每个子区间划分成步长为 h_i 的三等分小区间，并记节点为 $x_{3i-3}\le x_{3i-2}\le x_{3i-1}\le x_{3i}$，$h=\max\limits_{1\le i\le M}h_i$。其次，作 I_h 的对偶剖分 I_h^*。记 $x_{3i-\delta}=x_{3i}-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}h_i$，$x_{3i-\rho}=\dfrac{x_{3i-2}+x_{3i-1}}{2}$，$x_{3i-\eta}=x_{3i}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}h_i$。由文献[11] [12]可知，节点 $x_{3i-\delta},x_{3i-\rho},x_{3i-\eta}$ 是区间 $\left[x_{3(i-1)},x_{3i}\right],(i=1,2,\cdots,M)$ 上的三个最佳应力点。定义区间 $I_i^*=\left[x_{3i-\delta},x_{3i-\rho}\right]$，$I_i^{**}=\left[x_{3i-\rho},x_{3i-\eta}\right]$，$I_i^{***}=\left[x_{3i-\eta},x_{3(i+1)-\delta}\right](i=1,2,\cdots,M)$，其中令 $x_{3(M+1)-\delta}=x_{3M}$，$h_{M+1}=0$ 及 $I_0^{***}=\left[x_0,x_{3-\delta}\right]$，则 $I_h^*=\bigcup_i\left(I_i^*\cup I_i^{**}\cup I_i^{***}\right)$ 为 I_h 的一种对偶剖分。

在对偶单元 I_i^*,I_i^{**} 和 $I_i^{***},(1\le i\le M)$ 上分别积分(3)式，得

$$\begin{aligned} &\int_{I_i^*}w_t\mathrm{d}x-\beta\left[w_x\left(x_{3i-\rho},t\right)-w_x\left(x_{3i-\delta},t\right)\right]=0,i=1,2,\cdots,M, \\ &\int_{I_i^{**}}w_t\mathrm{d}x-\beta\left[w_x\left(x_{3i-\eta},t\right)-w_x\left(x_{3i-\rho},t\right)\right]=0,i=1,2,\cdots,M, \\ &\int_{I_i^{***}}w_t\mathrm{d}x-\beta\left[w_x\left(x_{3(i+1)-\delta},t\right)-w_x\left(x_{3i-\eta},t\right)\right]=0,i=1,2,\cdots,M-1, \\ &\int_{I_0^{***}}w_t\mathrm{d}x-\beta w_x\left(x_{3-\delta},t\right)=0,\int_{I_M^{***}}w_t\mathrm{d}x+\beta w_x\left(x_{3M-\eta},t\right)=0. \end{aligned}\tag{4}$$

基于剖分 I_n 和 I_n^*，分别定义试探函数空间和检验函数空间

$$S_h=\left\{u_h\in C\left(\bar{\Omega}\right)\cap H_0^1(\Omega):u_h\big|_e\in P_3(e),\forall e\in I_n\right\},$$
$$V_h=\left\{w_h\in L^2(\Omega):w_h\big|_{e^*}\in P_0\left(e^*\right),\forall e^*\in I_n^*\right\},$$

其中 P_k 表示分段 k 次多项式空间。

设 $\prod_h^*$ 是实验函数空间到检验函数的迁移算子，并记 $\phi_{3i-2}(x),\phi_{3i-1}(x),\phi_{3i}(x)$ 分别为 I_i^*,I_i^{**},I_i^{***} 上的特征函数，引入记号

$$\prod_h^*w_h=\sum_{i=1}^{M}\left(w_{3i-2}\phi_{3i-2}+w_{3i-1}\phi_{3i-1}+w_{3i}\phi_{3i}\right),\forall w_h\in S_h,$$
$$A\left(w,\prod_h^*v_h\right)=\sum_{i=1}^{M}\left[v_{3i-2}A\left(w,\phi_{3i-2}\right)+v_{3i-1}A\left(w,\phi_{3i-1}\right)+v_{3i}A\left(w,\phi_{3i}\right)\right],$$

其中

$$\begin{cases} A\left(w,\phi_{3i-2}\right)=\beta\left[w_x\left(x_{3i-\delta},t\right)-w_x\left(x_{3i-\rho},t\right)\right], \\ A\left(w,\phi_{3i-1}\right)=\beta\left[w_x\left(x_{3i-\rho},t\right)-w_x\left(x_{3i-\eta},t\right)\right], \\ A\left(w,\phi_{3i}\right)=\beta\left[w_x\left(x_{3i-\eta},t\right)-w_x\left(x_{3(i+1)-\delta},t\right)\right], \end{cases}\tag{5}$$

则积分形式(4)等价于求 $w\in H(\Omega)$ 使得

$$\begin{cases}\left(w_t,\Pi_h^* v_h\right)+A\left(w,\Pi_h^* v_h\right)=0,\ \forall v_h\in S_h,\\ w(x,0)=\exp\left(-\dfrac{1}{2\beta}\displaystyle\int_a^x\varphi(s)\mathrm{d}s\right),\ x\in\Omega.\end{cases} \tag{6}$$

设 N 为正常数，$k=\dfrac{T}{N}$ 为时间步长。记 $w^n=w(x,t_n)$，$(t_n=nk,0\le n\le N)$，$\overline{w}^n=\dfrac{w^n+w^{n-1}}{2}$，$\overline{\partial}_t w^n=\dfrac{w^n-w^{n-1}}{k}$。于是，问题(1)的 Crank-Nicolson 全离散格式：求 $W^n\in S_h$ 使得

$$\begin{cases}\left(\overline{\partial}_t W^n,\Pi_h^* v_h\right)+A\left(\overline{W}^n,\Pi_h^* v_h\right)=0,\ \forall v_h\in S_h,\\ W^0=w(x,0),\ x\in\Omega.\end{cases} \tag{7}$$

3. 误差分析

定义 1 [11] 试探函数空间 S_h 上的离散 L^2 范数和离散 H^1 半范数

$$\|u_h\|_{0,h}^2=\frac{3}{8}\sum_{i=1}^M h_i\left(u_{3i-3}^2+3u_{3i-2}^2+3u_{3i-1}^2+u_{3i}^2\right),\forall u_h\in S_h,$$

$$|u_h|_{1,h}^2=\sum_{i=1}^M\frac{1}{h_i}\left[\left(u_{3i-2}-u_{3i-3}\right)^2+\left(u_{3i-1}-u_{3i-2}\right)^2+\left(u_{3i}-u_{3i-1}\right)^2\right],\forall u_h\in S_h,$$

且离散范数 $|\cdot|_{1,h}$ 和 $\|\cdot\|_{0,h}$ 分别与 Sobolev 空间的连续范数 $|\cdot|_1$ 与 $\|\cdot\|_0$ 是等价的，即

$$|u_h|_{1,h}\le|u_h|_1\le\frac{9\sqrt{10}}{20}|u_h|_{1,h},\ 0.59\|u_h\|_{0,h}\le\|u_h\|_0\le1.16\|u_h\|_{0,h}. \tag{8}$$

定义 2 [11] 椭圆投影算子 $P_h:H^1(\Omega)\to S_h$，对于任意的 $w\in H^1(\Omega)$ 满足

$$A\left(P_h w,\Pi_h^* v_h\right)=A\left(w,\Pi_h^* v_h\right),\forall v_h\in S_h. \tag{9}$$

引理 1 [11] 对充分小的 h，$A\left(v,\Pi_h^* v\right)$ 是正定额，即存在正常数 σ 使得

$$A\left(v,\Pi_h^* v\right)\ge\sigma|v|_1^2,\forall v\in S_h.$$

引理 2 [11] 设 P_h 是由式(9)所定义的椭圆投影算子，则对 $\forall w\in H^5(\Omega)\cap H^1(\Omega)$ 有

$$|w-P_h w|_1\le Ch^3|w|_4,\quad \|w-P_h w\|_0\le Ch^4\|w\|_5,$$

$$\left\{\frac{1}{3M}\sum_{i=1}^M\left[\left((w-P_h w)_x\left(_{3i-\frac{3+\sqrt5}{2}}\right)\right)^2+\left((w-P_h w)_x\left(_{3i-\frac{3}{2}}\right)\right)^2+\left((w-P_h w)_x\left(_{3i-\frac{3-\sqrt5}{2}}\right)\right)^2\right]\right\}^{1/2}\le Ch^4|w|_5. \tag{10}$$

引理 3 [11] 对于任意的 $w_h,v_h\in S_h$，下列不等式成立

$$\left\|\Pi_h^* v_h\right\|_0\le2.9214\|v_h\|_0,$$

$$\left|\left(w_h,\Pi_h^* v_h\right)-\left(w_h,v_h\right)\right|\le\frac{0.0133068}{2\sigma}h^2\|w\|_{0,h}^2+\frac{\sigma}{2}|v|_{1,h}^2.$$

此处常数 σ 与引理 1 中的 σ 相同。

定理 1 设 $w(t_n)$ 和 W^n 分别是问题(1)和格式(7)的解，并 $k=O(h)$，则存在与剖分步长 h 和 k 无关的正常数 C，使得

$$\left\|w\left(t^n\right)-W^n\right\|_0 \le Ch^4\left(\left\|w^0\right\|_5+\int_0^{t_n}\left\|w_t\right\|_5 \mathrm{d}t\right)+Ck^2\left(\int_0^{t_n}\left\|w_{ttt}\right\|_0^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}, n=1,2,\cdots.$$

证 令 $w^n-W^n=w^n-P_h w^n+P_h w^n-W^n=\rho^n+\theta^n$。由引理 2 的误差估计可知

$$\left\|\rho^n\right\|_0 \le Ch^4\left\|w\right\|_4 \le Ch^4\left(\left\|w^0\right\|_5+\int_0^{t_n}\left\|w_t\right\|_5 \mathrm{d}t\right). \tag{11}$$

在式(6)中分别令 $t=t_n$， $t=t_{n-1}$ 并与式(7)相减，再结合定义 2，得误差方程

$$\left(\overline{\partial}_t\theta^n,\Pi_h^* v_h\right)+A\left(\overline{\theta}^n,\Pi_h^* v_h\right)=-\left(\overline{\partial}_t\rho^n+r_1,\Pi_h^* v_h\right),\forall v_h\in S_h, \tag{12}$$

其中 $r_1=\overline{w_t}^n-\overline{\partial}_t w^n$，且由泰勒展开知

$$\left\|r_1\right\|_0 \le Ck\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left\|w_{ttt}\right\|_0 \mathrm{d}t.$$

式(12)中取 $v_h=\overline{\theta}^n$，并将第一项分解为

$$\left(\overline{\partial}_t\theta^n,\Pi_h^*\overline{\theta}^n\right)=\left(\overline{\partial}_t\theta^n,\overline{\theta}^n\right)+\left(\overline{\partial}_t\theta^n,\Pi_h^*\overline{\theta}^n-\overline{\theta}^n\right)=T_1+T_2,$$

则由引理 3 有

$$\left|T_2\right| \le \frac{0.0133068}{2\sigma}h^2\left\|\overline{\partial}_t\theta^n\right\|_{0,h}^2+\frac{\sigma}{2}\left|\overline{\theta}^n\right|_{1,h}^2. \tag{13}$$

另一方面，

$$T_1=\frac{2}{3}\left(\overline{\partial}_t\theta^n,\overline{\theta}^n\right)+\frac{1}{3}\left(\overline{\partial}_t\theta^n,\overline{\theta}^n\right)=T_{11}+T_{12}, \tag{14}$$

其中

$$T_{12}=\frac{1}{3}\left(\overline{\partial}_t\theta^n,\overline{\theta}^n\right)=\frac{k}{6}\left\|\overline{\partial}_t\theta^n\right\|_{0,h}^2+\frac{1}{3}\left(\overline{\partial}_t\theta^n,\theta^{n-1}\right). \tag{15}$$

此外

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left(\overline{\partial}_t\theta^n,\theta^{n-1}\right)&=-\frac{1}{6k}\left(\theta^n-\theta^{n-1},\theta^n-\theta^{n-1}\right)+\frac{1}{6k}\left[\left(\theta^n,\theta^n\right)-\left(\theta^{n-1},\theta^{n-1}\right)\right]\\&\le\frac{1}{6k}\left[\left(\theta^n,\theta^n\right)-\left(\theta^{n-1},\theta^{n-1}\right)\right].\end{aligned} \tag{16}$$

假设 $k=O\left(h^2\right)$，并用引理 1、引理 3 和 Cauchy-Schwarz 不等式以及式(13)~(16)，得

$$\frac{1}{6k}\left[\left\|\theta^n\right\|_0^2-\left\|\theta^{n-1}\right\|_0^2\right]+\frac{\sigma}{2}\left|\overline{\theta}^n\right|_1^2 \le \left\|\overline{\partial}_t\rho^n\right\|_0^2+\left\|r_1\right\|_0^2+C\left\|\theta^n\right\|_0^2+C\left\|\theta^{n-1}\right\|_0^2. \tag{17}$$

式(17)对 n 从 1 到 m，$\left(m\le N\right)$ 求和，并用 Gronwall 引理可得

$$\left\|\theta^n\right\|_0 \le Ch^4\left(\left\|w^0\right\|_5+\int_0^{t_m}\left\|w_t\right\|_5 \mathrm{d}t\right)+Ck^2\left(\int_0^{t_m}\left\|w_{ttt}\right\|_0 \mathrm{d}t\right)^{1/2}. \tag{18}$$

最后，将式(11)和式(18)与三角不等式结合，可得定理结论，证毕。

定理 2 设 $w\in H^5(\Omega)\cap H^1(\Omega)$ 和 $W\in S_h$ 分别是问题(3)和格式(7)的解，则 $e^n=w^n-W^n$ 在最佳应力点处导数具有误差估计

$$\left\{\frac{1}{3M}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(e_x^n\left(x_{3i-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)\right)^2+\left(e_x^n\left(x_{3i-\frac{3}{2}}\right)\right)^2+\left(e_x^n\left(x_{3i-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)\right)^2\right]\right\}^{1/2}$$
$$\le Ch^4\left(\left\|w^0\right\|_5+\int_0^{t_n}\left\|w_t\right\|_5\mathrm{d}t\right)+Ck^2\left(\int_0^{t_n}\left\|w_{ttt}\right\|_0\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

证 令

$$L_\rho=\left\{\frac{1}{3M}\sum\left[\left(\left(w^n-P_hw^n\right)_x\left(_{3i-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)\right)^2+\left(\left(w^n-P_hw^n\right)_x\left(_{3i-\frac{3}{2}}\right)\right)^2+\left(\left(w^n-P_hw^n\right)_x\left(_{3i-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)\right)^2\right]\right\}^{1/2},$$

则由引理 2 知

$$L_\rho\le Ch^4\left|w^n\right|_5. \tag{19}$$

令

$$L_\theta=\left\{\frac{1}{3M}\sum\left[\left(\left(P_hw^n-W^n\right)_x\left(x_{3i-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)\right)^2+\left(\left(P_hw^n-W^n\right)_x\left(x_{3i-\frac{3}{2}}\right)\right)^2+\left(\left(P_hw^n-W^n\right)_x\left(x_{3i-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)\right)^2\right]\right\}^{1/2}.$$

根据逆估计有 $\left|\left(P_hw^n-W^n\right)_x\left(x_{3i-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)\right|\le Ch^{-\frac{1}{2}}\left|P_hw^n-W^n\right|_{1,[x_{3i-3},x_{3i}]}$，并由剖分的拟均匀性，假定 $\frac{1}{M}=O(h)$，于是当 $u\in H^5(\Omega)\cap H^1(\Omega)$，有

$$L_\theta^2\le\frac{1}{M}Ch^{-1}\sum_{i=1}^{M}\left|P_hw^n-W^n\right|_{1,[x_{3i-3},x_{3i}]}^2\le C\left|P_hw^n-W^n\right|_1^2. \tag{20}$$

另一方面，由式(17)和式(18)得

$$\left|\theta^n\right|_1^2\le Ch^8\left(\left\|w^0\right\|_5+\int_0^{t_n}\left\|w_t\right\|_5\mathrm{d}t\right)^2+Ck^4\int_0^{t_n}\left\|w_{ttt}\right\|_0^2\mathrm{d}t. \tag{21}$$

最后，结合式(19)~(21)，可得定理结论。证毕。

4. 数值算例

问题(1)中取 $(x,t)\in[0,1]\times[0,1]$，$\beta=0.02$，此时，问题(1)和问题(3)的精确解和初始值分别为 $u(x,t)=2\beta\pi\mathrm{e}^{-\pi^2\beta t}\sin(\pi t)\big/\left(2+\mathrm{e}^{-\pi^2\beta t}\cos(\pi x)\right)$，$u(x,0)=2\beta\pi\sin(\pi x)\big/\left(2+\cos(\pi x)\right)$，$w(x,t)=2+\mathrm{e}^{-\pi^2\beta t}\cos(\pi x)$，$w(x,0)=2+\cos(\pi x)$.

在数值计算中，取时空步长比例为 $k=h^2$。在均匀网格下，首先用格式(7)求得数值解在剖分节点值向量 $\boldsymbol{W}^n$，并用五点差分格式求得其导数 $\boldsymbol{W}_x^n$，再用 Hopf-Cole 变换计算出数值解向量 $\boldsymbol{U}^n=-2\beta\frac{\boldsymbol{W}_x^n}{\boldsymbol{W}^n}$，进而可求得 $u(x,t^n)$ 的数值解 $U^n(x)$。所得结果见表 1，其中误差记号

$$E_{osp}(h)=\left\{\frac{1}{3M}\sum_{i=1}^{M}\left[\left(\left(u_x-U_x\right)\left(x_{3i-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)\right)^2+\left(\left(u_x-U_x\right)\left(x_{3i-\frac{3}{2}}\right)\right)^2+\left(\left(u_x-U_x\right)\left(x_{3i-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)\right)^2\right]\right\}^{1/2},$$

Table 1. The error and convergence order of the numerical example that calculated by using the scheme
表 1. 用格式数值计算算例的误差和收敛阶

h	$E_u(h)$	r_u	$E_{osp}(h)$	r_{osp}
1/4	9.7754e−06	—	2.5937e−04	—
1/8	3.9703e−07	4.6218	1.4098e−05	4.2015
1/16	2.2412e−08	4.1469	7.1814e−07	4.2950
1/32	1.3805e−09	4.0209	54.4849e−08	4.0011

和 $E_u(h)=\left\|u(T,x)-U^N\right\|_0$ 以及收敛阶记号 $r_u=\log_2\left[E_u(h)/E_u(h/2)\right]$ 和 r_{osp}，分别表示超收敛点处导数的平均误差和数值解的 L^2-模误差及相应收敛阶。表中数据表明，当时空剖分步长比例取 $k=h^2$ 时数值解和其导数在最佳应力点处的收敛阶均接近四阶，与本文理论分析相吻合。

5. 结论

针对一维 Burgers 方程初边值问题，本文先用 Hopf-Cole 变换将原问题转化成具有 Neumann 边界条件的热传导方程问题，再基于 Lagrange 插值多项式的最佳应力点构建了一种 Crank-Nicolson 三次有限体积元格式，并详细推导了格式的误差估计。理论分析表明格式具有 L^2-模 $O\left(k^2,h^4\right)$ 阶最优误差估计且数值解导数在最佳应力点处具有 $O\left(k^2,h^4\right)$ 阶超收敛估计。数值实验验证了该方法的有效性和理论分析结果，并且数值结果表明本文方法拥有较高的计算精度。

基金项目

呼和浩特民族学院校级科学研究项目(HM-ZD-202101)资助。

参考文献

[1] Hopf, E. (1950) The Partial Difference Equation $u_t+uu_x=\mu u_{xx}$. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **3**, 201-230. https://doi.org/10.1002/cpa.3160030302

[2] Cole, J.D. (1951) On a Quasilinear Parabolic Equations Occurring in Aerodynamics. *Quarterly of Applied Mathematics*, **9**, 225-236. https://doi.org/10.1090/qam/42889

[3] Benton, E.R. and Platzman, G.W. (1972) A Table of Solutions of the One-Dimensional Burgers' Equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, **30**, 195-212. https://doi.org/10.1090/qam/306736

[4] Chen, C.K., Zhang, X.H. and Liu, Z. (2020) A High-Order Compact Finite Difference Scheme and Precise Integration Method Based on Modified Hopf-Cole Transformation for Numerical Simulation of N-Dimensional Burgers' System. *Applied Mathematics and Computation*, **372**, Article ID: 125009. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.125009

[5] 杨梅，赵凤群，郭冲. 基于 Hopf-Cole 变换的 Burgers 方程初边值问题的 Sinc-Galerkin 法[J]. 计算力学学报, 2019, 36(6): 807-812.

[6] 高巍，张宝，李宏，刘洋. Burgers 方程的高阶紧致有限体积解法[J]. 应用数学, 2016, 29(2): 331-339.

[7] Sheng, Y. and Zhang, T. (2018) The Finite Volume Method for Two-Dimensional Burgers' Equation. *Personal and Ubiquitous Computing*, **22**, 1133-1139. https://doi.org/10.1007/s00779-018-1143-4

[8] 宋健，王天军，霍金键. Burgers 方程的时空 Legendre 谱配置方法[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4), 1380-1386. https://doi.org/10.12677/AAM.2021.104147

[9] 陈勋，蒋艳群，陈琦，张旭，胡迎港. 粘性 Burgers 方程的高阶精度半隐式 WC-NS 方法[J]. 数值计算与计算机应用, 2022, 43(1): 77-87.

[10] 胡婷，傅毛里. 一类空间分数阶 Burgers 方程守恒型差分方法[J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 219-223. https://doi.org/10.12677/AAM.2022.111027

[11] Gao, G.H. and Wang, T.K. (2010) Cubic Superconvergent Finite Volume Element Method for One-Dimensional Ellip-

tic and Parabolic Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **233**, 2285-2301. https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.10.013

[12] Yu, C.H. and Li, Y.H. (2011) Biquadratic Finite Volume Element Methods Based on Optimal Stress Points for Parabolic Problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **236**, 1055-1068. https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.07.030