

变温场诱导相分离的格子Boltzmann数值模拟

李阳贵^{1,2}, 黄笑冲³, 梁大成^{4*}

¹岭南师范学院数学与统计学院, 广东 湛江

²中国科学院深圳先进技术研究院合成生物研究所, 广东 深圳

³湛江市爱周高级中学, 广东 湛江

⁴广东茂名幼儿师范专科学校数学系, 广东 茂名

收稿日期: 2022年11月7日; 录用日期: 2022年11月21日; 发布日期: 2022年12月9日

摘要

相分离是环境条件发生变化导致原来混合流体分离出两相或多相的不稳定倾向和过程, 是多相流研究的核心内容之一。本文采用自由能格子Boltzmann模型, 将流体黏度与温度变化过程耦合, 研究二元混合流体在温度变化条件下的相分离行为。

关键词

相分离, 格子Boltzmann方法, 自由能模型

Lattice Boltzmann Numerical Simulation of Phase Separation Induced by Variable Temperature Field

Yanggui Li^{1,2}, Xiaochong Huang³, Dacheng Liang⁴

¹School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang Guangdong

²Institute of Synthetic Biology, Shenzhen Institute of Advanced Technology, Chinese Academy of Sciences, Shenzhen Guangdong

³Aizhou Senior High School of Zhanjiang, Zhanjiang Guangdong

⁴Department of Mathematics, Guangdong Preschool Normal College in Maoming, Maoming Guangdong

Received: Nov. 7th, 2022; accepted: Nov. 21st, 2022; published: Dec. 9th, 2022

*通讯作者。

文章引用: 李阳贵, 黄笑冲, 梁大成. 变温场诱导相分离的格子 Boltzmann 数值模拟[J]. 流体动力学, 2022, 10(4): 56-65. DOI: 10.12677/ijfd.2022.104006

Abstract

Phase separation is an unstable tendency and process of separating two or more phases from the original mixed fluids due to the change in environmental conditions. It is one of the core contents in the study of multiphase fluids. In this paper, the phase separation behavior of binary fluids under the change of temperature is studied by the free-energy lattice Boltzmann model coupling the fluid viscosity and temperature.

Keywords

Phase Separation, Lattice Boltzmann Method, Free Energy Model

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

变温场相分离是二元流体许多理论和工业生产研究的重要课题[1] [2] [3] [4] [5]。在很多科学研究和实际工程中, 要求以受控方式进行相分离过程, 以创建规则结构。例如, 在二元合金[6]中, 慢冷却用于产生不同材料交替带的最佳序列。在聚合物混合物中, 分层形态应通过适当的热驱动进行控制[7] [8]。目前, 变温场诱导相分离的研究仍然十分活跃, 并且应用于材料、化学以及生物学等领域[9] [10] [11] [12]。一些学者已经对相分离问题进行了数值模拟研究, 包括使用有限差分法、有限体积法等传统数值方法。近年来, 随着格子 Boltzmann 方法(LBM)的发展, 该方法也被应用于研究相分离问题。格子 Boltzmann 方法是一种介观方法, 能够刻画更多的物理细节。此外, 与传统数值方法相比, LBM 具有数值优势, 例如算法设计简单, 易于编程以及能够处理复杂的边界等。本文建立了一个耦合流体黏度与温度变化过程的格子 Boltzmann 模型来模拟二元混合流体在冷边界条件下的相分离, 并进一步阐明相分离的形成与发展机理。

2. 相离分数学模型

2.1. 耦合温度与粘度的多相模型

对于二元混合流体, 以总密度 ρ 、浓度差 ϕ 表示的质量和动量守恒方程[13], 和宏观对流扩散方程, 其形式如下

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{u} \bar{u}) = -\nabla P_{\alpha\beta} + \eta_{mix} \nabla^2(\rho \bar{u}) + \nabla(\lambda(\rho) \nabla(\rho \bar{u})) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla(\phi \bar{u}) = \Gamma \theta \nabla^2 \delta \mu - \theta \nabla \left(\frac{\phi}{\rho} \nabla P_{\alpha\beta} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(T \bar{u}) = \nabla \cdot (D_{mix} \nabla T) + F \quad (4)$$

式中, $P_{\alpha\beta}$ 、 \bar{u} 、 η_{mix} 、 $\lambda(\rho)$ 、 $\Gamma\theta$ 、 D_{mix} 和 F 分别是二元流体中混合物的压力张量、速度、混合运动粘度、体粘度、宏观迁移率、热扩散率和外力[14]。结果表明, 参数 Γ 是与两相流体流动性相关的系数, θ 是宏观输运系数[15] [16]。本文将宏观迁移率参数 $\Gamma\theta$ 设为 0.2, 以获得数值稳定性。混合粘度 η_{mix} 和热扩散系数 D_{mix} 可以写为

$$\eta_{mix} = \eta_A \cdot \frac{\rho + \varphi}{2\rho} + \eta_B \cdot \frac{\rho - \varphi}{2\rho} \quad (5)$$

$$D_{mix} = D_A \cdot \frac{\rho + \varphi}{2\rho} + D_B \cdot \frac{\rho - \varphi}{2\rho} \quad (6)$$

其中, D_A 、 D_B 和 η_A 、 η_B 分别是组分 A 和 B 的热扩散系数和初始粘度。二元体系的温度依赖粘度 η [17] 由下式确定

$$\eta = \frac{\eta_{mix}}{1 + \beta(T - T_\infty)} \quad (7)$$

其中 T_∞ 是初始温度。温度粘度系数 β 是恒定的, 取决于流体的热性质, 它表示与温度相关的粘度灵敏度。这里值得一提的是, 当 $\beta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow \eta_{mix}$ (常数)。还需要注意的是, β 对于液体为正, 对于气体为负。宏观方程式(2)修改为

$$\frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial t} + \nabla(\rho\bar{u}\bar{u}) = -\nabla P_{\alpha\beta} + \eta_{mix} \nabla^2(\rho\bar{u}) + \nabla(\lambda(\rho)\nabla(\rho\bar{u})) - \nabla\left(\frac{\eta_{mix}\beta(T - T_\infty)}{1 + \beta(T - T_\infty)}\nabla(\rho\bar{u})\right) \quad (8)$$

这些方程描述了非均匀温度系统的动力学。

通过压力张量 $P_{\alpha\beta}$ 和化学势差 $\delta\mu$ [14] [15], 混合物的热力学由自由能确定:

$$\psi = \int \left(\phi(T, \rho, \varphi) + \frac{\kappa}{2}(\nabla\rho)^2 + \frac{\kappa}{2}(\nabla\varphi)^2 \right) \quad (9)$$

温度 T 下的体自由能密度为

$$\phi(T, \rho, \varphi) = \frac{\lambda}{4}\rho \left(1 - \frac{\varphi^2}{\rho^2} \right) - T\rho + \frac{T}{2}(\rho + \varphi) \ln\left(\frac{\rho + \varphi}{2}\right) + \frac{T}{2}(\rho - \varphi) \ln\left(\frac{\rho - \varphi}{2}\right) \quad (10)$$

其中 λ 是二元液体的相互作用强度, κ 是界面宽度。当温度 T 降至 $T_c = \frac{\lambda}{2}$ 时, 混合流体被分为两个相, 密度差为 $\pm\varphi$ 。化学势差和压力张量[18]为

$$\delta\mu(\varphi, \rho, T) = -\frac{\lambda}{2}\frac{\varphi}{\rho} + \frac{T}{2}\ln\left(\frac{\rho + \varphi}{\rho - \varphi}\right) - \kappa\nabla^2\varphi - \kappa T \left(\nabla\varphi\nabla\frac{1}{T} \right) \quad (11)$$

和

$$P_{\alpha\beta} = p_0\delta_{\alpha\beta} + \kappa \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_\alpha} \frac{\partial\rho}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta} \right) \quad (12)$$

其中

$$p_0 = \rho T - \frac{\kappa}{2}(\rho\nabla^2\rho + \varphi\nabla^2\varphi) - \frac{\kappa}{2}(|\nabla\rho|^2 + |\nabla\varphi|^2)$$

在最常见的 Rayleigh-Benard 对流形式中, 粘性流体被限制在两个保持不同温度场的水平刚性边界之间。当流体具有位置热膨胀系数, 且重力与温度梯度方向相同时, 净浮力与重力方向相反[19]。当两个

边界之间的温差超过某个阈值时,静态导热状态变得不稳定,对流突然发生。众所周知的 Boussinesq 近似通常用于自然对流的研究。在这种近似下,假设材料特性与温度无关,但体积力项除外,其中流体密度 ρ 被假设为温度的线性函数,即 $\frac{\rho}{\rho_\infty} = 1 + D(T - T_\infty)$ 。这里, ρ_∞ 和 T_∞ 分别为参考点处的密度和温度, D 为恒定热膨胀系数。因此,重力为 $F = \rho_\infty g + \rho_\infty g D(T - T_\infty)$ 。在将第一项吸收到压力中后,有效体积力与温度变化成线性比例。在我们的模拟中,当压缩可以忽略不计(如在小马赫数限制下),速度场近似为扩散力,温度场满足被动标量方程(4)。

2.2. 二维 LBGK 模型

我们使用二维九速度(D2Q9)模型将 Navier-Stokes 方程(NS)与二维(2D) Boltzmann 格子 Bhatnagar-Gross-Krook 模型(LBGK)对应[20]。网格上的粒子速度 \vec{e}_i 如图 1 所示,可以写为:

$$\vec{e}_i = \begin{cases} (0,0) & i = 0 \\ c \left(\cos(i-1)\frac{\pi}{2}, \sin(i-1)\frac{\pi}{2} \right) & i = 1, \dots, 4 \\ \sqrt{2}c \left(\cos(2i-1)\frac{\pi}{4}, \sin(2i-1)\frac{\pi}{4} \right) & i = 5, \dots, 8 \end{cases} \quad (13)$$

其中 $c = \frac{\delta x}{\delta t}$, 这里 δx 为空间步长(格子边长), δt 为时间步长。

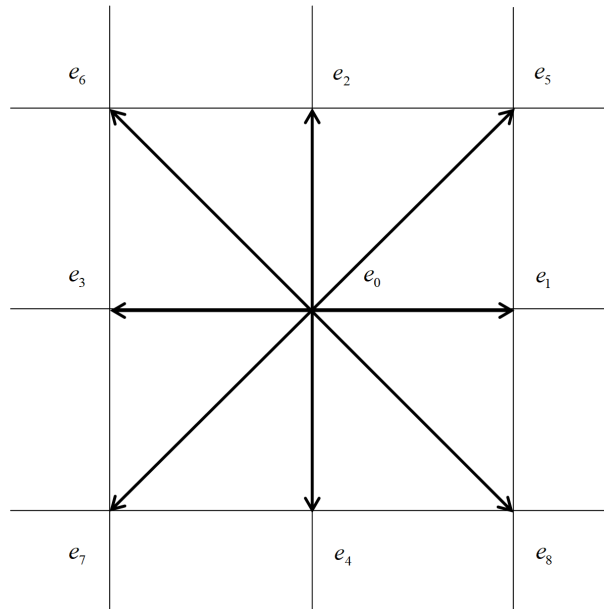


Figure 1. Schematic diagram of D2Q9 velocity model

图 1. D2Q9 速度模型示意图

通过 LBM, 我们使用双分布函数模型来描述二元流体中的相分离和温度场。分别通过两组分布函数 f_i 和 g_i , 在空间和时间上离散二元流体混合系统的密度场和相分离场的演化方程, 每组份流体与速度矢量 \vec{e}_i 相关:

$$f_i(\vec{x} + \vec{e}_i \delta t, t + \delta t) - f_i(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau_f} (f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)) \quad (14)$$

$$g_i(\bar{x} + \tilde{e}_i \delta t, t + \delta t) - g_i(\bar{x}, t) = -\frac{1}{\tau_g} (g_i(\bar{x}, t) - g_i^{eq}(\bar{x}, t)) \quad (15)$$

其中 \bar{x} 为网格节点位置, τ_f 和 τ_g 是松弛时间, f_i^{eq} 和 g_i^{eq} 是平衡态分布函数。

通过如下的粒子分布函数, 现有的热 LBM 可以模拟温度场的演变,

$$h_i(\bar{x} + \tilde{e}_i \delta \tilde{t}, t + \delta \tilde{t}) - h_i(\bar{x}, t) = -\frac{1}{\tau_h} (h_i(\bar{x}, t) - h_i^{eq}(\bar{x}, t)) \quad (16)$$

其中 τ_h 是与热扩散系数 $D_A = D_B = (\tau_h - 0.5)\tilde{c}^2\delta\tilde{t}/3$ 相关的无量纲松弛时间。 $\delta\tilde{t}$ 是分布函数 h_i 的时间步长,

且 $\tilde{c} = \frac{\delta x}{\delta \tilde{t}}$,

$$\tilde{e}_i = \begin{cases} (0, 0) & i = 0 \\ \tilde{c} \left(\cos(i-1)\frac{\pi}{2}, \sin(i-1)\frac{\pi}{2} \right) & i = 1, \dots, 4 \\ \sqrt{2}\tilde{c} \left(\cos(2i-1)\frac{\pi}{4}, \sin(2i-1)\frac{\pi}{4} \right) & i = 5, \dots, 8 \end{cases} \quad (17)$$

宏观流速 \bar{u} , 密度 ρ , 密度差 φ 和温度 T 关于平衡态分布函数 f_i^{eq} , g_i^{eq} 和 h_i^{eq} 的表达式如下:

$$\rho = \sum_i f_i^{eq} \quad (18)$$

$$\rho u_\alpha = \sum_i f_i^{eq} e_{i\alpha} \quad (19)$$

$$\varphi = \sum_i g_i^{eq} \quad (20)$$

$$T = \sum_i h_i \quad (21)$$

平衡态密度分布函数的高阶矩定义如下:

$$\sum_i f_i^{eq} e_{i\alpha} e_{i\beta} = P_{\alpha\beta} + \rho u_\alpha u_\beta \quad (22)$$

$$\sum_i g_i^{eq} e_{i\alpha} = \varphi u_\alpha \quad (23)$$

$$\sum_i g_i^{eq} e_{i\alpha} e_{i\beta} = \Gamma \delta_{\alpha\beta} + \varphi u_\alpha u_\beta \quad (24)$$

$$\sum_i h_i^{eq} e_{i\alpha} = T u_\alpha \quad (25)$$

这些矩必须满足宏观方程(1)~(3), 以描述二元液体混合物的动力学。这里, 自由能格子 Boltzmann 格式也适用于方程组(22)~(24)。通过 Chapman Enskog 展开, 可以通过演化方程(14)~(15)恢复连续方程、NS 方程和相场方程(1)、(3)和(8), 从而得到

$$\begin{aligned} \theta &= c^2 \delta t \left(\tau_f - \frac{1}{2} \right) \\ \eta_{mix} &= \frac{(2\tau_f - 1)(1 + \beta(T - T_\infty))}{6} c^2 \delta t \\ \lambda(\rho) &= \left(\tau_f - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2c^2}{3} - \frac{dp_0}{d\rho} \right) \delta t \end{aligned} \quad (26)$$

来自等式(14)和(15)的这一推导,受参考文献[16]的启发。有必要根据计算的温度依赖粘度 $\frac{\eta_{mix}}{1+\beta(T-T_\infty)}$ 在每个网格点更新 τ_f 。但需要注意,对于 β 在 0~9.09 范围内都保证 LBGK 的稳定性。

2.3. 边界处理

在所有模拟中,在上边界和下边界施加了非滑动边界条件,正如针对二元剪切流体系统提出的那样。该算法可以使研究人员严格保持边界墙上的质量和动量。可用于模拟温度场的热边界条件[21]表示为局部已知值和边界处的修正值的组合:

$$h_i(\bar{x}, t) = h_i^*(\bar{x}, t) + \omega_i G_c \quad (27)$$

其中 G_c 是内能影响的修正值。Dirichlet 热边界条件适用于温度 T 恒定的边界节点。对于迁移后的上边界,在上排的位置都知道函数 h_0 、 h_1 、 h_3 、 h_2 、 h_5 和 h_6 。然后使用方程(27)确定 h_4 、 h_7 和 h_8 , 要求上边界温度为 T_c , 这也适用于下边界。修正后上边界分布函数为

$$G_c = \frac{T_c - (h_0 + h_1 + h_3 + h_2 + h_5 + h_6)}{\omega_4 + \omega_7 + \omega_8} \quad (28)$$

$$h_4 = h_4^* + \omega_4 G_c$$

$$h_7 = h_7^* + \omega_7 G_c$$

$$h_8 = h_8^* + \omega_8 G_c \quad (29)$$

其中分布函数 h_4^* , h_7^* 和 h_8^* 由上一步的计算值决定, 即 $h_i^*(\bar{x}, t) = h_i(\bar{x}, t - \delta\tilde{t})$ 。

3. 数值模拟结果与分析

我们演示耦合温度与粘度的自由能格子 Boltzmann 模型在 $\rho = 1.0$, $\varphi = 0$ 和 $\bar{u} = 0$ 情况下的简单应用。图 2 给出了混合流体初始状态示意图。在模拟中, ρ 的值在系统的整个时间演化过程中保持不变。 φ 的初始值对应于两种流体完全混合的对称系统。为便于描述热扩散和对流之间的竞争,引入 Prandtl 数(Pr),

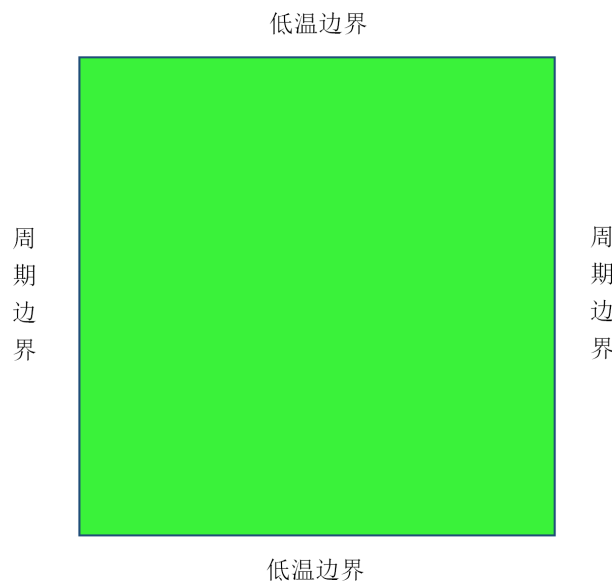
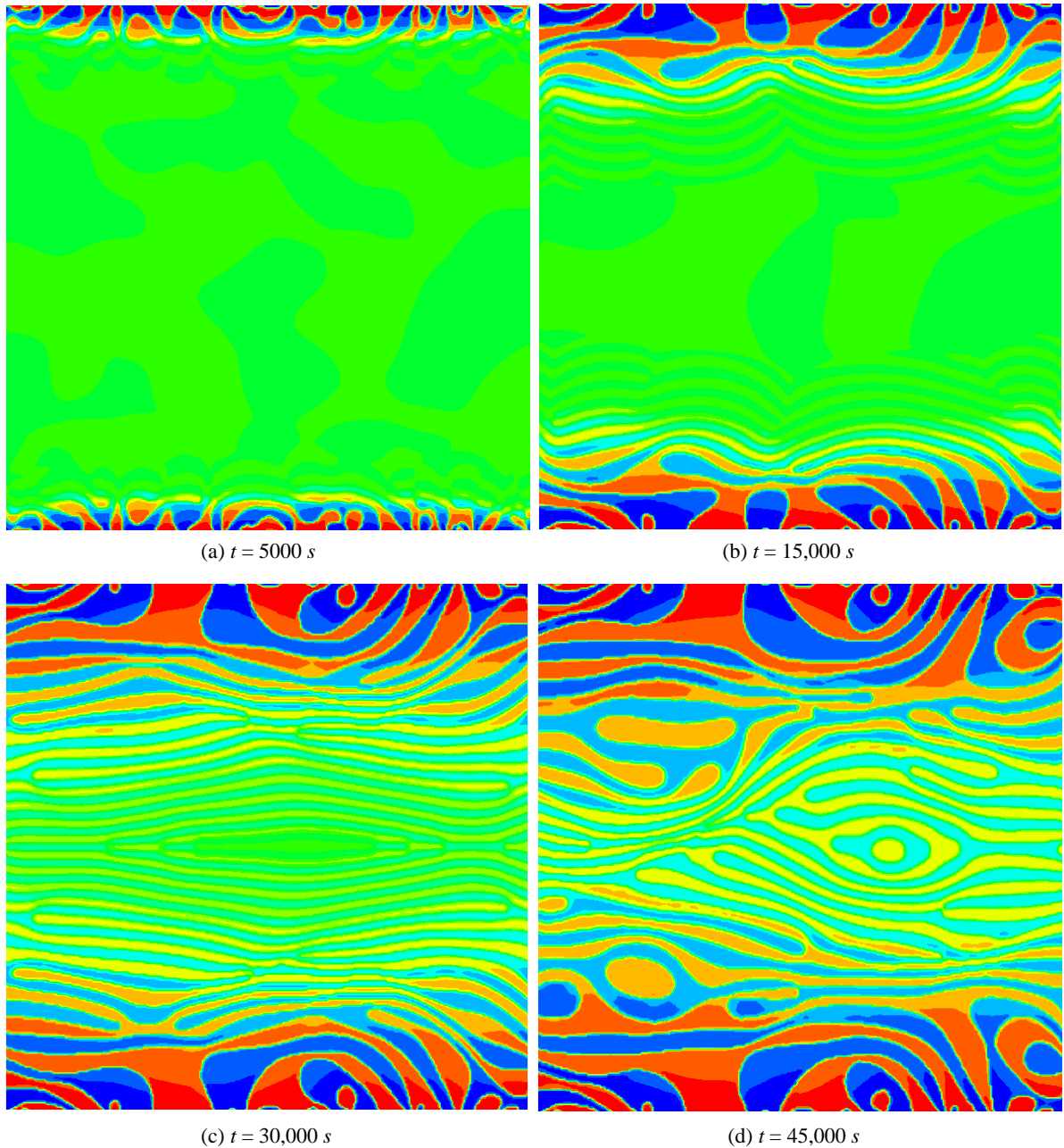


Figure 2. Initial state diagram of mixed fluid

图 2. 混合流体初始状态示意图

其定义为 $Pr = \eta_\infty / D$ 。其它计算参数为 $k = 6.67 \times 10^{-3}$, $\tau_g = (1 + 1/\sqrt{3})/2$, $\delta x = 1.0$, $\Gamma\theta = 0.2$ 。格子数为 256×256 , 初始温度为 $T_\infty = 0.6$ 和边界温度 $T_C = 0.49$ (对应于最大密度差 $\varphi_C \approx \pm 0.55$), 参数 β 与式(7) 相关, 其取值范围为 $\left[0, \frac{1}{T_\infty - T_C}\right]$, 这里 $\beta = 10^{-2}$, 热扩散系数 $D_A = D_B = 0.1$, 粘度 $\eta_A = \eta_B = 0.1$ ($Pr = 1$)。

图 3 给出了在温度变化条件下的相分离过程。从图 3(a) 可以看到, 在上下低温边界附近首先出现相分离, 这是因为在靠近低温边界地方通过传热使得温度首先降低, 从而导致原来混合的流体发生分离。随着时间演化, 内部温度高的地方不断向低温边界方向传热, 相分离区域不断向内部推进(图 3(b)~(e))。在这个过程中, 由于温差引起的对流也对传热和相分离产生影响, 加快传热和相分离的进程。此外, 经过一段时间后, 表面张力引起的速度场可以加速同相聚集的过程。经过较长的一段时间后, 相分离渐渐



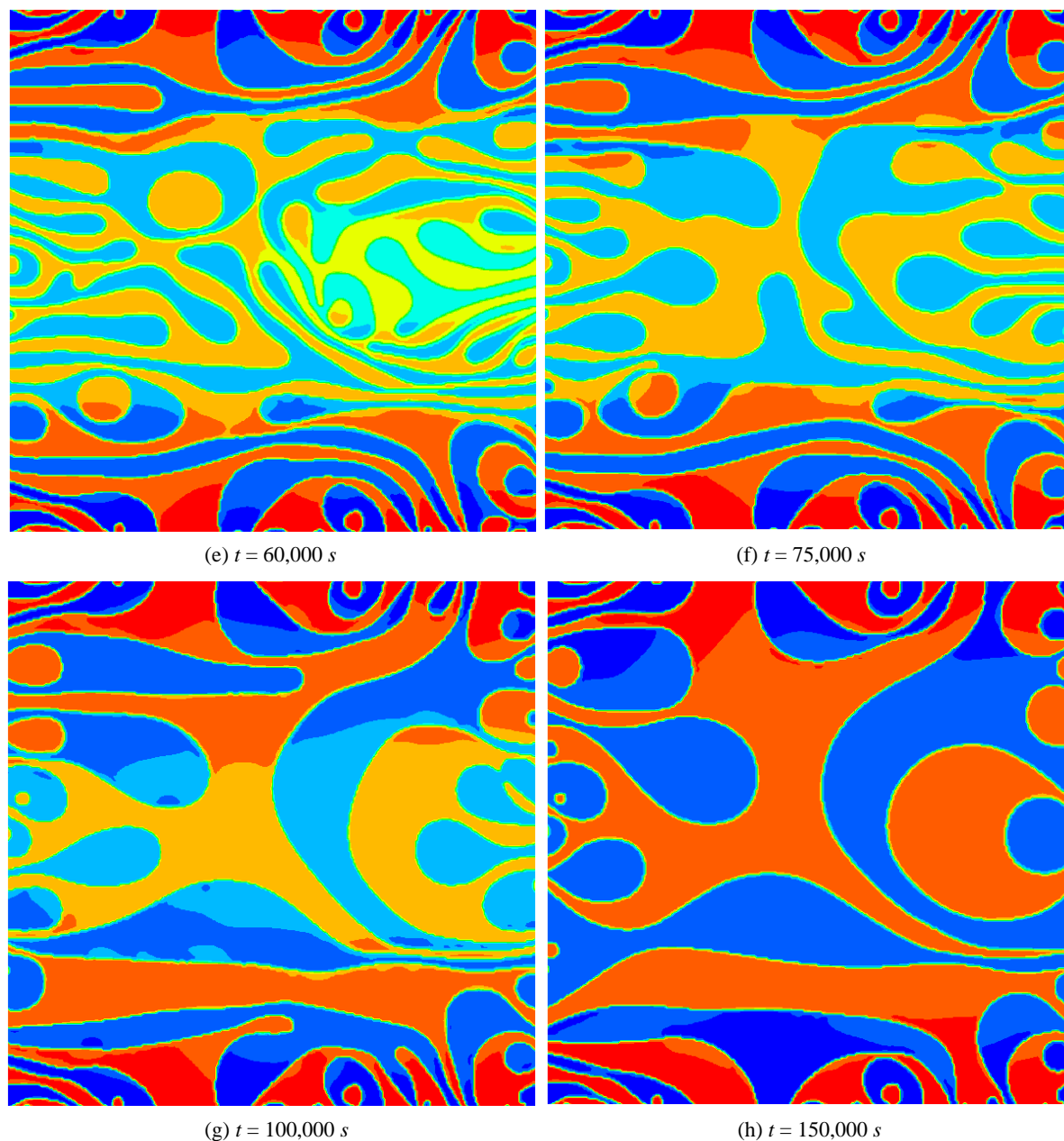


Figure 3. Evolution of phase separation
图 3. 相分离的演化过程

趋于稳态，聚集和破碎两种机制将达到平衡(图 3(f)~(h))。图 3 相分离的数值模拟结果与文献[22]的结果定性一致。在这个相分离过程中，经历两个阶段，一个阶段是亚稳相分解阶段，另一个阶段是相畴增长阶段。亚稳相分解阶段是指发生相分离的前阶段，在这个阶段，相分离已经发生，但还没有形成明显的两相聚集。相畴增长阶段是指发生相分离的后阶段，在这个阶段，相分离产生了明显的两相聚集，在温度变化和表面张力的共同作用下，两相聚集的液滴不断长大。

4. 总结

本工作采用耦合温度和黏度的自由能格子 Boltzmann 模型研究了由温度变化引起的二元混合流体的

相分离过程。在低温边界附近先发生相分离，随着传热的进行，相分离渐渐向内部高温区域发展，最后相分离趋于稳定。相分离经历亚稳相分解和相畴增长两个阶段。计算结果还表明，耦合温度和黏度的自由能格子 Boltzmann 模型能够有效模拟变温场诱导相分离过程。

基金项目

国家自然科学基金(11804355, 31800083)。

参考文献

- [1] Gonnella, G., Lamura, A. and Sofonea, V. (2007) Lattice Boltzmann Simulation of Thermal Nonideal Fluids. *Physical Review E*, **76**, Article ID: 036703. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.036703>
- [2] Gan, Y., Xu, A., Zhang, G., Li, Y. and Li, H. (2011) Phase Separation in Thermal Systems: A Lattice Boltzmann Study and Morphological Characterization. *Physical Review E*, **84**, Article ID: 046715. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.046715>
- [3] Gan, Y., Xu, A., Zhang, G., Zhang, P. and Li, Y. (2012) Lattice Boltzmann Study of Thermal Phase Separation: Effects of Heat Conduction, Viscosity and Prandtl Number. *Europhysics Letters*, **97**, Article No. 44002. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/97/44002>
- [4] Gan, Y., Xu, A., Zhang, G. and Succi, S. (2015) Discrete Boltzmann Modeling of Multiphase Flows: Hydrodynamic and Thermodynamic Non-Equilibrium Effects. *Soft Matter*, **11**, 5336-5345. <https://doi.org/10.1039/C5SM01125F>
- [5] 张玉东. 非平衡流与多相流的建模与研究——基于离散 Boltzmann 方法[D]: [博士学位论文]. 南京: 南京理工大学, 2019.
- [6] Onuki, A. (1982) Periodic Spinodal Decomposition in Solid and Fluid Binary Mixtures. *Physical Review Letters*, **48**, 753-756. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.753>
- [7] Langer, J.S. (1980) Instabilities and Pattern Formation in Crystal Growth. *Reviews of Modern Physics*, **52**, 1-28. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.52.1>
- [8] Cheng, L.P., Lin, D.J., Shih, C.H., Dwan, A.H. and Gryte, C.C. (2015) PVDF Membrane Formation by Diffusion-Induced Phase Separation-Morphology Prediction Based on Phase Behavior and Mass Transfer Modeling. *Journal of Polymer Science Part B Polymer Physics*, **37**, 2079-2092. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-0488\(19990815\)37:16<2079::AID-POLB11>3.0.CO;2-Q](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-0488(19990815)37:16<2079::AID-POLB11>3.0.CO;2-Q)
- [9] Zeinali, R., del Valle, L.J., Torras, J. and Puiggali, J. (2021) Recent Progress on Biodegradable Tissue Engineering Scaffolds Prepared by Thermally-Induced Phase Separation (TIPS). *International Journal of Molecular Sciences*, **22**, Article No. 3504. <https://doi.org/10.3390/ijms22073504>
- [10] Joseph, J.A., Espinosa, J.R., Sanchez-Burgos, I., Garaizar, A., Frenkel, D. and Collepardo-Guevara, R. (2021) Thermodynamics and Kinetics of Phase Separation of Protein-RNA Mixtures by a Minimal Model. *Biophysical Journal*, **120**, 1219-1230. <https://doi.org/10.1016/j.bpj.2021.01.031>
- [11] Hajili, E., Suo, Z., Sugawara, A., Asoh, T. and Uyama, H. (2022) Fabrication of Chitin Monoliths with Controllable Morphology by Thermally Induced Phase Separation of Chemically Modified Chitin. *Carbohydrate Polymers*, **275**, Article ID: 118680. <https://doi.org/10.1016/j.carbpol.2021.118680>
- [12] Zhang, H., Wang, F. and Nestler, B. (2022) Janus Droplet Formation via Thermally Induced Phase Separation: A Numerical Model with Diffusion and Convection. *Langmuir*, **38**, 6882-6895. <https://doi.org/10.1021/acs.langmuir.2c00308>
- [13] Rowlinson, J.S. and Widom, B. (1982) *Molecular Theory of Capillarity*. Clarendon, Oxford.
- [14] Puri, S. (2004) Kinetics of Phase Transitions. *Phase Transitions*, **77**, 407-431. <https://doi.org/10.1080/01411590410001672648>
- [15] Orlandini, E., Swift, M.R. and Yeomans, J.M. (1995) A Lattice Boltzmann Model of Binary Fluid Mixture. *Europhysics Letters*, **32**, 463-468. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/32/6/001>
- [16] Swift, M.R., Orlandini, E., Osborn, W. and Yeomans, J.M. (1996) Lattice Boltzmann Simulations of Liquid-Gas and Binary Fluid Systems. *Physical Review E*, **54**, 5041-5052. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.54.5041>
- [17] Kafoussias, N.G. and Williams, E.W. (1995) Thermal-Diffusion and Diffusion-Thermo Effects on Mixed Free-Forced Convective and Mass Transfer Boundary Layer Flow with Temperature Dependent Viscosity. *International Journal of Engineering Science*, **33**, 1369-1384. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)00132-4](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)00132-4)
- [18] Reichl, L.E. (1980) *A Modern Course in Statistical Physics*. Edward Arnold, London.

-
- [19] Bartoloni, A., Battista, C., Cabasino, S., *et al.* (1993) LBE Simulations of Rayleigh-Bénard Convection on the APE100 Parallel Processor. *International Journal of Modern Physics C*, **4**, 993-1006.
<https://doi.org/10.1142/S012918319300077X>
- [20] Qian, Y.H., d’Humières, D. and Lallemand, P. (1992) Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation. *Europhysics Letters*, **17**, 479-484. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/17/6/001>
- [21] Ho, C.F., Chang, C., Lin, K.H. and Lin, C.A. (2009) Consistent Boundary Conditions for 2D and 3D Lattice Boltzmann Simulations. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **44**, 137-155.
- [22] 孙喆. 聚合物复杂流体的自治场理论与非等温相变动力学[D]: [博士学位论文]. 天津: 天津大学, 2006.