

# Modal Calculation under Prestressed Structures

Chuye Li, Haitao Wang, Zhongkai Li

Aeronautical Key Laboratory for Numerical Manufacturing Technology, Beijing Aeronautical Manufacturing Technology Research Institute, Beijing  
Email: [lichuye@sohu.com](mailto:lichuye@sohu.com)

Received: Oct. 9<sup>th</sup>, 2015; accepted: Oct. 26<sup>th</sup>, 2015; published: Oct. 29<sup>th</sup>, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

Using D'Alembert's principle to establish the dynamic equations to study the mode calculating method of class structure under prestressed, evidenced by adjusting the prestressing, can effectively improve the dynamic performance of the structure. Deformations and modal comparatively positive and negative prestressed truss structure by the finite element method is proposed as a beam structure of prestressed truss speed CNC machine tools. The bending rigidity of the internal beam can be improved significantly by prestressing the beam. Through the truss key component stress control, it can make the truss internal stress to be adjustable. According to changes of processing parameters, the size and the direction of the internal stress of certain truss rods are optimized and adjusted so that the device has the certain ability to change the dynamic performance to achieve the purposes of reducing vibration and improving machining accuracy.

## Keywords

Prestressed, Modal, Trusses, Machine Tools, Dynamics, Rigidity

---

# 预应力下的结构模态计算

李初晔, 王海涛, 李中凯

北京航空制造工程研究所数字化制造技术航空科技重点实验室, 北京  
Email: [lichuye@sohu.com](mailto:lichuye@sohu.com)

收稿日期: 2015年10月9日; 录用日期: 2015年10月26日; 发布日期: 2015年10月29日

文章引用: 李初晔, 王海涛, 李中凯. 预应力下的结构模态计算[J]. 力学研究, 2015, 4(3): 61-70.  
<http://dx.doi.org/10.12677/ijm.2015.43008>

## 摘 要

本文采用达朗伯原理建立动力学平衡方程,研究了梁类结构预应力下的模态计算方法,证明通过调节预应力,可有效改善结构的动态性能。本文通过有限元法计算比较正负预应力下桁架结构的变形和模态,提出预应力桁架可作为高速数控机床的横梁结构。在横梁内部施加预应力可大幅提高横梁的弯曲刚性。通过对桁架关键构件内应力的控制,可以使桁架内应力做到可调。根据加工参数的变化,优化调节桁架某些杆件的内应力大小及方向,使设备在加工过程中具有一定改变动态性能的能力,从而达到减小振动提高加工精度的目的。

## 关键词

预应力, 模态, 桁架, 机床, 动力学, 刚度

## 1. 引言

在内部施加预应力可有效提高结构刚度及动态性能,预应力结构在工程实际中已有广泛应用,如预应力钢索桥,预应力桁架结构屋顶等[1][2]。类似高压电线张力杆结构,在不张紧的条件下处于松弛状态,此时结构是具有极弱刚度的柔软结构,模态不可求,或者说没有模态,但在张紧条件下会有模态,并且模态随张紧力不同而有较大变化[3]。这种改变模态能力的预应力就像人体练就的气功,极大改善人类体能一样,可以在多种工程领域得到应用。

在数控机床领域,目前随着我国航空航天工业的快速发展,加工的飞机零件在长度和宽度尺寸上越来越大,并且大多需一次装夹完成整体零件加工,满足减重、隐身等功能需求。这类机床一般具有较大的坐标行程,横梁跨度大,从力学角度来看,横梁属于较柔性的结构,在加工头重力及加工力作用下,横梁极易发生较大的挠曲,随铣削力的波动会使加工产生较大误差,极大的限制了机床的加工能力。通过在横梁内部施加预应力可提高横梁的弯曲刚性,进而提高结构的模态频率,在一定频率范围内可极大改善机床的动态性能[1][4]。如果预应力做到可调,则可使机床设备具有自适应加工能力,目前在机床制造领域已在这方面展开研究,图1是具有预应力桁架横梁结构的高速加工机床。

机床上一种常常施加预应力的结构元件为传动丝杠。传动丝杠副由丝杠、螺母、滚珠等零件构成,它将旋转运动变为直线运动,广泛用于各种工业设备、精密仪器中。由于被加工件的最后轮廓精度受到进给运动的传动精度、灵敏度和稳定性的影响,对进给系统中的传动装置和元件要求具有高的刚度、极小传动间隙、高的灵敏度及低摩擦阻力。为了提高丝杠传动精度,除了对采用的机械部件首先保证它们的加工精度外,同时还采用了一系列技术措施,其中合理的对丝杠进行预拉伸是其中重要的一项,增加丝杠的刚度和动态响应速度[5][6]。

## 2. 预应力下的简支梁横向振动

图2为简支梁横向振动模型,假设梁长度 $l$ ,截面积 $A$ ,密度 $\rho$ ,梁的质量 $m$ ,截面惯性矩 $I$ ,预拉力 $F$ (当 $-F$ 时为预压力)。由达朗伯原理, $Y$ 方向的平衡方程为:

$$-\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx + Q - \left( Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) + q(x, t) dx = 0$$

整理得:

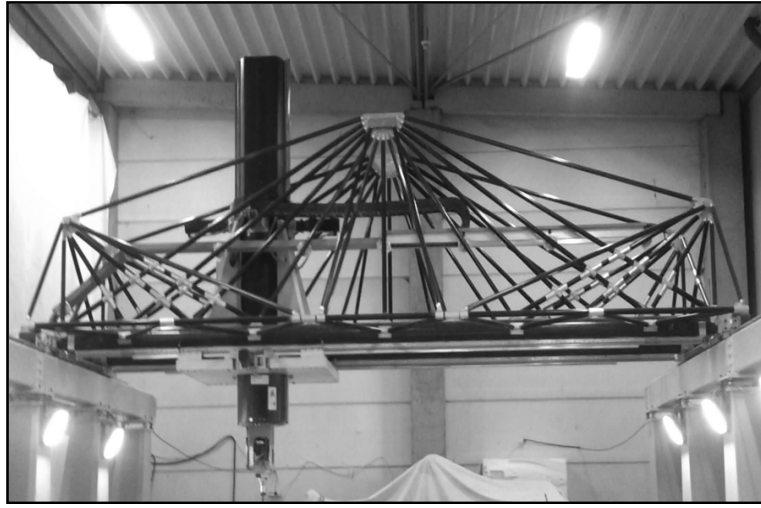


Figure 1. High speed machining machine tool for prestressed truss structure  
图 1. 预应力桁架横梁结构高速加工机床

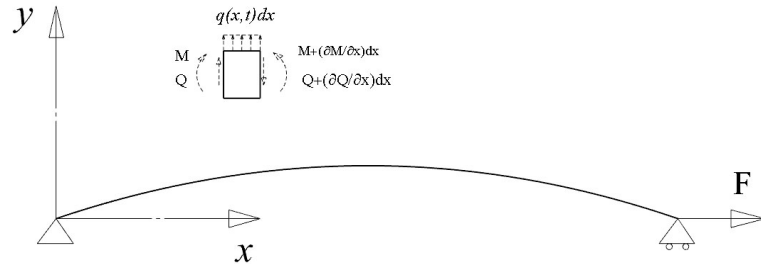


Figure 2. Transverse vibration model of simply supported beam  
图 2. 简支梁的横向振动模型

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q(x, t) \quad (1)$$

根据材料力学知识有：

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2)$$

$Q$  为截面剪力， $M$  为截面弯矩。

当存在预拉力  $F$  时，弯矩表达相应修正为下面的形式：

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - F \times y \quad (3)$$

将(2)代入(1)式，整理得到梁横向受迫振动微分方程：

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q(x, t)$$

若  $q(x, t) = 0$ ，则上式化为自由振动微分方程。对于简支梁横向振动固有频率的理论解为：

$$f_i = \frac{i^2 \pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \quad (4)$$

计算当存在预拉力  $F$  作用时，简支梁的固有频率。

将(3)代入(1)式，整理得到梁在预拉力  $F$  作用下横向受迫振动微分方程：

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - F \times \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q(x, t) \quad (5)$$

令  $q(x, t) = 0$ ，当  $F$  力足够大时，舍掉方程左边的高阶小量，整理得到预拉力  $F$  作用下横向自由振动微分方程：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{F}{\rho A} \times \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

设方程的解表达为下面的形式：

$$y(x, t) = Y(x) \cdot T(t)$$

代入(6)：

$$\begin{aligned} Y(x) \cdot T''(t) - \frac{F}{\rho A} Y''(x) \cdot T(t) &= 0 \\ \frac{F}{\rho A} \cdot \frac{Y''(x)}{Y(x)} &= \frac{T''(t)}{T(t)} \end{aligned} \quad (7)$$

欲使(7)式成立，其两端必须同时等于一常量，设此常量为  $-p^2$ ，由(7)式得到：

$$\begin{aligned} T''(t) + p^2 T(t) &= 0 \\ Y''(x) + p^2 \frac{\rho A}{F} \cdot Y(x) &= 0 \end{aligned}$$

解上述微分方程，得到：

$$T(t) = M \sin pt + N \cos pt \quad (8)$$

$$Y(x) = U \sin \left( p \sqrt{\frac{\rho A}{F}} x \right) + V \cos \left( p \sqrt{\frac{\rho A}{F}} x \right) \quad (9)$$

综合上式得到预拉力  $F$  作用下横向振动解的一般形式：

$$y(x, t) = \left\{ U \sin \left( p \sqrt{\frac{\rho A}{F}} x \right) + V \cos \left( p \sqrt{\frac{\rho A}{F}} x \right) \right\} \cdot (M \sin pt + N \cos pt) \quad (10)$$

$U, V, M, N$  为积分常数， $U, V$  由梁的边界条件确定， $M, N$  由初始条件确定。

对于简支梁， $x=0$  时， $Y(0)=0$ ，代入(10)式得到  $V=0$ ；

$x=1$  时， $Y(1)=0$ ，代入(10)式得到：

$$U \sin \left( p \sqrt{\frac{\rho A}{F}} l \right) = 0$$

因此：

$$p \sqrt{\frac{\rho A}{F}} l = i\pi$$

各阶固有圆频率为：

$$p_i = i\pi \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho A l^2}} = i\pi \cdot \sqrt{\frac{F}{m l}}$$

固有频率为:

$$f_i = p_i / 2\pi = \frac{i}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{ml}} \quad (11)$$

因此, 在预拉力很大的情况下梁的固有频率与材料弹性模量没有关系, 这是因为忽略了(5)式高阶项的缘故。当预拉力不太大的情况下, (5)式中的高阶项不能忽略, 求解过程复杂繁琐, 该情况下的固有频率为:

$$f_i = \frac{i^2 \pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{ml^3} \left( 1 + \frac{Fl^2}{EI \times (i\pi)^2} \right)} \quad (12)$$

当  $F = 0$  时, (12)式化为(4)式形式, 为无拉力下的频率; 当  $F$  很大时, 对于较低阶频率,  $\frac{Fl^2}{EI \times (i\pi)^2}$  为远大于 1 的数, (12)式近似表达为:

$$f_i = \frac{i^2 \pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{ml^3} \left( 1 + \frac{Fl^2}{EI \times (i\pi)^2} \right)} \approx \frac{i^2 \pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{ml^3} \times \frac{Fl^2}{EI \times (i\pi)^2}} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{F}{ml}}$$

此时(12)式与(11)相同。

(12)式同时隐含了另一种状态: 当  $F$  小于 0 时, 为预压力下的固有频率。此时要使表达式有意义必须满足:

$$1 + \frac{Fl^2}{EI \times (i\pi)^2} \geq 0$$

$$|F| < \frac{EI \times (i\pi)^2}{l^2}$$

上式即为压杆稳定性的各阶临界屈曲载荷。

假设梁长度  $l = 1000$  mm, 截面为圆形, 半径  $r = 20$  mm, 材料为普通钢, 密度  $\rho = 7.8$  吨/ $\text{m}^3$ , 弹性模量  $E = 210,000$  MPa, 梁的质量  $m$ , 截面惯性矩  $I = \frac{\pi r^4}{4}$ , 预拉力  $F = 5000$  N。

由(4)式, 不考虑预拉力下简支梁横向振动前三阶固有频率的理论解:

$$f_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} = 163 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 4 \times f_1 = 652 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 9 \times f_1 = 1467 \text{ Hz}$$

由(12)式, 在预拉力  $F = 5000$  N 下简支梁横向振动前三阶固有频率理论解:

$$f_{F1} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{ml^3} \left( 1 + \frac{Fl^2}{EI \times \pi^2} \right)} = 165 \text{ Hz}$$

$$f_{F2} = \frac{4\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{ml^3} \left( 1 + \frac{Fl^2}{4 \times EI \times \pi^2} \right)} = 654 \text{ Hz}$$

$$f_{F3} = \frac{9\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{ml^3} \left( 1 + \frac{Fl^2}{9 \times EI \times \pi^2} \right)} = 1469 \text{ Hz}$$

当预拉力  $F$  提高到 50,000 N 时前三阶固有频率理论解:

$$\begin{aligned} f_{F1} &= 178 \text{ Hz} \\ f_{F2} &= 667 \text{ Hz} \\ f_{F3} &= 1482 \text{ Hz} \end{aligned}$$

可见, 预拉力加大时, 梁的初阶固有频率增加较明显。

该梁预压力的最大值(最小屈曲载荷)为:

$$F_{\max} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 260 \text{ (N)}$$

### 3. 预拉力下丝杠的振动

图 3 为某五坐标高速铣床, 主要由立柱、工作台、底座、横梁、滑板、滑枕等部件组成,  $Y$  向丝杠驱动滑板带动滑枕及主轴系统沿横向运动,  $Y$  向丝杠长度  $L$ , 直径  $D$ , 密度  $\rho$ , 弹性模量  $E$ , 预拉力  $F = 6$  吨。丝杠简化为简支梁结构, 计算预拉力下丝杠的模式和动态响应。

由(4)式, 不考虑预拉力下丝杠横向振动前三阶固有频率的理论解:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} = 11 \text{ Hz} \\ f_2 &= 4 \times f_1 = 44 \text{ Hz} \\ f_3 &= 9 \times f_1 = 99 \text{ Hz} \end{aligned}$$

由(12)式, 在预拉力  $F = 60,000 \text{ N}$  下简支梁横向振动前三阶固有频率理论解:

$$\begin{aligned} f_{F1} &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{ml^3} \left( 1 + \frac{Fl^2}{EI \times \pi^2} \right)} = 15 \text{ Hz} \\ f_{F2} &= \frac{4\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{ml^3} \left( 1 + \frac{Fl^2}{4 \times EI \times \pi^2} \right)} = 48 \text{ Hz} \\ f_{F3} &= \frac{9\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{ml^3} \left( 1 + \frac{Fl^2}{9 \times EI \times \pi^2} \right)} = 104 \text{ Hz} \end{aligned}$$

丝杠增加 6 吨的预拉力后, 初阶固有频率从 11 Hz 提高到 15 Hz, 动态性能有了较大的提高, 图 4

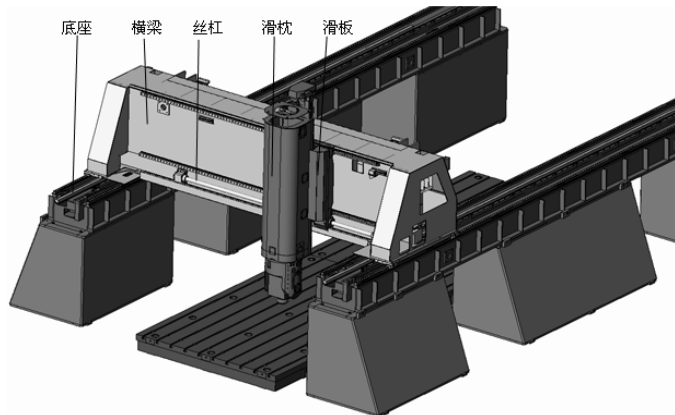


Figure 3. High speed milling machine tool and drive screw model

图 3. 高速铣机床及传动丝杠模型

是 ANSYS 的计算结果，与理论计算值有很好的一致性。

丝母离丝杠端 350 mm 处施加一冲击力作用，图 5 为不同预拉力时丝杠某点位移幅频响应。分析表明，在丝杠结构参数已定的前提下，丝杠预拉力有最佳值，当预拉力较低时，丝杠振动幅值呈现波动状态，当预拉力较大时，振动幅值趋于稳定。但预拉力过大会在丝杠内部产生很大内应力，降低丝杠的使用寿命。该机床丝杠在预拉力 7 吨以上后振动幅值趋于稳定，由于位移幅值直接反映了丝杠振动的强度，因此选用 7 吨以上的预拉力机床的动态性能较好。

#### 4. 预应力桁架的力学性能

桁架为二力杆通过端点铰接组成的框架结构，预应力桁架可作为高速数控机床的横梁结构，通过在横梁内部施加预应力可大幅提高横梁的弯曲刚性，相应的提高了结构的模态频率及动态性能。另一方面，桁架内杆件可以具有正负两种状态的内应力，而且内应力大小可以不同，通过对桁架关键构件内应力的控制，可以使桁架内应力做到可调，根据加工参数的变化，优化调节桁架某些杆件的内应力大小及方向，从而使设备在加工过程中具有一定改变动态性能的能力，达到减小振动的目的。图 6 为由 15 根等截面杆组成的桁架结构，桁架两端固定。

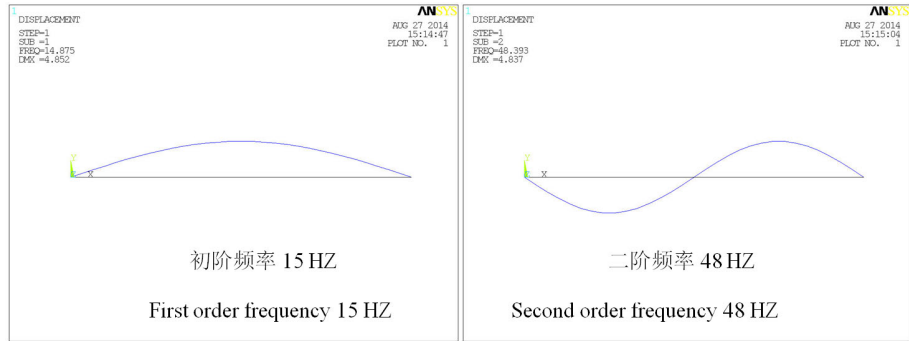


Figure 4. Natural frequency of prestressed screw machine tool  
图 4. 高速铣机床传动丝杠预拉力下的固有频率

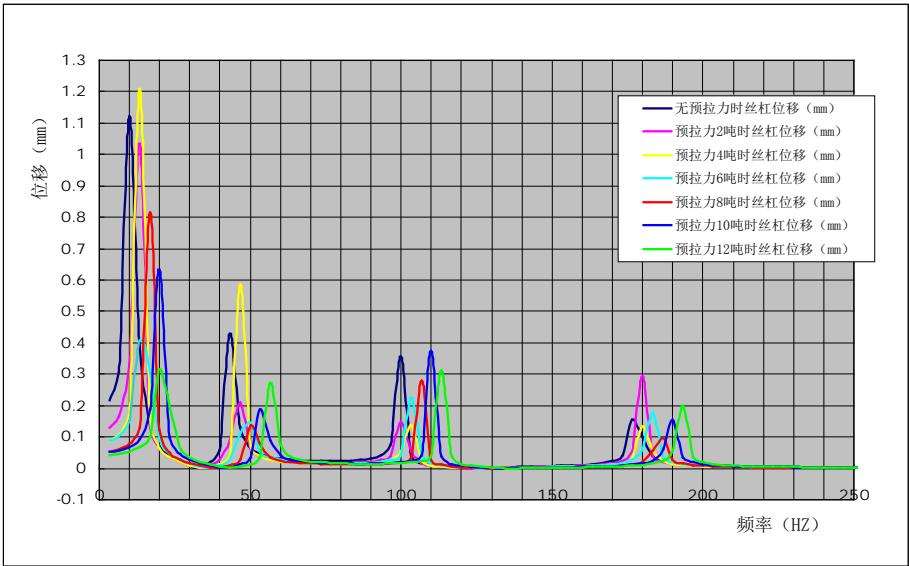


Figure 5. Displacement amplitude frequency response under different pre tension force  
图 5. 不同预拉力时丝杠冲击下的位移幅频响应

首先计算桁架无预应力静力下的变形。在图 6 中的  $G, H$  点施加沿- $Y$  方向的 10,000 N 集中力，桁架中各构件依次施加零应变、正应变和负应变作用，研究  $C$  点的  $Y$  向位移变化。图 7 为施加正应变桁架的初始变形，图 8 为施加负应变桁架的初始变形，图 9 为在正应变桁架的  $G, H$  点施加集中力后的变形，图 10 为在负应变桁架的  $G, H$  点施加集中力后的变形，表 1 为不同初始应变状态下桁架的性能参数比较，正应变桁架结构无论静态还是动态性能皆有较大提高，相比零应变桁架，在相同的几何结构和外力作用条件下变形减小 32%，初阶频率提高 21%，而且在一定范围内，随着结构预应力的提高，桁架的性能提高更明显。

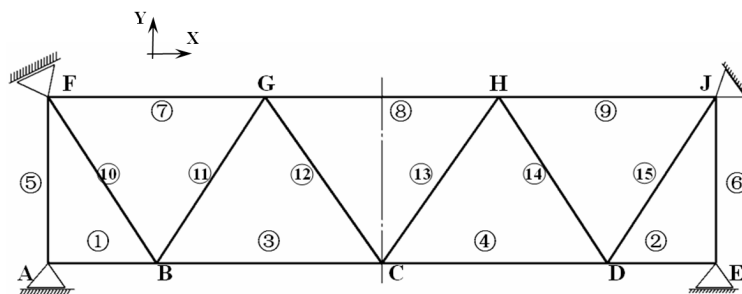


Figure 6. Prestressed truss structure

图 6. 预应力桁架结构

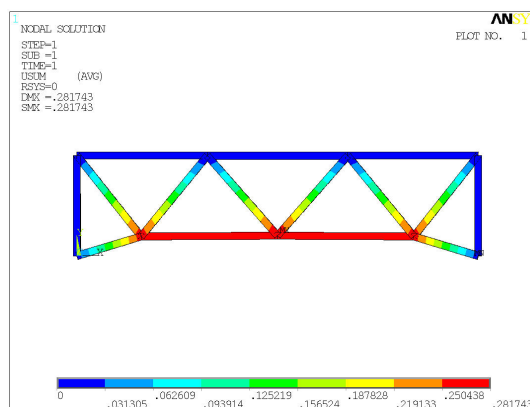


Figure 7. Initial deformation of normal pre strain truss

图 7. 正预应变桁架的初始变形

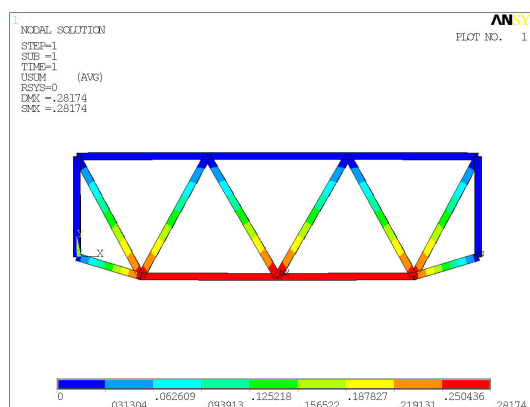


Figure 8. Initial deformation of negative pre strain truss

图 8. 负预应变桁架的初始变形



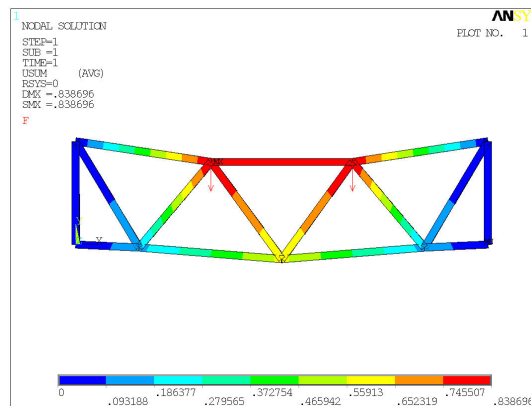


Figure 9. Deformation of normal pre strain under concentrated load

图 9. 集中载荷下正预应变桁架的变形

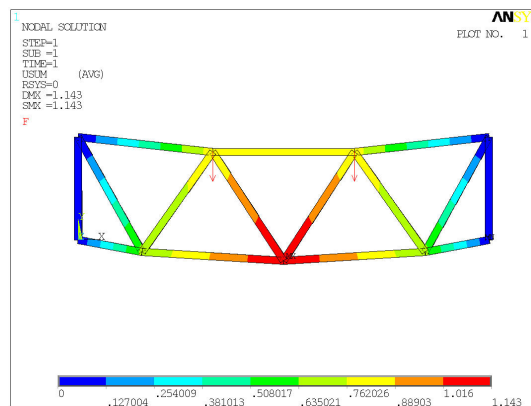


Figure 10. Deformation of negative pre strain under concentrated load

图 10. 集中载荷下负预应变桁架的变形

Table 1. Performance of truss under different initial strain state

表 1. 不同初始应变状态下桁架的性能

	G, H 点有集中力			G, H 点无集中力	
	零应变桁架	正应变桁架	负应变桁架	正应变桁架	负应变桁架
C 点位移(mm)	086	058	1.14	0.28	-0.28
初阶频率(HZ)	225	273	194		

## 5. 结束语

分析数据证明了预应力结构具有良好的力学性能, 预应力桁架结构在桥梁和建筑行业有广泛应用, 目前有应用于机械产品的趋势[7] [8]。这种结构的好处是可方便的在机械结构内部埋置传感器, 如果能够实现预应力可调, 则可使结构具有智能化, 根据采集到的信息来自动调节桁架结构的预应力, 对机床来说, 桁架结构预应力的变化导致结构模态频率和动态性能变化, 进而通过调整加工参数可使机床设备具有自适应加工能力, 在设备空闲期间, 其桁架结构可完全松弛, 使设备具有劳逸结合能力。

## 参考文献 (References)

- [1] 唐友刚 (2002) 高等结构动力学. 天津大学出版社, 天津.

- [2] 张明山, 包红泽, 张志宏 (2004) 预应力空间结构的预应力优化设计. *空间结构*, **3**, 26-30.
- [3] 卓新, 石川浩一郎 (2004) 张力补偿算法及其在预应力空间网格结构张拉施工中的应用. *土木工程学报*, **4**, 38-40.
- [4] 董石麟, 卓新, 周亚刚 (2003) 预应力空间网架结构一次张拉算法. *浙江大学学报(工学版)*, **6**, 629-633.
- [5] 丁皓江, 何福保, 谢贻权 (1989) 弹性和塑性力学中的有限单元法. 机械工业出版社, 北京.
- [6] Vimalanandam, V., Sai Babu, S. and Sreenath, H.G. (2000) Estimation of residual prestress in uninstrumented pre-stressed concrete structures using SSRHT in wires. *Indian Concrete Journal*, **74**, 631-636.
- [7] Dall Asta, A. and Dezi, L. (1996) Prestress force effect on vibration frequency of concrete bridges discussion. *Journal of Structural Engineering*, **122**, 458-460. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1996\)122:4\(458\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1996)122:4(458))
- [8] Saiidin, M., Douglas, B. and Feng, S. (1994) Prestress force effect on vibration frequency of concrete bridges. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **120**, 2233-2241. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1994\)120:7\(2233\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1994)120:7(2233))