

# Finite Element Analysis of a Two-End Fixed Laminated Beam

Fajun Guo, Dongdong Pan, Meijia Qiu, Yixin Zhao, Fuliang Mei\*

College of Architecture & Civil Engineering, Jiaxing University, Jiaxing Zhejiang  
Email: \*flmei2005@126.com

Received: Dec. 9<sup>th</sup>, 2015; accepted: Dec. 27<sup>th</sup>, 2015; published: Dec. 30<sup>th</sup>, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

The finite element analysis of stress and displacement components for a two-end clamped laminated beam subjected to a pair of concentrated forces is carried out by means of ANSYS10.0. The distributions of stress and displacement components on different (longitudinal and transverse) cross-sections are discussed. Results show that the distribution of bending normal stress on two clamped sides is different from one on other transverse cross-sections. The bending normal stress varies on the fixed sides in a robustly nonlinear fashion. It changes within most range of other transverse cross sections in a linear way while it varies in the vicinity of interface between two materials in a slowly nonlinear way. There is only one neutral axis on the fixed sides and the other transverse cross sections, which resides in the same location inside the material with bigger stiffness.

## Keywords

Laminated Beam, Clamped End, Finite Element Analysis, Stress, Displacement

---

# 两端固支叠合梁的有限元分析

郭法俊, 潘冬冬, 求美佳, 赵熠昕, 梅甫良\*

嘉兴学院建筑工程学院, 浙江 嘉兴  
Email: \*flmei2005@126.com

收稿日期: 2015年12月9日; 录用日期: 2015年12月27日; 发布日期: 2015年12月30日

---

\*通讯作者。

## 摘要

本文采用ANSYS10.0对两端固支叠合梁在集中力作用下的应力和位移进行了有限元分析,探讨了不同(纵向和横向)截面上应力与位移分布规律。结果表明:固支边与其它横截面上弯曲正应力分布规律是不同的,固支边上弯曲正应力按强非线性变化,而它在其它横截面绝大多数区域上按线性变化的同时而在其它横截面界面附近较小区域上它按弱非线性变化;固支边与其它横截面上中性轴都只有一个且均位于材料刚度相对较大的同一位置。

## 关键词

叠合梁, 固支端, 有限元分析, 应力, 位移

## 1. 引言

叠合梁被广泛应用于实际工程中,如吊车梁、汽车板簧等。目前对集中荷载作用下两端简支叠合梁(无销钉或加砌块)的弯曲正应力分布规律进行了电测实验和基于材料力学理论知识的理论分析研究[1]-[3]。史丽娟等[4]采用三角级数和层间光滑接触连续条件导出了叠层梁在集中荷载作用下计算层间压力的精确公式。纪多辙等[5]和高荣誉等[6]先后运用状态空间法导出了两端简支层合梁在任意横向荷载作用下的应力和位移精确解。然而针对两端固支叠合梁弯曲问题的研究成果,尤其是两端固支叠合梁弯曲时其固支边上弯曲正应力分布规律的研究成果,尚未见报道。

本文采用 ANSYS10.0 对两端固支叠合梁在一对称横向集中荷载作用下的应力和位移进行了有限元分析,探讨了不同纵横向截面上应力和位移的分布规律,得到了一些与材料力学梁理论拟相同和不同的规律。

## 2. 有限元建模

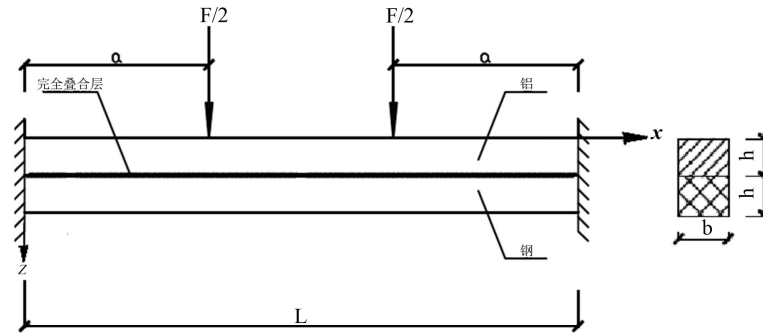
考虑如图 1 所示的两端固支叠合梁。梁的上、下层是由铝和钢材材料组成的,上、下层材料的弹性模量  $E$  和泊松比  $\mu$ , 宽度  $b$ 、高度  $h$  和长度  $L$ , 详见表 1 所示。梁上边作用了一对横向集中荷载力  $F/2$ , 其作用位置到固支边的距离为  $a$ , 其值见表 1。整个梁高度记为  $H = 2h$ 。图 1 所示的直角坐标系  $Oxz$ , 其中  $x$  轴平行于梁的轴线, 位于梁的上边, 向右为正,  $z$  轴沿竖直方向, 位于梁的左边, 向下为正。梁的左、右固支边边界条件为: 纵向位移  $u|_{x=0,L} = 0$  和横向位移  $w|_{x=0,L} = 0$ 。采用如下几点假设: 1) 梁的上、下两层梁材料之间完全粘接, 即无相对滑动; 2) 梁处于平面应力状态; 3) 上、下层材料为均质、各向同性、线弹性材料。利用 ANSYS10.0 程序, 对整个求解区域使用 Plane42 单元进行有限元网格划分, 上、下梁沿梁高度方向各划分为 12 等分, 而沿梁轴向方向由左集中力作用处到左固支边、由右集中力作用处到右固支边以及这两个集中力作用处之间各划分为 20、48 和 20 等分, 接下来将左、右固支边上所有节点的横向和纵向位移设定为零, 最后加上集中力, 有限元计算模型见图 2 所示。利用 ANSYS10.0 有限元分析所得的位移和应力分量计算结果, 从而可以获取三个典型横截面( $x/L = 0, 1/20$  和  $0.5$ )上弯曲正应力  $\sigma_x$  和切应力  $\tau_{xz}$  与坐标  $z$  关系曲线, 还获取了三个典型纵向截面( $z/H = 0, 0.5$  和  $1$ )上弯曲正应力  $\sigma_x$  和横向位移  $w$  与坐标  $x$  关系曲线, 分别示于图 3~6 中。

## 3. 建模结果分析

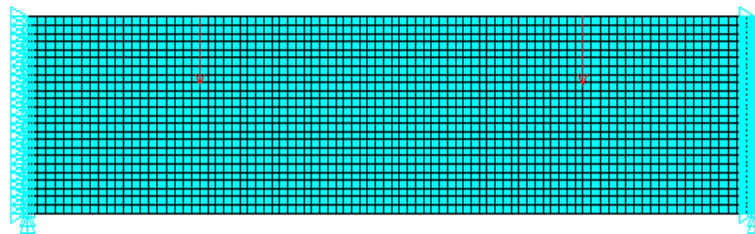
为了探讨不同横截面上的弯曲正应力  $\sigma_x$  分布特征, 我们选取三个典型横截面(包括固支边  $x/L = 0$ ,

**Table 1.** Material and geometry parameters of a laminated beam  
**表 1.** 叠合梁的材料和几何参数

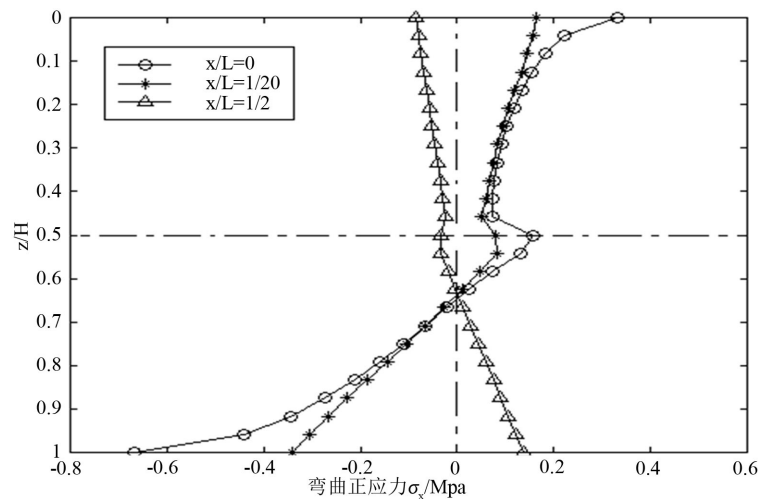
材料	$E(Gpa)$	$b(mm)$	$h(mm)$	$L(mm)$	$a(mm)$
铝梁	72	40	40	380	90
钢梁	210	40	40	380	90



**Figure 1.** Two ends-fixed laminated beam  
**图 1.** 两端固支叠合梁



**Figure 2.** Finite element model  
**图 2.** 有限元模型



**Figure 3.** Bending normal stress  $\sigma_x$  vs. coordinate  $z$   
**图 3.** 弯曲正应力  $\sigma_x$  与坐标  $z$  关系

其它两个横截面 1/20 和 1/2), 其上弯曲正应力  $\sigma_x$  与坐标  $z$  的变化曲线如图 3 所示。由图 3 可见, 可以得出所有横截面的中性轴唯有 1 个, 都位于材料刚度(钢梁)较大一侧的同一位置, 即界面以下的距离约为

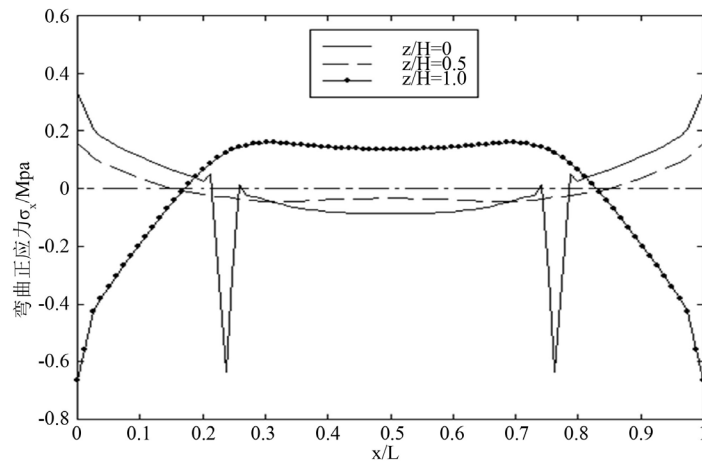


Figure 4. Bending normal stress  $\sigma_x$  vs. coordinate  $x$   
 图 4. 弯曲正应力  $\sigma_x$  与坐标  $x$  关系

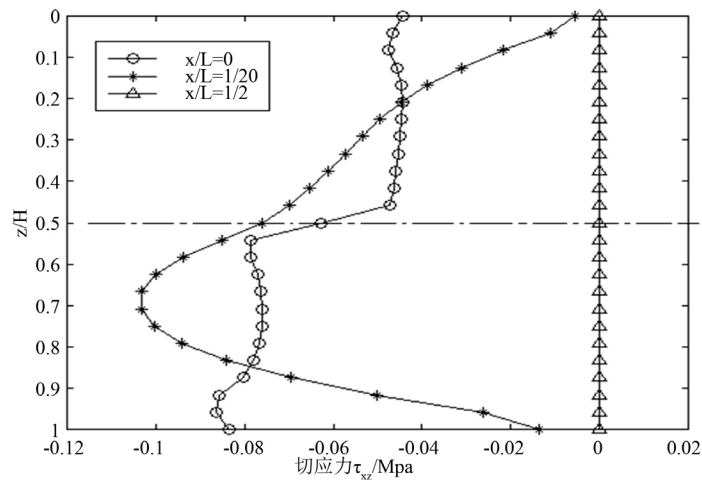


Figure 5. shear Stress  $\tau_{xz}$  vs. coordinate  $z$   
 图 5. 切应力  $\tau_{xz}$  与坐标  $z$  关系

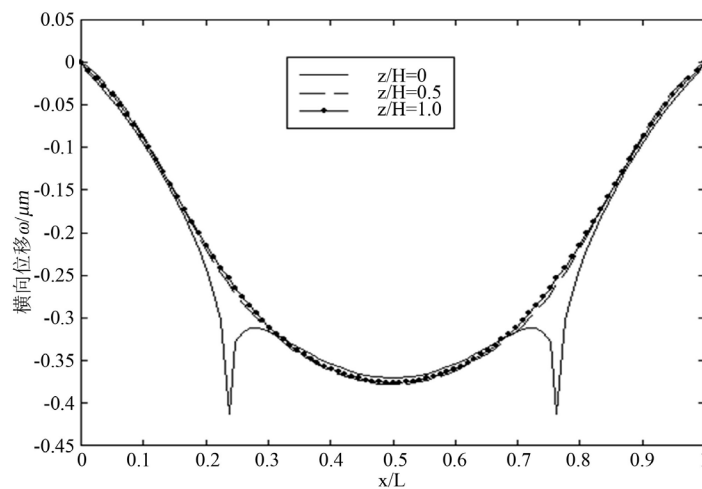


Figure 6. Transverse displacement  $\omega$  vs. coordinate  $x$   
 图 6. 横向位移  $\omega$  与坐标  $x$  的关系

H/8。另外，各横截面上弯曲正应力 $\sigma_x$ 沿梁的整个高度方向都可分为三个区域：0~0.45H、0.45H~0.55H和0.55H~H。对 $x/L=1/2$ 横截面而言， $\sigma_x$ 在0~0.45H范围内全为压应力的同时，它沿梁高度方向按线性分布，其最大压应力 $\sigma_{x,\max}^-$ 出现在上层梁(铝梁)上边；而它在0.55H~H范围内全为拉应力且沿梁高度方向也按线性分布，其最大拉应力 $\sigma_{x,\max}^+$ 出现在下层梁(钢梁)底边；然而，它在0.45H~0.55H范围内均为压应力的同时它沿梁的高度方向按微弱非线性变化， $x/L=1/2$ 横截面上的弯曲正应力分布特点是因为梁中截面所受的是正弯矩，即材料力学中梁弯曲时上层纵向纤维受压下层纵向纤维受拉。然而对 $x/L=1/20$ 横截面来讲， $\sigma_x$ 在0~0.45H范围内表现为拉应力，沿高度方向呈线性分布，其最大拉应力 $\sigma_{x,\max}^+$ 出现在铝梁上表面； $\sigma_x$ 在0.55H~H范围内都为压应力且沿高度也呈线性分布，其最大压应力 $\sigma_{x,\max}^-$ 出现在钢梁下表面； $\sigma_x$ 在0.45H~0.55H范围内均为拉应力且沿梁的高度方向按微弱非线性变化， $x/L=1/20$ 横截面上的 $\sigma_x$ 分布特征是由于该横截面上的弯矩为否，所以它表现为中性轴以上的纵向纤维受拉而中性轴以下的纵向纤维受压。与上述两个横截面上 $\sigma_x$ 分布规律截然不同是 $x/L=0$ （固支边），因为固支边上 $\sigma_x$ 沿整个梁高度方向都呈现相对较强的非线性分布，且离叠合梁上、下边越近，它的非线性变化越显著，其最大拉应力 $\sigma_{x,\max}^+$ 出现在材料刚度相对较弱的铝梁上边，而其最大压应力 $\sigma_{x,\max}^-$ 出现在材料刚度相对较大的钢梁底边。固支边上 $\sigma_x$ 的上述分布特征，这是采用现代有限元技术和软件获得的，但是用材料力学梁弯曲理论无法获得上述结论。

另外，我们还选取了3个不同纵向截面( $z/H=0, 0.5$ 和 $1$ )，其上弯曲正应力 $\sigma_x$ 随着纵向坐标 $x$ 的变化曲线如图4所示。由图4可知，这三个纵向截面上的弯曲正应力 $\sigma_x$ 轴线分布基本相同，大致可分为三个区域：0~0.35L、0.35L~0.75L和0.75L~L。第一， $\sigma_x$ 在0.35L~0.75L范围内沿轴向变化非常缓慢，可是在0~0.35L和0.75L~L范围内沿轴向的变化相对较快，但是到固支边上其变化最为显著。根据材料力学梁的理论可知，两个集中力之间的所有横截面上只有弯矩且恒为常数(属于纯弯曲)，同时该区域因离固支边相对较远而受固支边约束影响相对较小的原因，所以其上弯曲正应力 $\sigma_x$ 基本上遵守材料力学纯弯曲梁理论时弯曲正应力分布规律，但是由于固支边附近的0~0.35L和0.75L~L区域受固支边约束的影响大的原因，导致该区域上 $\sigma_x$ 沿高度方向和轴线方向分布出现非线性变化的特点，虽然这与材料力学梁上 $\sigma_x$ 沿梁高度方向和轴向方向均为线性变化不同，因为此区域横截面上除了弯矩之外还有剪力作用(属于横力弯曲)，而按材料力学的梁理论仍然采用纯弯曲时的弯曲正应力公式进行计算，当然会导致上述两者之间的差异。第二，在0~0.35L和0.75L~L范围内，在钢梁(材料刚度相对较大)底边上沿轴线方向的 $\sigma_x$ 变化比在铝梁(材料刚度相对较小)顶边上沿轴向方向的 $\sigma_x$ 变化要大。第三，在梁顶边( $z/H=0$ )上 $\sigma_x$ 随着轴线方向的变化曲线出现突变点，这正是因为集中力作用点处。

接下来，我们还获取了上述三个不同横截面( $x/L=0, 1/20$ 和 $1/2$ )上切应力 $\tau_{xz}$ 沿高度方向的分布曲线，如图5所示。由图5可知，在跨中( $x/L=1/2$ )横截面上各点切应力 $\tau_{xz}$ 都为零，这是由于梁的几何、约束条件和荷载均对称于梁中横截面所致的，按照材料力学的梁理论可知，此截面上的剪力为零，所以该截面上各点切应力 $\tau_{xz}$ 均为零。而在固支边( $x/L=0$ )和临近固支边的横截面( $x/L=1/20$ )上的切应力 $\tau_{xz}$ 分布与“材料力学”梁横截面上 $\tau_{xz}$ 分布是截然不同的(根据材料力学横力弯曲时的梁理论，横截面上 $\tau_{xz}$ 按抛物线分布，即梁顶、底边处 $\tau_{xz}$ 为零，而中性轴上 $\tau_{xz}$ 达到最大值)，但是对于两种不同材料做成的叠合梁， $\tau_{xz}$ 沿 $x/L=0$ 和 $1/20$ 横截面为一条梁顶、梁底相对较小(不为零)而叠合梁界面以下(材料刚对相对较大)某处相对较大的非二次抛物线分布，同时其最大切应力 $\tau_{xz,\max}$ 不在叠合梁上、下梁接触界面处，而是位于材料刚度相对较大的钢梁中。在固支边上 $\tau_{xz}$ 沿高度方向的变化比其它横截面上 $\tau_{xz}$ 沿高度方向的变化更加剧烈。

图6给出了不同纵向界面( $z/H=0, 0.5$ 和 $1$ )上横向位移 $w$ 随坐标 $x$ 的变化曲线。由图6可见，这3条横向位移曲线为一半正弦波，除了梁上表面横向位移曲线在集中力作用处发生突然增大之外，其它

区域上这三条横向位移  $w$  沿轴线方向几乎处处重合, 由此可见, 这些区域上横向位移  $w$  沿梁高度方向几乎不变化, 可以按照材料力学的梁理论来计算横向位移。

#### 4. 结论

本文正对两端固支不同材料叠合梁在集中荷载作用下的应力和位移进行了有限元分析, 得到了如下结论: 1) 不同横截面上弯曲正应力分布曲线是不同的, 在接触界面附近区域内, 它都呈现缓慢非线性变化, 在固支边与上、下梁界面附近以外的横截面上, 它沿梁高度方向按线性变化, 但是在固支边上它沿梁高度方向按非线性变化, 而且距离梁上或下边越近, 其非线性变化越强; 2) 所有横截面的中性轴都只有 1 个, 都位于材料刚度相对较大一侧的同一位置; 3) 固支边与其它横截面上的切应力分布规律是不同的, 而且它们与材料力学梁横截面上的切应力分布也是不同的。

#### 基金项目

2015 年浙江省大学生科技创新活动计划暨新苗计划(No. 2015R417013)。

#### 参考文献 (References)

- [1] 孙振东, 于叔名, 常录喜. 叠层弯曲的试验分析[J]. 大连铁道学院学报, 1991, 12(4): 47-49.
- [2] 吴晓, 孙晋, 杨立军. 叠层梁弯曲实验的应力计算公式[J]. 南湖文理学院学报, 2009, 21(1): 27-28.
- [3] 徐慧, 杨铮. 钢铝双层组合梁的应力分析与实验[J]. 华南地震, 2014, 34(1): 04-11.
- [4] 史丽娟, 董秀丽, 杨雁宾. 叠层梁在集中荷载作用下的精确解[J]. 黑龙江商学院学报, 1990(3): 34-37.
- [5] 纪多辙, 王有凯. 用状态空间法求解简支叠合梁在任意横向载荷作用下的精确解[J]. 力学与实践, 1998, 20(1): 51-52.
- [6] 高荣誉, 范家让. 叠层深梁的精确解[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2009, 32(5): 738-741.