

# Study of Motion of a Compound Pendulum with Accounting for the Influence of Bearing Friction

Jinfu Zhang

Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi  
Email: jfzhang@nwpu.edu.cn

Received: Feb. 16<sup>th</sup>, 2018; accepted: Mar. 1<sup>st</sup>, 2018; published: Mar. 8<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

In many current textbooks on theoretical mechanics, an example of establishing differential equation of motion of a compound pendulum is presented. In this example, however, the influence of bearing friction on motion of the compound pendulum is not taken into consideration. In the present paper, taking into account the influence of bearing friction, the differential equation of motion of a compound pendulum is derived and compared with that without accounting for the influence of bearing friction. Based on these equations, the motion responses of a compound pendulum with and without accounting for the influence of bearing friction are numerically simulated. Finally, the difference between the motion responses is shown.

## Keywords

Friction, Compound Pendulum, Differential Equation of Motion

---

## 考虑轴承摩擦的复摆运动

张劲夫

西北工业大学工程力学系, 陕西 西安  
Email: jfzhang@nwpu.edu.cn

收稿日期: 2018年2月16日; 录用日期: 2018年3月1日; 发布日期: 2018年3月8日

---

## 摘要

现行的许多理论力学教科书中都介绍过一个有关如何建立复摆运动微分方程的例子, 然而在该例的分析

和推导当中,并没有考虑轴承摩擦对复摆运动的影响。本文旨在考虑这一影响因素的基础上,建立复摆的运动微分方程,并与未考虑轴承摩擦影响的复摆运动微分方程进行比较。最后,分别对考虑和不考虑轴承摩擦的两种情形下的复摆运动进行数值仿真,通过对仿真结果比较,说明了上述两种情形下复摆运动的不同之处。

## 关键词

摩擦,复摆,运动微分方程

Copyright © 2018 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

现行的许多理论力学教科书[1]-[11]中都列举过如下的一个典型例题:“图1所示的复摆可绕水平轴O转动,复摆的质量为m,重心C到转轴O的距离OC=b,复摆对转轴O的转动惯量为J,复摆在OC线与铅垂线的偏角为φ<sub>0</sub>的位置处静止释放,试写出复摆的运动微分方程和复摆的微幅摆动规律。”值得注意的是:上述理论力学教科书针对这一例题所给出的分析和求解答案当中,并没有考虑轴承摩擦对复摆运动的影响。鉴于轴承摩擦的影响是客观存在的,因此,研究计入轴承摩擦影响的复摆运动具有一定的实际意义。本文在考虑轴承摩擦影响因素的基础上,推导出了复摆运动的微分方程,并与上述理论力学教科书中所给出的未计入轴承摩擦因素的复摆运动微分方程进行了比较,说明两者之间存在的差异。最后,进一步通过数值仿真的方法说明考虑和不考虑轴承摩擦的两种情形下复摆运动的不同之处。

## 2. 计入轴承摩擦的复摆运动微分方程

首先画出考虑轴承摩擦的复摆受力图(图2),图中N为轴孔表面所受到的压力,F为轴孔表面所受到的摩擦力。为了应用刚体的定轴转动微分方程,规定通过轴承中心O且垂直纸面向外的方向作为转轴z的正向(图中用“·”表示转轴z的正向),并规定角坐标φ的正向与转轴z的正向构成右手旋向(图中逆时针向为角坐标φ的正向)。应用刚体的定轴转动微分方程,有

$$J\ddot{\varphi} = -mgb\sin\varphi + M_z(\mathbf{F}) \quad (1)$$

式中 $M_z(\mathbf{F})$ 表示摩擦力F对转轴z的矩,考虑到摩擦力矩 $M_z(\mathbf{F})$ 的转向与角速度φ的转向相反,故 $M_z(\mathbf{F})$ 可表达为

$$M_z(\mathbf{F}) = -\text{sign}(\dot{\varphi})FR \quad (2)$$

式中R为轴孔(轴承)半径。将上式代入式(1)后,得到

$$J\ddot{\varphi} = -mgb\sin\varphi - \text{sign}(\dot{\varphi})FR \quad (3)$$

为了进一步应用式(3)写出考虑轴承摩擦的复摆运动微分方程,还须写出摩擦力F的表达式。为此,对复摆应用质心运动定理,有

$$mb\dot{\varphi}^2 = -mg\cos\varphi + N\cos\theta - \text{sign}(\dot{\varphi})F\sin\theta \quad (4)$$

和

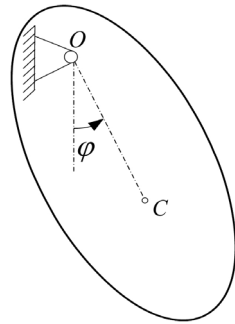


Figure 1. Compound pendulum  
图 1. 复摆

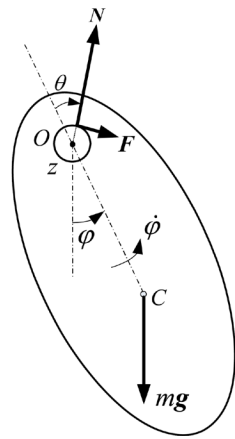


Figure 2. Free-body diagram of a compound pendulum with accounting for friction  
图 2. 考虑轴承摩擦的复摆受力图

$$mb\ddot{\phi} = -mg \sin \phi + N \sin \theta + \text{sign}(\dot{\phi}) F \cos \theta \tag{5}$$

式中  $\theta$  表示压力  $N$  的方向相对  $CO$  线的偏角(图 2 所示)。注意：在以上两式中，为了反映摩擦力的方向随角速度转向的变化，引入了符号函数  $\text{sign}(\dot{\phi})$ 。

应用库伦摩擦定律，有

$$F = N f \tag{6}$$

式中  $f$  为轴孔和轴之间的摩擦因数。联立式(4)~(6)后，可解得摩擦力  $F$  的表达式为

$$F = mf \sqrt{\frac{(b\dot{\phi}^2 + g \cos \phi)^2 + (b\ddot{\phi} + g \sin \phi)^2}{1 + \text{sign}^2(\dot{\phi}) f^2}} \tag{7}$$

将上式代入式(3)后，得到

$$J\ddot{\phi} = -mgb \sin \phi - \text{sign}(\dot{\phi}) m f R \sqrt{\frac{(b\dot{\phi}^2 + g \cos \phi)^2 + (b\ddot{\phi} + g \sin \phi)^2}{1 + \text{sign}^2(\dot{\phi}) f^2}} \tag{8}$$

这就是计入轴承摩擦的复摆运动微分方程。如果令其中的摩擦因数  $f = 0$ ，则方程(8)退化为

$$J\ddot{\phi} = -mgb \sin \phi \tag{9}$$

式(9)就是理论力学教科书[1]-[11]中所给出的不考虑轴承摩擦的复摆运动微分方程。对比以上两式，可以

看出：考虑轴承摩擦的复摆运动微分方程要比不考虑轴承摩擦的复摆运动微分方程复杂的多。

考虑到微分方程(8)为隐式形式(该方程的两端都含有 $\dot{\varphi}$ )，为了便于数值求解(数值积分)，从该方程中解出 $\dot{\varphi}$ ，即转变为如下的显式形式：

$$\ddot{\varphi} = -\frac{q + \text{sign}(\dot{\varphi})\sqrt{q^2 - pr}}{p} \quad (10)$$

式中

$$p = J^2 + f^2(J^2 - m^2b^2R^2)\text{sign}^2(\dot{\varphi}) \quad (11)$$

$$q = mgb\left[J + f^2(J - mR^2)\text{sign}^2(\dot{\varphi})\right]\sin\varphi \quad (12)$$

$$r = m^2\left\{g^2b^2\sin^2\varphi + f^2\left[g^2b^2\sin^2\varphi - R^2(b^2\dot{\varphi}^4 + 2gb\dot{\varphi}^2\cos\varphi + g^2)\right]\text{sign}^2(\dot{\varphi})\right\} \quad (13)$$

在给定复摆运动的初始条件后，采用 MATLAB ode45 算法[12]对微分方程(10)进行数值积分，即可获得考虑轴承摩擦的复摆运动规律。

### 3. 算例

如图 1 所示的复摆，其参数如下：复摆的质量  $m = 3.7440 \text{ kg}$ ，重心  $C$  到转轴中心  $O$  的距离  $b = 0.3 \text{ m}$ ，复摆对转轴  $O$  的转动惯量  $J = 0.4493 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ，轴孔(轴承)半径  $R = 0.01 \text{ m}$ ，轴孔和轴之间的摩擦因数  $f = 0.28$ ，重力加速度  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ ，复摆的初始摆角  $\varphi(0) = \pi/6$ ，初始角速度  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ，试确定复摆的摆动规律。

在已知上述参数的情况下，采用 MATLAB ode45 算法[12]对微分方程(10)进行数值积分，可获得如图 3 所示的实线所代表的计入轴承摩擦情况下的复摆运动规律。同理，采用 MATLAB ode45 算法对微分方程(9)进行数值积分，可获得如图 3 所示的虚线所代表的不考虑轴承摩擦情况下的复摆运动规律。

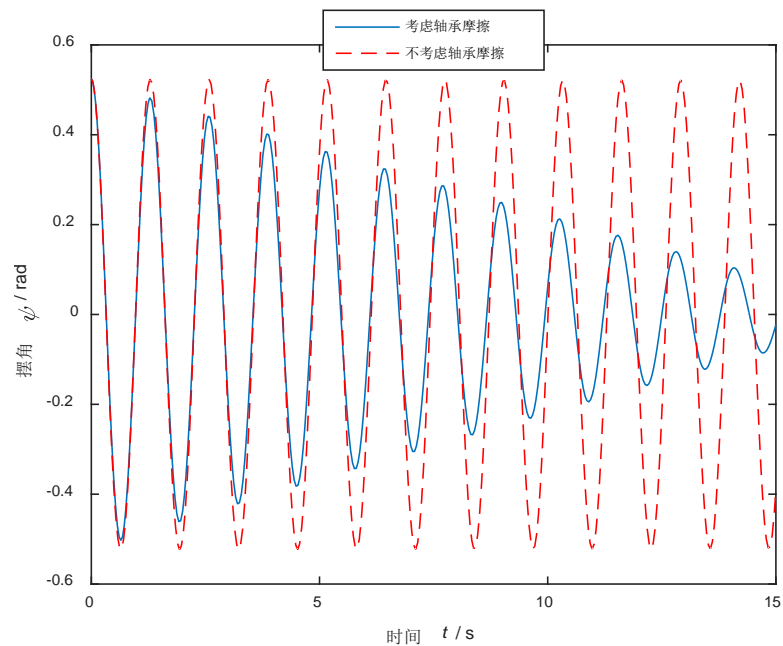


Figure 3. The motion responses of a Compound pendulum

图 3. 复摆运动规律

从图 3 可以清楚地看出：两种情况下所获得的复摆运动规律是完全不同的，在考虑轴承摩擦的情况下所获得的复摆运动为减幅摆动(这与实际观察到的情况相一致)；而在不考虑轴承摩擦的情况下所获得的复摆运动为等幅摆动。

#### 4. 结束语

针对理论力学教科书[1]-[11]中列举过的一个有关复摆运动的问题进行了更为深入的研究，研究当中考虑了理论力学教科书中未曾考虑过的轴承摩擦的影响因素，建立了计入轴承摩擦影响的复摆运动微分方程，在此基础上，通过对一个具体算例的数值仿真，说明了考虑和不考虑轴承摩擦的两种情形下的复摆运动的不同。本文的研究对于其它需要考虑轴承或铰链摩擦影响的动力学建模问题也具有一定的参考价值。

#### 基金项目

国家自然科学基金(11672237)资助。

#### 参考文献

- [1] 和兴锁, 张劲夫. 理论力学[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [2] 支希哲. 理论力学[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2017.
- [3] 税国双. 理论力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
- [4] Gross, D., *et al.* (2014) Engineering Mechanics 3. 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-53712-7>
- [5] 李明宝. 理论力学[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2014.
- [6] 邓国红. 理论力学[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2013.
- [7] 金江. 理论力学[M]. 南京: 东南大学出版社, 2013.
- [8] 赵晓军, 赵永刚. 理论力学[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2011.
- [9] 邱秀梅, 刘燕, 李明宝. 理论力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2009.
- [10] 刘俊卿. 理论力学[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2008.
- [11] 武清玺, 冯奇主. 理论力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [12] Butt, R. (2009) Introduction to Numerical Analysis Using MATLAB. Jones and Bartlett Publisher, Sudbury.

#### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2325-498X, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>  
期刊邮箱: [ijm@hanspub.org](mailto:ijm@hanspub.org)