

# Analysis of the Strain Field of 45# Cantilever Beam under Tiny External Forces Based on Digital Image Correlation Method and Finite Element Analytic Method

Yizhi Li<sup>1</sup>, Yuanyuan Zhang<sup>2</sup>, Jie Xia<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Manufacturing Science and Engineering, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan

<sup>2</sup>School of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan  
Email: zhyy0601@163.com

Received: Aug. 22<sup>nd</sup>, 2018; accepted: Sep. 3<sup>rd</sup>, 2018; published: Sep. 10<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

This paper uses the digital image correlation method and the finite element analysis to analyze the strain field of 45# steel cantilever beam. Firstly, the strain fields of the cantilever beam are calculated employing MATLAB 2D digital image correlation software Ncorr, and the corresponding analyses are given. Then, simulation results of the strain fields of the tested materials were carried out by using the model building software Pro/E and the Static Mechanical module under the finite element calculation commercial software Ansys 15.0. Comparing the calculation results with the simulation results, it can be seen that the results of Ncorr software and commercial software are in good agreement with each other. All of the results show that the farther the observation point is away from the position of the force, the smaller the stress is.

## Keywords

Cantilever Beam, Digital Image Correlation, Finite Element Analysis, Strain Analysis

---

# 基于数字图像相关和有限元法分析45 # 钢悬臂梁在微小外力下的应变场

李义之<sup>1</sup>, 张元元<sup>2</sup>, 夏杰<sup>2</sup>

<sup>1</sup>西南科技大学制造科学与工程学院, 四川 绵阳

<sup>2</sup>西南科技大学理学院, 四川 绵阳  
Email: zhyy0601@163.com

**文章引用:** 李义之, 张元元, 夏杰. 基于数字图像相关和有限元法分析 45 # 钢悬臂梁在微小外力下的应变场[J]. 力学研究, 2018, 7(3): 95-104. DOI: 10.12677/ijm.2018.73011

收稿日期：2018年8月22日；录用日期：2018年9月3日；发布日期：2018年9月10日

## 摘要

本文利用数字图像相关法和有限元分析对45#钢悬臂梁的局部应变场进行分析。首先，基于2D数字图像相关软件Ncorr对悬臂梁的应变场进行计算，并给出相应的分析。其次，借助模型建立软件Pro/E和有限元计算商业软件Ansys 15.0下的Static Mechanical模块对被测材料进行应变模拟仿真。最后，对比测量结果与仿真结果可看出Ncorr软件和商业软件得出的结果相吻合，均得出观测点离作用力位置距离越远，应力越小的应力变化趋势。

## 关键词

悬臂梁，数字图像相关，有限元分析，应变分析

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在力学的发展进程中，实验研究扮演着重要角色。力学有多种有效的测量方法，其中光学测量具有非接触、高精度等优点。光学测量方法[1]包括数字散斑、数字图像相关等多种测量方法。数字图像相关法是一种基于数字图像处理和分析技术的新型非接触式光测技术。自上世纪80年代由Peter教授和Ranson教授[2]提出以来，国内外均提出大量的研究。文献[3]基于最小二乘拟合的数字图像相关法对应变场进行测量，文献[4]提出并实现了一种基于数字图像相关法的快速人体测量技术，文献[5]基于数字图像相关方法对沥青混合材料疲劳性能进行了研究。数字图像相关法现已广泛应用于生物材料、聚合物等领域。

有限元分析法，也称为有限元法[6]，是解决工程和数学物理问题的一种数值方法，其为材料力学模拟仿真提供了方便。典型的有限元问题包括热传导、结构分析、流体流动、电磁势和质量传输。有限元分析可对每个小单元得出近似解，模拟出材料的扭曲或弯曲程度，并显示位移和应变的分布。文献[7]运用有限元的思想，将悬臂梁化成若干三角形单元，考虑其单元的位移。文献[8]利用有限元分析法对带悬臂梁段拼接的异型节点弱轴连接形式的破坏形态及抗震性能进行了研究。

圣维南原理(或局部作用原理)是弹性力学中的基础性原理，法国力学家圣维南于1855年提出的。它是指在弹性体一小块面积(或体积)上作用的平衡力系在弹性体内部所引起的内力，随着与力系作用位置的距离的增大而迅速衰减，在远离作用位置时，内力很小，可以忽略不计[9]。

从对文献的收集、整理中看出圣维南原理已广泛应用于力学与工程中，但专门进行实验验证圣维南原理的文章少见报道。此外，目前还很少有研究者将数字图像相关法和有限元分析结合起来实验研究悬臂梁的受力情况。事实上，将数字图像相关法和有限元分析结合起来研究悬臂梁的受力情况是很有意义的。从理论上，有限元仿真分析得到悬臂梁的受力分布的情形。通过数字图像相关结合具体的试验得到悬臂梁的受力分布的情形。如果两者的结果一致，则可相互说明彼此的结果是可信服的。另外，也可为试验研究提供一种新的思路和途径。为此，本文在搭建的数字图像摄像系统的基础上，利用数字图像相关方法和有限元分析对45#钢悬臂梁进行应变分析。首先，基于2D数字图像相关软件Ncorr，对悬臂梁应变

场进行了计算。进一步,利用工程建模软件对被测材料的形变量与应变场进行仿真分析。然后,基于 Ncorr 提取数据方便的特点,将提取的数据进行可视化分析。最后,对比 Ncorr 软件和有限元分析得到的结果,检验其结果与圣维南原理的吻合度。

## 2. 数字图像相关基本原理

数字图像相关法利用摄像机拍摄变形前后的被测物体表面的数字图像获得被测物体各点的位移及应变,其中原始图像称为“参考图像”,变形后的图像称为“目标图像”。参考图像的灰度记为  $f(x,y)$ ,目标图像的灰度为  $g(x',y')$ 。首先,取某待求点  $p(x_0,y_0)$  为中心的  $(2M+1)\times(2M+1)$  像素大小的正方形为参考图像子区。其次,在变形前后的图像中通过一定的搜索方法计算相关函数的值。最后,通过相关系数数值矩阵中最大或者最小点  $q(x_1,y_1)$  确定目标图像子区的中心点,最后确定参考图像子区中心点的  $x$  轴和  $y$  轴方向的位移分量  $u$  和  $v$  的大小,具体见图 1。

由于变形后的图像子区不仅中心位置会发生变化,而且形状也可能发生变化。因此,通过“形函数”和待定参数矢量  $\bar{P} = \left( u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$  将变形前后图像子区中对应点的坐标  $(x,y)$  和  $(x',y')$  相互联系起来。本文采用一阶形函数来刻画变形前后点的位置关系,

$$\begin{cases} x' = x + u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \\ y' = y + v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  为图像子区的位移梯度,  $\Delta x, \Delta y$  为点  $(x,y)$  到参考图像子区中心点  $(x_0,y_0)$  的距离。因此,子区内任一点  $(x,y)$  在变形后的位置  $(x',y')$  可以用子区中心点的位移和位移梯度表示。

数字图像相关方法以相关函数为判断依据,在变形后的图像中搜索,找到与变形前图像子区的相关函数为极值的子区。本文采用归一化最小平方距离函数,其表达式为

$$C_{f,g}(\bar{P}) = \sum_{x=-M}^M \sum_{y=-M}^M \left[ \frac{f(x,y)}{\sqrt{\sum_{x=-M}^M \sum_{y=-M}^M f^2(x,y)}} - \frac{g(x,y)}{\sqrt{\sum_{x=-M}^M \sum_{y=-M}^M g^2(x,y)}} \right] \quad (2)$$

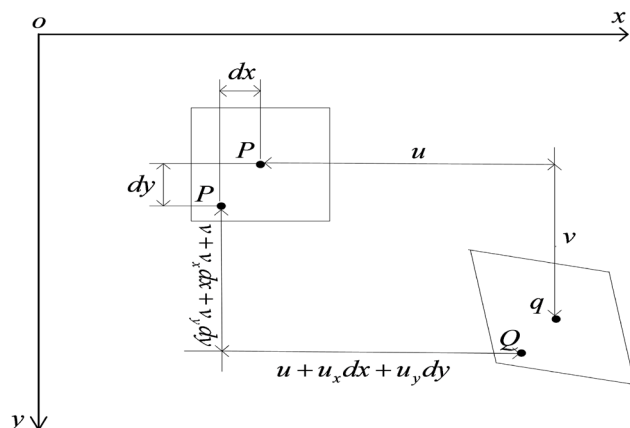
式中,  $M$  为计算子区表征值,  $f_m, g_m$  分别为变形前后子集灰度值。参考图像和目标图像子区灰度平均值分别为  $f_m = \frac{1}{(2M+1)^2} \sum_{x=-M}^M \sum_{y=-M}^M f(x,y)$ ,  $g_m = \frac{1}{(2M+1)^2} \sum_{x=-M}^M \sum_{y=-M}^M g(x',y')$ 。在归一化最小平方距离函数中,相关系数越接近于 0,相关性越强,接近度越高。

## 3. 试验测量与分析

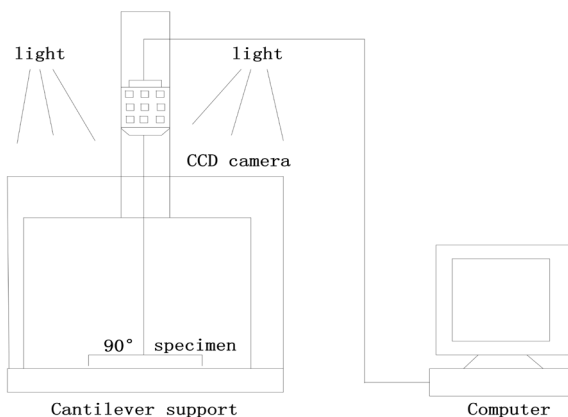
### 3.1. 数字图像测量系统和试验材料介绍

本试验搭建的平台示意图见图 2,测量平台主要包括 LED 照明灯、CCD 相机,数字采集和数字化设备、计算机。实验所用 CCD 相机分辨率为  $4324 \text{ pix} \times 3288 \text{ pix}$ ,图像中  $1 \text{ pix}$  (1 个像素点)代表  $0.0198 \text{ mm}$ 。在实验过程中,CCD 相机与样本表面垂直,以消除离面位移对测量结果带来的误差。

本实验材料采用 45#号平板钢,其长度为  $509 \text{ mm}$ ,宽度为  $88 \text{ mm}$ ,厚度为  $9 \text{ mm}$ ,所用平板钢的材料性能参数:密度为  $7.85 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ ,弹性模量为  $210 \text{ Gpa}$ ,柏松比为  $0.31$ 。



**Figure 1.** Diagram of image subareas before and after deformation  
**图 1.** 变形前后图像子区示意图



**Figure 2.** Digital image measurement system  
**图 2.** 数字图像测量系统

### 3.2. 实验具体过程

1) 人工散斑: 在实验开始前需要对样本喷洒人工散斑, 具体做法为在试样表面喷上一薄层白色油漆作为底色, 然后再喷上黑色油漆, 从而得到黑白人工散斑。

2) 固定样本: 实验中悬臂梁固定端四点固定在点胶机上, 其中第一颗螺母距离梁的边缘为 40 mm, 第二颗螺母距离边缘为 112 mm, 第一排螺母与第二排螺母间距 72 mm, 实验中在矩形梁自由端施加 5 N 的外力, 同时采集施加负荷前后的图像。其装置示意图如图 3 所示。

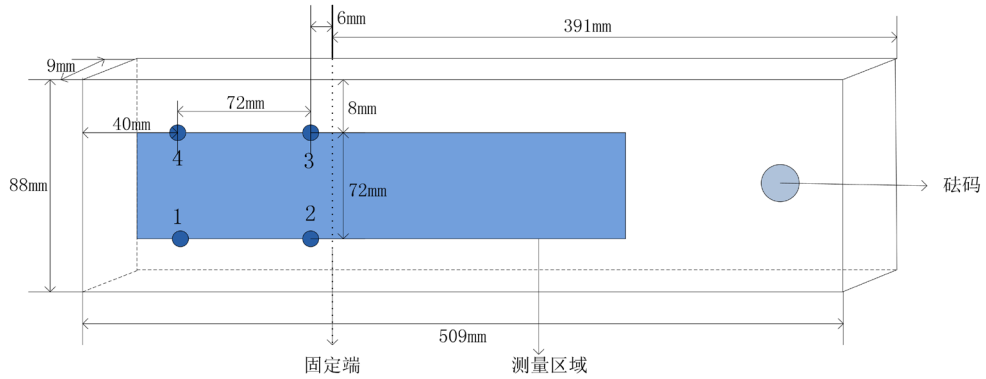
将参考图像和目标图像裁剪并拼接出 8400 pix × 2472 pix 大小的图像, 未加载负荷前的图像(参考图像)见图 4, 加载负荷后的图像(目标图像)见图 5。

3) 实验参数设置: 数字图像采集后, 利用 Ncorr 软件对位移场和应变场进行分析。利用 Ncorr 软件计算应变场时, 从参考图像中选择一个子集, 并在变形图像中跟踪其相应位置。具体计算中, 设置圆形子集半径和子集间距为 110 pix 和 4 pix, 应力半径为 100 pix。

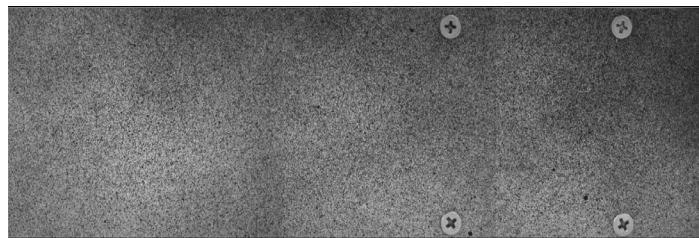
### 3.3. 测量结果与分析

本小节在图 2 的数字图像测量平台上对 45# 平板钢在 Ncorr 软件和模拟仿真试验下进行应变分析, 给出应变场的等高线图和应力变化趋势图。借助模型建立软件 Pro/E 和有限元分析软件 Ansys R15.0 下的

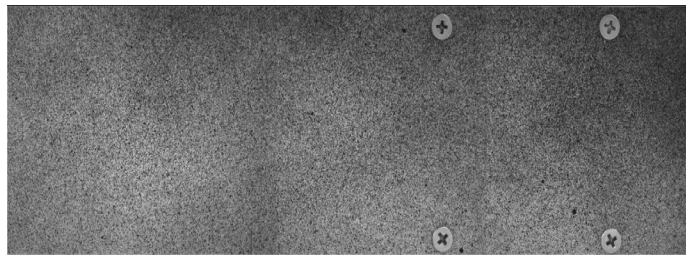
Static Mechanical 模块对被测材料进行仿真分析。仿真模拟过程如下：1) 以图 3 的左下角为坐标原点，水平向右为 y 轴，竖直向上为 x 轴，朝里为 z 轴，建立空间直角坐标系。2) 在悬臂梁自由端施加 5 N 的外力，进行有限元分析，所得结果见图 7 和图 9。另一方面，基于 Ncorr 得到的结果见图 6 和图 8。



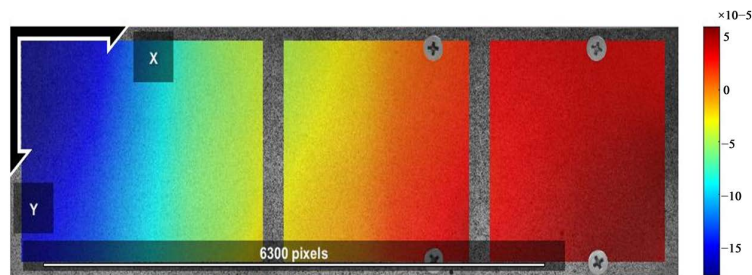
**Figure 3.** Sample image collection diagram  
**图 3.** 样本图像采集示意图



**Figure 4.** Image before loading (reference image)  
**图 4.** 加载负荷前的图像(参考图像)



**Figure 5.** Image after loading (target image)  
**图 5.** 加载负荷后的图像(目标图像)



**Figure 6.** Trend of  $E_{xx}$  in Ncorr software  
**图 6.** Ncorr 软件下  $E_{xx}$  的变化趋势

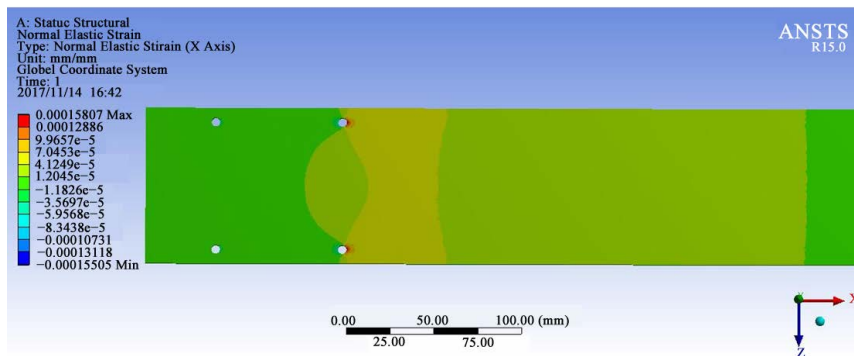


Figure 7. Trend of in ansys R15.0  
 图 7. 仿真软件下的变化趋势

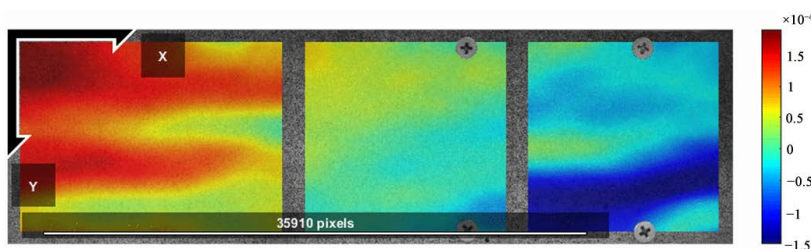


Figure 8. Trend of  $E_{yy}$  in Ncorr software  
 图 8. Ncorr 下  $E_{yy}$  的变化趋势

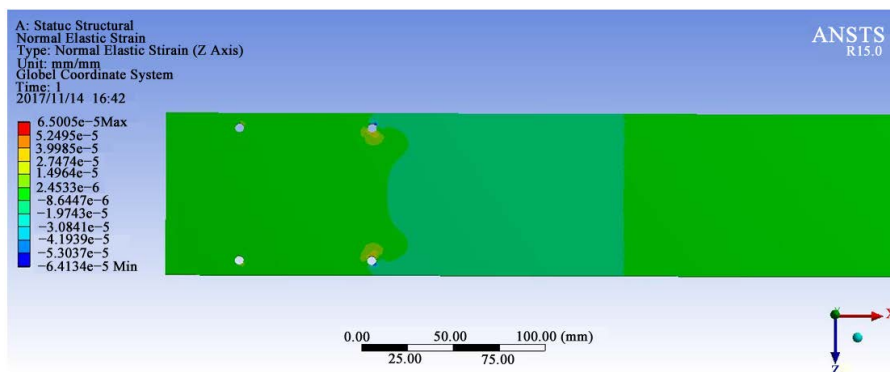


Figure 9. Trend of in ansys R15.0  
 图 9. 仿真软件下的变化趋势

在图 6 中, 沿着 X 方向(自由端到固定端)来看,  $E_{xx}$  (X 方向的应变)从  $1.8 \times 10^{-4}$  逐渐减小到 0, 又从 0 又逐渐增大  $0.5 \times 10^{-4}$ 。另一方面, 沿着 Y 方向来看,  $E_{xx}$  从中心向两侧呈对称分布。图 7 也展示出了相同的规律。利用数字图像相关法和有限元分析, 得出 45#钢悬臂梁  $E_{xx}$  随着施加力的距离的增大而减小。

在图 8 中,  $E_{yy}$  (Y 方向的应变)沿着 X 方向来看, 从  $1.5 \times 10^{-4}$  逐渐减小到 0, 又从 0 逐渐增大到  $1 \times 10^{-4}$ 。沿着 Y 轴方向来看,  $E_{yy}$  沿中心向两侧呈对称分布。由模拟仿真软件(见图 9)悬臂梁  $E_{yy}$  应变分布情况同样有类似的结果。 $E_{yy}$  在两种实验条件下, 均能得出 45#钢随着作用力位置的增大应力减小的趋势。

从图 6 到图 9 中, 45#钢悬臂梁应变分布情况利用 Ncorr 计算的结果与仿真软件仿真的结果相吻合, 均反映出弹性体一小部分面积(或体积)上作用的平衡力系在弹性体内部所引起的内力, 随着与力系作用位置的距离的增大而逐渐衰减, 到某一位置时内力很小, 可以忽略不计。

进一步, 基于 2D 数字图像相关软件 Ncorr 对所测材料依赖性不强和数据提取方便的特点, 下面给出 Ncorr 软件下数据的一些可视化结果。对于  $E_{xx}$  和  $E_{yy}$  的横向变化趋势(从自由端到固定端), 见图 10a 和图 11a, 分别探讨了 ROI 上边界, 离 ROI 上边界  $\frac{1}{3}$ , 离 ROI 上边界  $\frac{2}{3}$  处, ROI 下边界条件下 45#钢悬臂梁应变的变化趋势, 可以得到从自由端到固定端, 应变逐渐减小到 0, 又从 0 逐渐增大, 为此, 可得出随着作用力位置的增大, 应力逐渐衰减, 在某一位置减小为 0。对于  $E_{xx}$  和  $E_{yy}$  的纵向变化趋势, 见图 10b 和图 11b, 分别探讨了 ROI 左边界, 离 ROI 左边界  $\frac{1}{3}$ , 离 ROI 左边界  $\frac{2}{3}$  处, ROI 右边界条件下 45#钢悬臂梁应变的变化趋势, 均反映出应变从中心向两侧呈对称分布。

最后, 基于可视化结果更直观的特点, 给出了应变在 3 个被测区域的三维应变图, 如图 12、图 13 所示。图 12、图 13 中, 更直观的反映出自由端、中间区域和固定端区域应变的变化趋势。

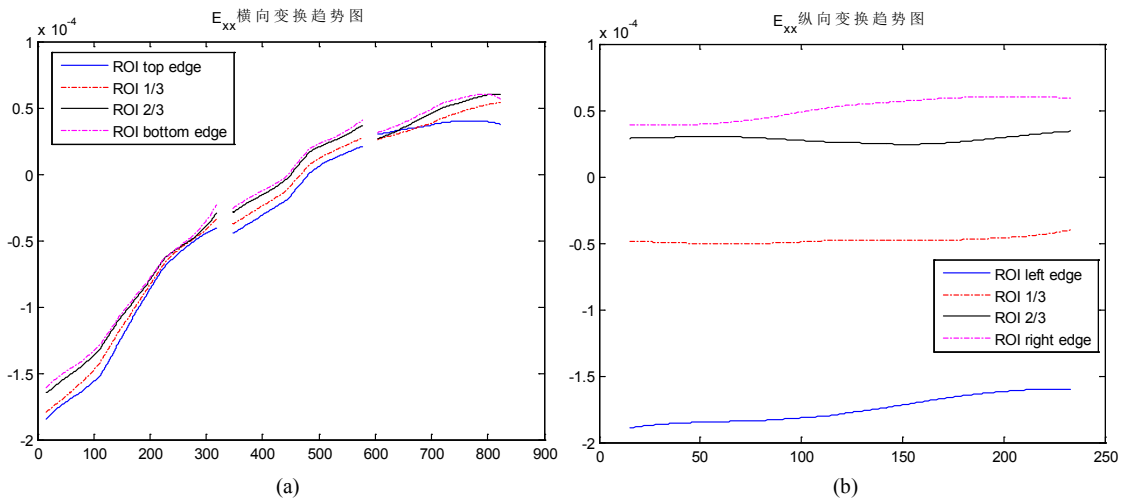


Figure 10. Trend of  $E_{xx}$  Transverse (a) and  $E_{xx}$  Lengthwise (b)

图 10.  $E_{xx}$  横向(a)和  $E_{xx}$  纵向(b)的变化情况

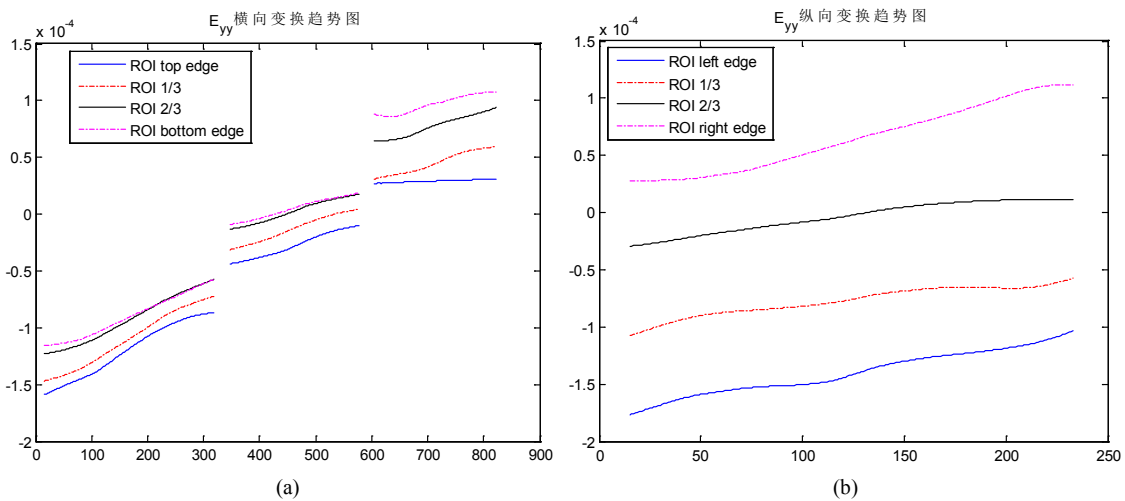


Figure 11. Trend of  $E_{yy}$  Transverse (a) and  $E_{yy}$  Lengthwise (b)

图 11.  $E_{yy}$  横向(a)和  $E_{yy}$  纵向(b)变化情况

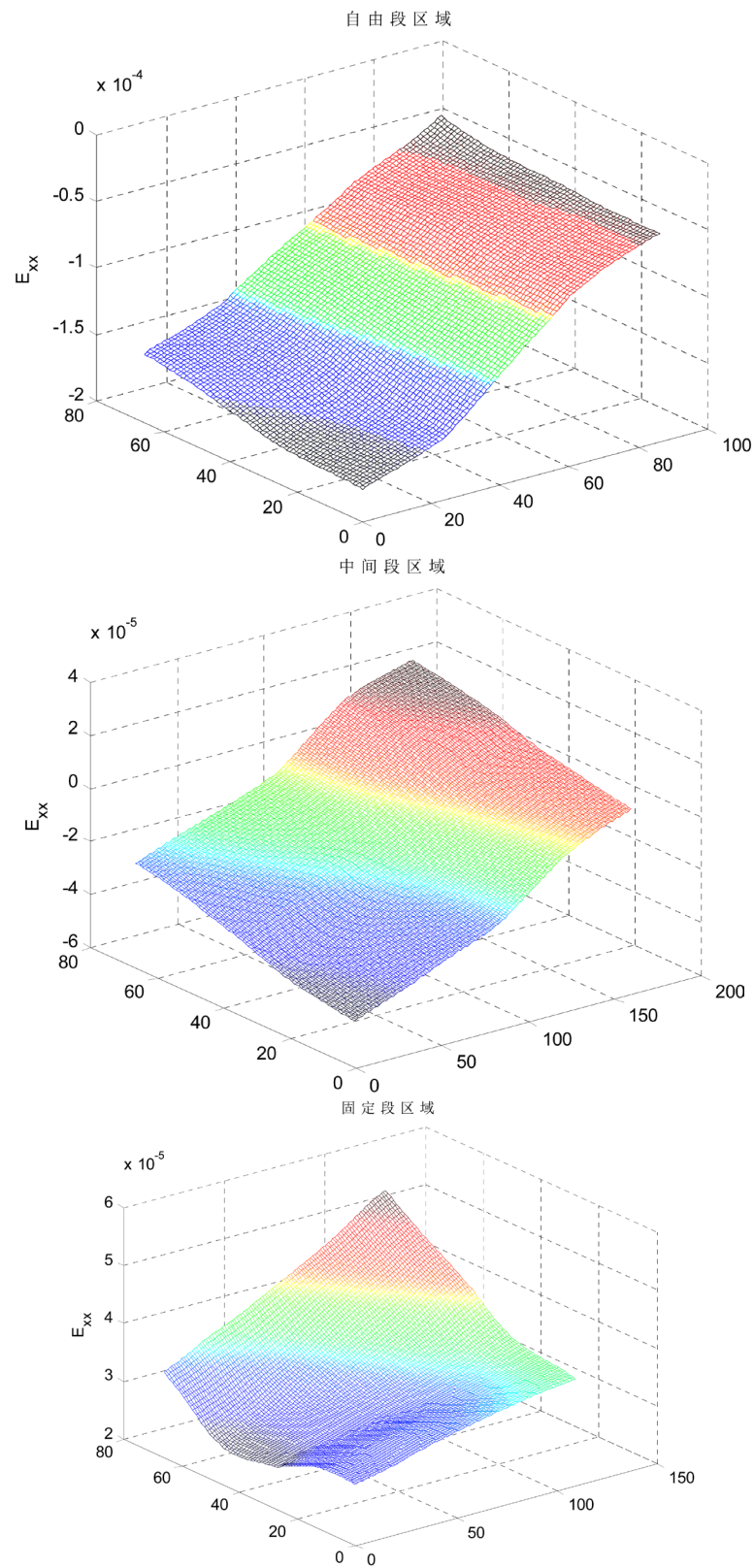
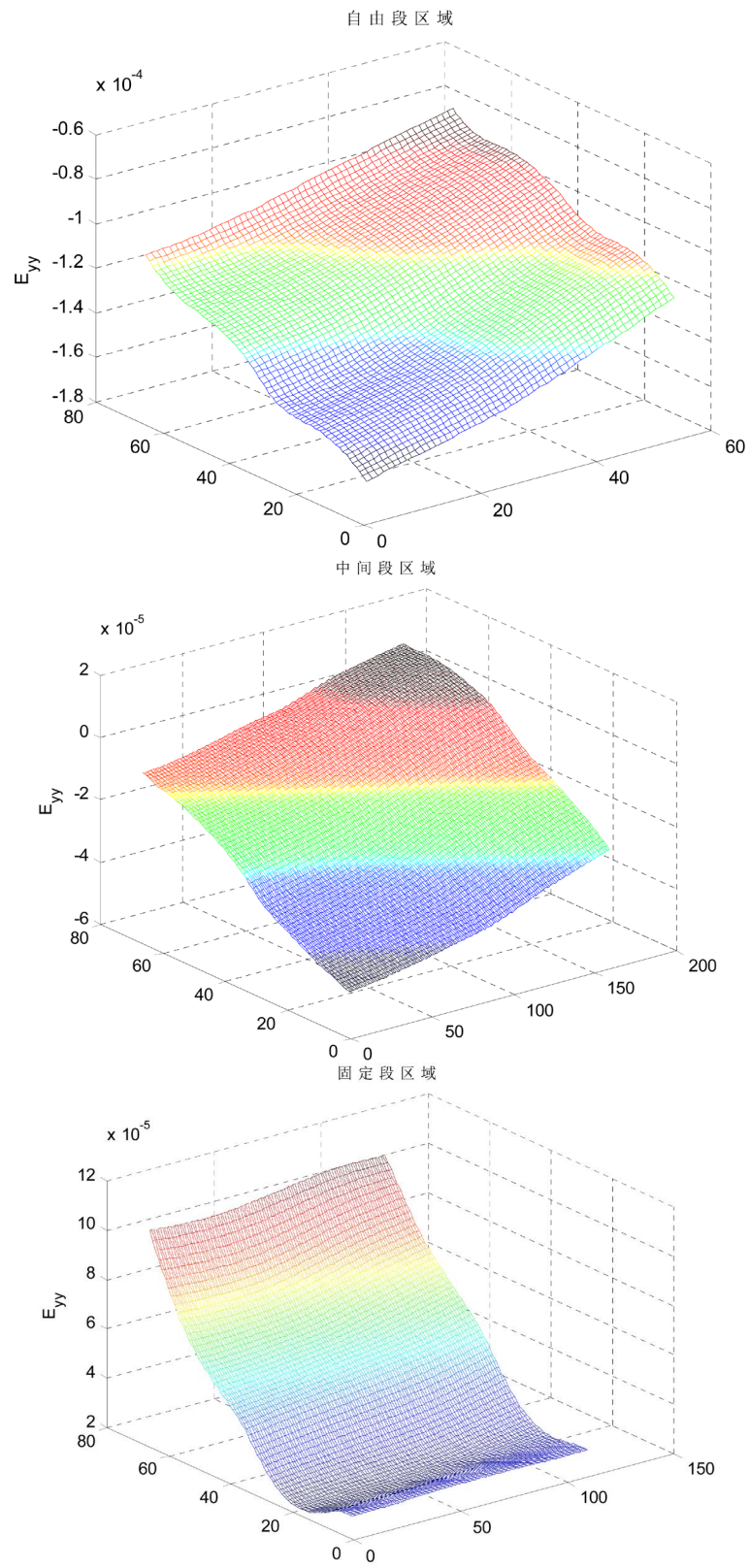


Figure 12.  $E_{xx}$  Strain situation in different regions  
图 12. 不同测量区域的  $E_{xx}$  应变情况





**Figure 13.**  $E_{yy}$  Strain situation in different regions

**图 13.** 不同测量区域的  $E_{yy}$  应变情况

从上面的图 10~图 13 中直观的反映出悬臂梁自由端到固定端应变的变化趋势：观测点离作用力位置距离越远，应力越小。

#### 4. 结论

本文对 45#钢悬臂梁利用数字图像相关和有限元分析，为验证圣维南原理的正确性提供了一种新的技术。基于 MATLAB 的 2D 数字图像相关软件 Ncorr 和模型建立软件 Pro/E 和有限元计算商业软件 Ansys 15.0 下的 Static Mechanical 模块对#45 号平板钢的应变场进行了测量，得出以下结论。通过对比数字图像相关和有限元分析的计算结果可得 Ncorr 软件和 Ansys 软件在#45 号平板钢的应变场测量结果相吻合。45# 钢悬臂梁应变均反映出弹性刚体上一小块面积(或体积)内的载荷所引起的物体的应力，随着作用力位置的增大而逐渐减小，且当距离很远时，应变很小，可以忽略。在今后的研究中，可将本文的研究思路与方法应用在生物医学、航空材料等方面。

#### 致 谢

感谢西南科技大学计算机学院医学影像与神经网络实验室提供的测试平台，同时感谢 Ncorr 软件开发作者 Justin Blaber。

#### 基金项目

感谢西南科技大学龙山学术人才科研支持计划“研究专项”(No. 17LZXY20)的支持。

#### 参考文献

- [1] Zhang, D., Zhang, X. and Cheng, G. (1999) Compression Strain Measurement by Digital Speckel Correction. *Experimental Mechanics*, **39**, 62-65. <https://doi.org/10.1007/BF02329302>
- [2] Peter, W.H. and Ranson, W.F. (1981) Digital Imaging Techniques in Experimental Stress Analysis. *Optical Engineering*, **21**, 427-431.
- [3] 张金奎, 李亚智, 张丽, 等. 基于移动最小二乘拟合的数字图像相关应变测量[J]. 科学技术与工程, 2010, 10(3): 686-691.
- [4] 梁瑜, 梁晋, 王晓光, 等. 采用数字图像相关法的人体测量[J]. 长春理工大学学报(自然科学版), 2017, 40(2): 127-131.
- [5] Jiang, J.W. and Ni, F.J. (2017) Evaluation of Fatigue Property of Asphalt Mixtures Based on Digital Image Correlation Method. *Journal of Southeast University (English Edition)*, **33**, 216-223.
- [6] Yuan, J., Fan, B., Wan, Y., et al. (2008) The Control Technique and the Finite Element Analysis (FEA) of Active Polishing Lap Based on the ANSYS. *World Automation Congress, WAC*, Hawaii, HI, 28 September-2 October 2008, 1-4.
- [7] 杨帆, 宋小军. 悬臂梁的有限元分析[J]. 科技广场, 2008, 25(5): 131-132.
- [8] 黄鹏刚, 卢林枫, 张顺. 带悬臂梁段拼接的异型节点弱轴连接的抗震性能有限元分析[J]. 建筑技术, 2017, 48(4): 371-374.
- [9] Saint-Venant de AJCB. (1855) Mémoiresur la torsion des prismes, Mémoiresprésentes pars divers Savants à l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France. Vol. 14, 233-560.

**知网检索的两种方式：**

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2325-498X，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[ijm@hanspub.org](mailto:ijm@hanspub.org)