

简谐振动初相位表达式的研究

张劲夫

西北工业大学工程力学系, 陕西 西安
Email: jfzhang@nwpu.edu.cn

收稿日期: 2020年11月18日; 录用日期: 2020年12月11日; 发布日期: 2020年12月18日

摘要

简谐振动的理论内容见于诸多的振动力学和理论力学等书籍中, 然而在关于简谐振动的初相位表达式上却存在着一个不易察觉的错误, 本文指出和论证了这一错误, 并在此基础上, 给出了简谐振动初相位的正确表达式。

关键词

简谐振动, 初相位, 振幅, 频率

Research on the Expression for the Initial Phase of Simple Harmonic Vibration

Jinfu Zhang

Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi
Email: jfzhang@nwpu.edu.cn

Received: Nov. 18th, 2020; accepted: Dec. 11th, 2020; published: Dec. 18th, 2020

Abstract

The content of simple harmonic vibration is presented in many books on vibration mechanics and theoretical mechanics. However, there is an imperceptible error in the initial phase expression of harmonic vibration, which is pointed out and demonstrated in this paper, and the correct expression of the initial phase of harmonic vibration is given.

Keywords

Simple Harmonic Vibration, Initial Phase, Amplitude, Frequency

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

简谐振动是机械振动理论中最为基础的内容之一,许多复杂的振动可以看作是由多个简谐振动叠加而成。因此,常见的振动力学和理论力学等书籍(如[1]-[48])中都介绍过有关简谐振动的内容,然而所给出的简谐振动的初相位表达式上却存在着一个不易察觉的错误,本文指出和论证了这一错误,并在此基础上,给出了简谐振动初相位的正确表达式,显然这一工作对于进一步充实和发展简谐振动理论都具有重要的意义。

2. 论证

为了说明常见的振动力学和理论力学等书籍(如[1]-[48])中关于简谐振动初相位表达式的错误所在,特将上述文献中关于单自由度系统的线性无阻尼自由振动的微分方程及其求解过程列写如下:

单自由度系统的线性无阻尼自由振动微分方程的标准形式为[1]-[48]

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (1)$$

式中 x 是描述振动位置的广义坐标, ω_n 是系统的固有圆频率。容易求得方程(1)的解为[1]-[48]

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2)$$

式中 $x_0 = x(0)$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$ 。式(2)也可以写成简谐振动的形式[1]-[48]

$$x = A \sin(\omega_n t + \theta) \quad (3)$$

式中

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (4)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}\right) \quad (5)$$

式(1)~(5)就是文献[1]-[48]针对单自由度系统的线性无阻尼自由振动所列出的有关方程和表达式,这些方程和表达式构成了简谐振动理论的数学描述。这里需要指出,其中的初相位表达式(5)存在错误,因此,

将该式代入简谐振动表达式(3)后,所得到的描述简谐振动的运动方程 $x = A \sin\left[\omega_n t + \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}\right)\right]$ 也存

在着对应的错误。具体证明过程如下:

针对式(2), 设

$$\sin \theta^* = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}} \quad (6)$$

$$\cos \theta^* = \frac{\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}}{\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}} \quad (7)$$

这样式(2)就可以等价地改写为

$$x = A \sin(\omega_n t + \theta^*) \quad (8)$$

这里振幅 A 的表达式见式(4)，但是初相位 θ^* 的正确表达式却不同于式(5)。下面将由式(6)和式(7)出发，推出初相位 θ^* 的正确表达式，并以此说明式(5)的错误所在。为此，针对初始条件 x_0 和 \dot{x}_0 ，分以下四种情形进行讨论：

情形(1)：当 $x_0 > 0$ 且 $\dot{x}_0 < 0$ 的情形。在这种情形下，由式(6)和式(7)可以看出： $\sin \theta^* > 0$ ， $\cos \theta^* < 0$ ，因此， θ^* 落在第二象限内，又因为 $\tan \theta^* = \frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} < 0$ ，故可以将初相位 θ^* 表达为 $\theta^* = \pi + \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}\right)$ ，显然该式不同于文献[1]-[48]中所给出的初相位表达式(5)，两者的相差正好为 π ，即两者是反相的，因此，在情形(1)下，式(5)是错误的。

情形(2)：当 $x_0 < 0$ 且 $\dot{x}_0 < 0$ 的情形。在这种情形下，由式(6)和式(7)可以看出： $\sin \theta^* < 0$ ， $\cos \theta^* < 0$ ，因此， θ^* 落在第三象限内，又因为 $\tan \theta^* = \frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} > 0$ ，故可以将初相位 θ^* 表达为 $\theta^* = \pi + \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}\right)$ ，显然该式不同于式(5)，两者的相差正好为 π ，即两者是反相的，因此，在情形(2)下，式(5)还是错误的。

情形(3)：当 $x_0 > 0$ 且 $\dot{x}_0 > 0$ 的情形。在该种情形下，由式(6)和式(7)可以看出： $\sin \theta^* > 0$ ， $\cos \theta^* > 0$ ，因此， θ^* 落在第一象限内，又因为 $\tan \theta^* = \frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} > 0$ ，故可以将初相位表达为 $\theta^* = \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}\right)$ ，显然该式与(5)相同，因此，在情形(3)下，式(5)是正确的。

情形(4)：当 $x_0 < 0$ 且 $\dot{x}_0 > 0$ 的情形。在这种情形下，由式(6)和式(7)可以看出： $\sin \theta^* < 0$ ， $\cos \theta^* > 0$ ，因此， θ^* 落在第四象限内，又因为 $\tan \theta^* = \frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} < 0$ ，故可以将初相位表达为 $\theta^* = \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}\right)$ ，显然该式与式(5)相同，因此，在情形(4)下，式(5)是正确的。

通过以上的讨论，可以看出：情形(1)和情形(2)可以归并为一种情形，即 $\dot{x}_0 < 0$ 的情形，在这种情形下，初相位的正确表达式为 $\theta^* = \pi + \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}\right)$ ，因此，在该种情形下，文献[1]-[48]中所给出的初相位表达式(5)是错误的，进而将式(5)代入式(3)后所得到的简谐振动规律 $x = A \sin\left[\omega_n t + \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}\right)\right]$ 也是错误的；前述的情形(3)和情形(4)可以归并为另一种情形，即 $\dot{x}_0 > 0$ 的情形，在这种情形下，初相位的正确表达式为 $\theta^* = \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}\right)$ ，即在这种情形下，式(5)是正确的；下面接着讨论在 $\dot{x}_0 = 0$ 的情形下初相位的

正确表达式：在 $\dot{x}_0 = 0$ 的情形下，式(6)和式(7)分别变为 $\sin \theta^* = \frac{x_0}{|x_0|} = \text{sign}(x_0)$ 和 $\cos \theta^* = 0$ ，因此，在这种情形下，初相位可表达为 $\theta^* = \text{sign}(x_0) \frac{\pi}{2}$ 。综合以上各种情形，可见初相位可以最终完整地表达为

$$\theta^* = \begin{cases} \pi + \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}\right), & \dot{x}_0 < 0 \\ \text{sign}(x_0) \frac{\pi}{2}, & \dot{x}_0 = 0 \\ \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}\right), & \dot{x}_0 > 0 \end{cases} \quad (9)$$

这就是简谐振动初相位的正确表达式，该式不同于常见的振动力学和理论力学等书籍(如[1]-[48])中所给出的简谐振动的初相位表达式(5)。

3. 结束语

本文指出并论证了常见的振动力学和理论力学等书籍中关于简谐振动初相位表达式上存在的错误，在此基础上，给出了简谐振动初相位的正确表达式，显然这对于进一步完善和发展简谐振动理论都具有重要的学术意义。

参考文献

- [1] 刘延柱, 陈立群, 陈文良. 振动力学[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 9-10.
- [2] 张义民. 机械振动学基础[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 40-42.
- [3] 胡芑庆, 胡雷, 程哲. 机械振动[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2017: 18-20.
- [4] 苗同臣. 振动力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2017: 12-13.
- [5] 毛君. 机械振动学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2016: 14-15.
- [6] S.S. 拉奥. 机械振动[M]. 第5版. 李欣业, 杨理诚, 译. 北京: 清华大学出版社, 2016: 104.
- [7] 刘钊, 秦仙蓉, 朱传敏, 等. 机械振动[M]. 上海: 同济大学出版社, 2016: 15-16.
- [8] 殷祥超. 振动理论与测试技术[M]. 第2版. 徐州: 中国矿业大学出版社, 2015: 20-21.
- [9] 赵子龙. 振动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2014: 14-15.
- [10] 蔡敢为. 机械振动学[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2012: 20-21.
- [11] 闻邦椿, 刘树英, 张纯宇. 机械振动学[M]. 第2版. 北京: 冶金工业出版社, 2011: 17-18.
- [12] 谢官模. 振动力学[M]. 第2版. 北京: 国防工业出版社, 2011: 25-26.
- [13] 王伟, 赖永星, 苗同臣, 等. 振动力学与工程应用[M]. 郑州: 郑州大学出版社, 2008: 6-7.
- [14] 李惠彬. 振动理论与工程应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2006: 7.
- [15] 方同, 薛璞. 振动理论及应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998: 10-11.
- [16] 黄永强, 陈树勋. 机械振动理论[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996: 18.
- [17] 季文美, 方同, 陈松淇. 机械振动[M]. 北京: 科学出版社, 1985: 8-11.
- [18] 扈英超. 线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 1981: 1-3.
- [19] Balachandran, B. and Magrab, E.B. (2019) Vibrations. 3rd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 151.
- [20] Shabana, A.A. (2019) Theory of Vibration. 3rd Edition, Springer International Publishing AG, Switzerland, 69-75. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-94271-1>
- [21] Busby, H.R. and Staab, G.H. (2018) Structural Dynamics: Concepts and Applications. CRC Press, Boca Raton, 7-9.

- [22] Rao, S.S. (2017) *Mechanical Vibrations*. 6th Edition, Pearson, Hoboken, 136.
- [23] Kelly, S.G. (2012) *Mechanical Vibrations: Theory and Applications*. Cengage Learning, Stamford, 140-141.
- [24] Sinha, A. (2010) *Vibration of Mechanical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 35-36.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511778087>
- [25] Silva, C.W. (2007) *Vibration: Fundamentals and Practice*. 2nd Edition, CRC Press, Boca Raton, 29-31.
- [26] Palm III, W.J. (2007) *Mechanical Vibration*. John Wiley & Sons, Hoboken, 120-122.
- [27] Rao, S.S. (2006) *Vibration of Continuous Systems*. John Wiley & Sons, Hoboken, 33-34.
<https://doi.org/10.1002/9780470117866>
- [28] 苏振超, 薛艳霞, 刘丽丽. 理论力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2019: 394-395.
- [29] 胡文绩, 华蕊, 杨强. 理论力学[M]. 第2版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2018: 316-317.
- [30] 陈建平, 范钦珊. 理论力学[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2018: 378.
- [31] Hibbeler, R.C. (2016) *Engineering Mechanics: Dynamics*. 14th Edition, Pearson Prentice Hall, Hoboken, 643-646.
- [32] 商泽进, 王爱勤, 尹冠生. 理论力学[M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2017: 292-300.
- [33] 曹咏弘. 理论力学[M]. 第3版. 北京: 机械工业出版社, 2017: 370-376.
- [34] 谢传锋, 王琪. 理论力学[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2015: 375.
- [35] 张克猛, 韩海燕, 黎莹. 理论力学[M]. 第2版. 西安: 西安交通大学出版社, 2015: 244-245.
- [36] 东南大学理论力学教研室. 理论力学[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2015: 417.
- [37] 陈立群, 薛纭. 理论力学[M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2014: 190-191.
- [38] 贾启芬, 刘习军. 理论力学[M]. 第3版. 北京: 机械工业出版社, 2014: 339.
- [39] 郭应征, 周志红. 理论力学[M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2014: 386.
- [40] 张速, 吕晓棠. 理论力学[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2013: 308-310.
- [41] 梅凤翔, 尚玫. 理论力学 I [M]. 北京: 高等教育出版社, 2012: 224-225.
- [42] 杨晓华. 理论力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2012: 394-396.
- [43] 李俊峰, 张雄. 理论力学[M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2010: 343-345.
- [44] 顾晓勤, 谭朝阳. 理论力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010: 301-302.
- [45] 王月梅, 曹咏弘. 理论力学[M]. 第2版. 北京: 机械工业出版社, 2010: 373-374.
- [46] 邱秀梅, 刘燕, 李明宝. 理论力学[M]. 第2版. 北京: 中国水利水电出版社, 2009: 292-293.
- [47] 和兴锁. 理论力学(I) [M]. 北京: 科学出版社, 2005: 212-214.
- [48] 谢传锋, 程耀, 王士敏, 等. 动力学 II [M]. 北京: 高等教育出版社, 1999: 44-45.