

# 非均匀准脆性岩土类材料的动态力学本构关系的繁衍与演化

范学如<sup>1,2</sup>, 罗宁<sup>1,2\*</sup>, 曹小龙<sup>1,2</sup>, 蒋立<sup>1,2</sup>, 梁汉良<sup>1,2</sup>, 翟成<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>中国矿业大学深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 江苏 徐州

<sup>2</sup>中国矿业大学力学与土木工程学院, 江苏 徐州

<sup>3</sup>中国矿业大学安全工程学院, 江苏 徐州

Email: \*nluo@cumt.edu.cn, \*greatzc@126.com

收稿日期: 2020年12月17日; 录用日期: 2021年3月15日; 发布日期: 2021年3月22日

## 摘要

本构理论描述的是宏观和细观微观尺度下材料或结构在外载荷作用下的响应, 是力学研究中不可忽视的研究方向, 是材料力学中经久不息的研究课题。本文重点以非均匀介质如岩石或者岩土体、混凝土等准脆性材料为研究对象, 针对采动和强动载环境过程中的关键科学问题, 系统的阐述国内外关于准脆性材料的动态本构关系的繁衍历程、构建起源、发展适用范畴及基本原理。同时, 对常用的几类表征准脆性材料动态力学响应的本构模型进行了系统的理论推导。最后, 针对准脆性材料的动态本构进行了细化分类, 并研究了其相互关系的演化过程。

## 关键词

本构理论, 动态本构关系, 准脆性材料, 非均匀介质, 发展演化

# Propagation and Evolution of Dynamic Mechanical Constitutive Relation of Heterogeneous Quasi-Brittle Materials

Xueru Fan<sup>1,2</sup>, Ning Luo<sup>1,2\*</sup>, Xiaolong Cao<sup>1,2</sup>, Li Jiang<sup>1,2</sup>, Hanliang Liang<sup>1,2</sup>, Cheng Zhai<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>State Key Laboratory of Deep Geotechnical Mechanics and Underground Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou Jiangsu

<sup>2</sup>School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou Jiangsu

<sup>3</sup>School of Safety Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou Jiangsu

Email: \*nluo@cumt.edu.cn, \*greatzc@126.com

\*通讯作者。

文章引用: 范学如, 罗宁, 曹小龙, 蒋立, 梁汉良, 翟成. 非均匀准脆性岩土类材料的动态力学本构关系的繁衍与演化[J]. 力学研究, 2021, 10(1): 29-51. DOI: 10.12677/ijm.2021.101004

## Abstract

Constitutive theory describes the response of material or structure under external load at macro and micro scales. It is a research direction that cannot be ignored in mechanical research and a long-standing research topic in material mechanics. This paper focuses on non-uniform medium such as rock or rock mass, concrete and other quasi brittle materials as the research object, aiming at the key scientific problems in the process of mining and strong dynamic load environment. The development history, origin, application scope and basic principle of dynamic constitutive relation of quasi brittle materials at home and abroad are systematically described. Meanwhile, several kinds of constitutive models which are commonly used to characterize the dynamic mechanical response of quasi brittle materials are systematically deduced. Finally, the dynamic constitutive models of quasi brittle materials are classified and the evolution process of their relationship is studied.

## Keywords

Constitutive Theory, Dynamic Constitutive Relation, Quasi Brittle Materials, Inhomogeneous Medium, Development Process

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

针对岩石或岩土体、混凝土这类准脆性材料，其材料内部存在大量微观裂纹和细观裂纹，这些微、宏观裂纹既有天然生成的，也有人人为导致的，这最终形成了准脆性材料复杂的力学性质。这种准脆性材料的非线性变形，破坏和断裂过程归因于弹塑性，如果仅仅用经典力学和弹塑性理论来解释这类材料的损伤与破坏，这不足以表达准脆性材料在整个变形过程的复杂性，而且材料微观结构的不均匀性也同样被忽略。岩石或岩土体是自然界中各种矿物质与自然地质过程的产物的组合，同时也是由多种胶结物、矿物晶粒等组成的复杂混合物。深部资源开发、智能开采是我国深地科学未来科技发展的重要方向之一。我国埋深 1000 m 以下的煤炭资源非常丰富，主要分布在中东部地区，这类煤矿属于深地矿，其最大的特点就是采动效应强烈以及地应力较高，这对煤炭开采带来了太多的不确定性。煤岩体不仅作为开采的对象，而且也是冲击地压等地质灾害最直接的受体，因此研究动载下煤岩的动力学性能，不管是对提高煤炭的成块率还是从动力灾害的预防来讲都具有重要的指导作用。由于煤岩体自身因素及所处地质条件都具有较大的差异性和复杂性，为研究其在复杂应力状态下的动态力学性能和本构关系，必须进行大量的理论、实验和工程实践的研究。对煤岩体的冲击动力学性质展开研究，这不仅有益于揭示由矿山扰动引起的动力灾害，而且对地下资源的开采也具有深刻的意义，因此国内外学者对煤岩体的动力学特征的研究从来没有停止过。截至目前，相关岩体介质在静载作用下的研究已经取得了丰富的成果，然而在矿岩破碎、油井致裂、隧道开挖和核爆炸防护等研究领域，这些涉及爆炸荷载或冲击荷载作用下的岩石动态力学性能以及其动态损伤问题的研究上仍然存在很多的问题，因此有必要进一步研究岩石或者岩土体

的动态力学本构关系。另一方面,混凝土具有诸多的优点(如抗压强度高、耐久性良好),并且混凝土与钢筋之间可以达到很好的黏结程度,能够制作钢筋混凝土结构复合材料。制作混凝土的材料主要包括砂、石、土和水等,非常容易就地取材,故混凝土材料成为了建筑行业不可缺少的材料之一。如今混凝土已经不仅仅应用于单纯的房屋、桥梁、隧道等基础工程建造,混凝土材料在国防军事方面的应用也很广泛,例如工程防护材料、国防装备掩体等的工程防护结构的构建。因此研究爆炸、冲击荷载下混凝土的力学响应并建立相应的动态力学本构关系亦显得尤为重要。

目前,国内外主要采用霍普金森杆(SHPB)研究准脆性材料动载荷作用下动态力学响应,这归结于SHPB装置能够满足应变率为 $10^{-2} \sim 10^4$ 六个数量级别的动态力学试验,测试范围满足大多数研究课题,包括了一般的机械冲击和爆炸等动载作用情况。根据前人理论研究、试验研究及数值计算研究结果可知,非均匀准脆性材料的本构关系根据其组成成分、结构类型、孕育环境及赋存多场特征的不同,其物理特性、力学特性等存在着显著地区别。文章将主要总结归纳了岩石或者岩土体以及混凝土类材料动态力学本构关系及其构造起源、繁衍发展、动态演化关系及应用范畴。

## 2. 准脆性材料

岩土体、混凝土和煤等材料之所以被称为准脆性材料[1][2],是因为这类材料在静、动荷载下,当自身力学性质,例如,应力、应变和弹性模量超过某一临界值后,材料会出现明显软化现象。准脆性材料的断裂包含几个渐变过程,首先是微观裂纹和细观裂纹的扩散,其次是由宏观裂纹所产生的能量耗散,最后到损伤演变过程[3]。准脆性材料毁坏、损伤一直是固体力学研究中不可规避的问题。

特征长度对应材料微观结构不均匀性的尺度,也就是说,在该尺度范围内,材料的是均质的,若超过该范围,则认为材料是不均质的。在多数情况下,准脆性材料的特征长度在微米和毫米之间,比普通构件的尺寸要大得多。因此,准脆性材料是典型的不均匀材料。另外需要特殊说明的是,随着均匀度的增加,材料的性能会从准脆性变为脆性。

岩石或者岩土体、混凝土作为准脆性材料,其力学性能主要有如下特征:1) 岩石和混凝土达到某一临界条件后,会存在明显的应变软化特性;2) 岩石和混凝土的结构不具有一般性;3) 岩石和混凝土本构力学行为存在时效性;4) 岩石和混凝土具有围压-强度效应;5) 岩石和混凝土是多孔的不均质材料;6) 岩石和混凝土结构在受力破坏后具有分形特性[4]。基于上述特点,描述准脆性材料的动态本构模型大致可分为基于经弹塑性理论模型、弹塑性损伤模型、黏弹性模型、黏弹性损伤模型、黏塑性模型、黏塑性损伤模型以及经典的过应力模型。

## 3. 常用准脆性材料动态本构模型

### 3.1. HJC 模型

HJC模型是由Hilomquist[5]在1993年第14届国际弹道大会上,提出了一种适用于拉格朗日法和欧拉法的高应变率以及高压混凝土损伤本构模型,该模型很好的解释了混凝土材料承受大变形时所产生的塑性行为,同时引入了损伤变量,对动载作用下的混凝土材料的力学性能研究具有重要的指导意义。

HJC模型标准化等效应力定义为:

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{f'_c} \quad (1)$$

式中, $\sigma$ 为实际等效应力, $f'_c$ 为准静态单轴抗压强度。表达式定义为

$$\sigma^* = [A(1-D) + BP^{*N}] [1 - c \ln(\varepsilon^*)] \quad (2)$$

其中  $D$  是损伤参数,  $P^* = P/f'_c$  是归一化压力,  $\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_0$  表示是无量纲应变率, 强度模型如图 1 所示。该模型通过等效塑性应变和塑性体积应变累积损伤可表示为

$$D = \sum \frac{\Delta \epsilon_p + \Delta u_p}{D_1 (P^* + T^*)^{D_2}} \quad (3)$$

式中  $\Delta \epsilon_p$  和  $\Delta u_p$  是等效塑性应变和塑性体积应变,  $D_1$  和  $D_2$  是常数,  $T^* = T/f'_c$  是标准化的最大拉伸静水压力, 损伤模型如图 2 所示。

全致密材料的压力表示为

$$P = K_1 \bar{u} + K_2 \bar{u}^2 + K_3 \bar{u}^3 \quad (4)$$

式中,  $K_1, K_2, K_3$  是材料常数, 修改后的体积应变定义为

$$\bar{u} = \frac{u - u_{lock}}{1 + u_{lock}} \quad (5)$$

式中,  $u_{lock}$  是锁定体积应变,  $p-u$  损伤模型如图 3 所示。

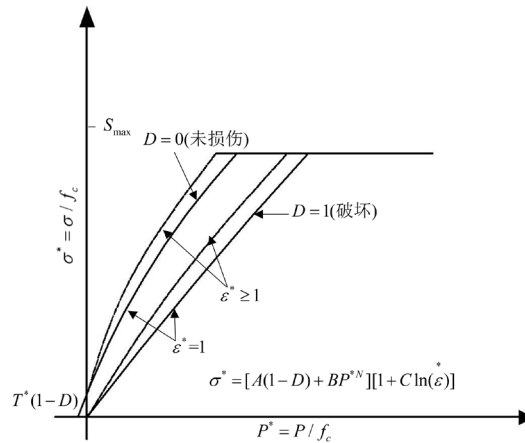


Figure 1. The strength model of HJC model

图 1. HJC 模型的强度模型

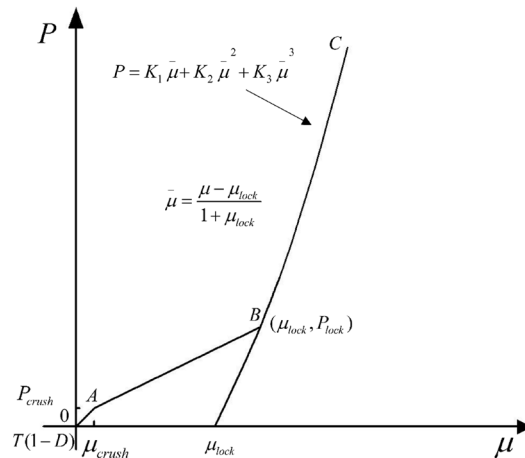
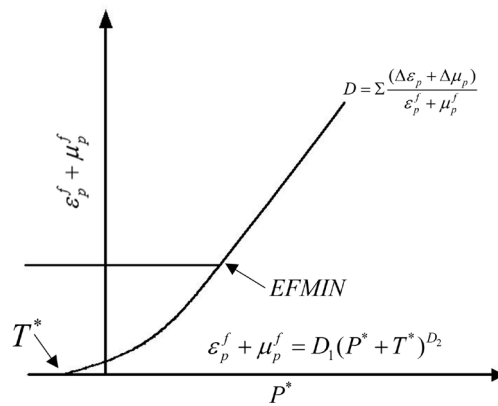


Figure 2. The damage model of HJC model

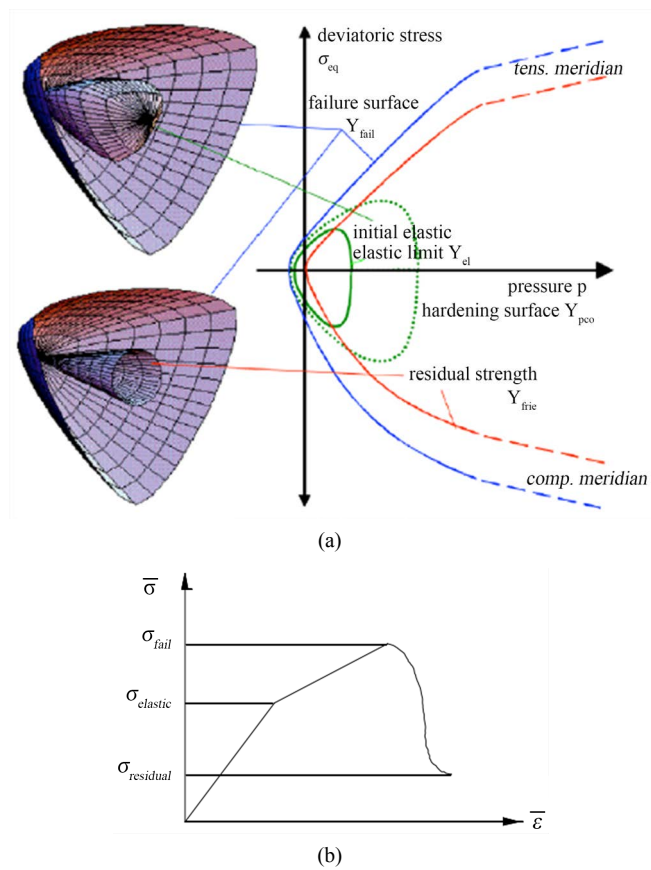
图 2. HJC 模型的  $p-u$  损伤模型



**Figure 3.** The damage model of HJC model  
**图 3.** HJC 模型的损伤模型

### 3.2. RHT 模型

1999 年, Riedel [6]提出的模型是针对传统的劈裂压缩波传播规范而设计的, 其中偏应力强度分别由弹性、失效和残余强度极限面组成, 这一概念同时考虑了各向同性硬化、强度损失和刚度退化, 这些极限面取决于压力、三轴应力状态和应变率, 如图 4 所示。



**Figure 4.** RHT model. (a) Three limit surfaces and meridian. (b) Schematic diagram of “three stages”  
**图 4.** RHT 模型(a) 三个极限面及子午线(b) “三阶段” 示意图

RHT 失效面方程为:

$$\sigma_{ep}^*(p, \theta, \dot{\epsilon}) = Y_{TXC}^*(p) R_3(\theta) F_{rate}(\dot{\epsilon}) \quad (6)$$

式  $Y_{TXC}^*(p)$  为失效极限面上的等效强度函数,  $F_{rate}(\dot{\epsilon})$  为应变率相关函数,  $R_3(\theta)$  为 Lode 角  $\theta$  以及偏平面上失效曲线(失效面被偏平面相截后形成的曲线)在拉、压子午线处的偏应力之比  $Q_2$  的函数, 并且实验结果表明, 混凝土的破坏强度与偏应力张量、第二不变量  $J_2$ 、第三不变量  $J_3$  和静水压力有关, 它们分别为

$$Y_{TXC}^*(p) = A \left[ p^* - p_{spall}^* F_{rate}(\dot{\epsilon}) \right]^N \quad (7)$$

$$F_{rate}(\dot{\epsilon}) = \begin{cases} (\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_0)^\alpha & p \geq \frac{f_c}{3} \\ (\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_0)^\delta & p < \frac{f_c}{3} \end{cases} \quad (8)$$

$$R_3(\theta) = 2(1-Q_2^2)\cos\theta + (2Q_2-1) \cdot \left[ 4(1-Q_2^2)\cos^2\theta + 5Q_2^2 - 4Q_2 \right]^{1/2} / \left[ 4(1-Q_2^2)\cos^2\theta + (1-2Q_2)^2 \right] \quad (9)$$

其中

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[ \frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \right] \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$Q_2 = \frac{r_1}{r_c} = Q_0 + B_Q p^* \quad 0.51 \leq Q_2 \leq 1.0 \quad (10)$$

以上各式中:  $p_{spall}^* = p_{spall}/f_c$ , 是归一化层裂强度,  $r_1$  和  $r_c$  分别为拉子午线处和压子午线处的偏应力的表达式,  $A$  为失效常数,  $N$  为失效常数,  $\alpha$  为压缩应变率指数,  $\delta$  为拉伸应变率指数,  $Q_0$  为拉压子午比,  $B_Q$  为脆性韧性转变参数, 它们均可由实验确定。

### 3.3. Malvar (K&C)模型

Malvar [7]等人采用 Pradtl-Reuss 流动法则采和 8 个独立参数定义 3 个固定极限面, 以 LLNL 模型为基础, 提出了 K&C 材料模型, 该模型很好的描述了混凝土材料受压时的塑性流动。弹性极限面, 失效极限面和残余强度极限面(如图 5 所示), 此外, 该模型还将材料的硬化速率与损伤软化速率考虑其中, 实验结果验证了该本构模型具有良好的吻合度。

失效极限面:

$$\Delta\sigma_m = a_0 + \frac{p}{a_1 + a_2 p} \quad (11)$$

残余强度极限面

$$\Delta\sigma_r = p / (a_{1f} + a_{2f} p) \quad (12)$$

弹性极限面

$$\Delta\sigma_y = \sigma_{0y} + p / (a_{1y} + a_{2y} p) \quad (13)$$

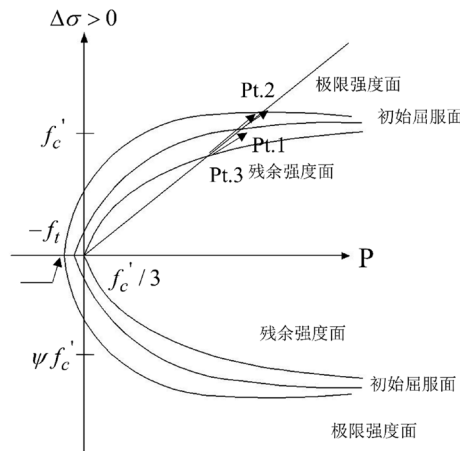
当应力状态处于屈服面与破坏面之间时, 当前荷载面的计算在屈服面与破坏面之间插值

$$\Delta\sigma = \eta(\Delta\sigma_m - \Delta\sigma_y) + \Delta\sigma_y \quad (14)$$

当应力状态达到破坏面之后, 当前荷载面的计算在破坏面与残余应力面之间插值

$$\Delta\sigma = \eta(\Delta\sigma_m - \Delta\sigma_r) + \Delta\sigma_r \quad (15)$$

式中  $\Delta\sigma_m$ 、 $\Delta\sigma_r$ 、 $\Delta\sigma_y$  分别为等效失效强度、等效残余强度和等效屈服强度。



**Figure 5.** The three failure surfaces of Malvar model  
**图 5.** Malvar 模型的两个失效面

式中  $a_0, a_1, a_2, a_{0y}, a_{1y}, a_{2y}, a_{1f}, a_{2f}$  为 8 个独立参数。  $\eta$  为表示损伤变量  $\lambda$  的函数，  $\lambda$  为表示材料塑性应变的函数。

对于拉、压时的损伤变量  $\lambda$ ，我们这么定义

$$\lambda = \begin{cases} \int_0^{\bar{\varepsilon}_p} \frac{d\bar{\varepsilon}_p}{r_f (1 + p/r_f f_t)^{b_1}} & p \geq 0 \\ \int_0^{\bar{\varepsilon}_p} \frac{d\bar{\varepsilon}_p}{r_f (1 + p/r_f f_t)^{b_2}} & p < 0 \end{cases} \quad (16)$$

这里引入计算因子  $f_d$  和体积拉伸损伤  $\Delta\lambda$ ，用于表述三向等拉荷载时的损伤情况

$$f_d = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{\frac{3J_2}{p}}}{0.1} & 0 \leq \sqrt{\frac{3J_2}{p}} < 0.1 \\ 0 & \sqrt{\frac{3J_2}{p}} \geq 0.1 \end{cases} \quad (17)$$

$$\Delta\lambda = b_3 f_d k_d (\varepsilon_v - \varepsilon_{v,yield}) \quad (18)$$

$d\bar{\varepsilon}_p$  表示塑性应变增量，  $r_f$  为单轴强度的应变率效应增强系数，  $b_1, b_2$  分别为控制压缩和拉伸软化系数，  $f_t$  为拉伸强度，  $J_2$  是偏应力张量第二不变量，  $b_3$  控制体积拉伸软化系数，  $k_d$  是内部系数，  $\varepsilon_v$  是拉伸体积应变，  $\varepsilon_{v,yield}$  表示拉屈服点体积应变。

### 3.4. ZWT 模型

#### 3.4.1. 经典的 ZWT 模型

ZWT [8]模型是由朱 - 王 - 唐在研究环氧树脂时提出的，该模型由一个非线性弹簧和两个描述不同特征时间的麦克斯韦体并联组成，如图 6 所示：

该模型本构方程如下所述：

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_{m1} + \sigma_{m2} = E_0 \varepsilon + \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^3 + E_1 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\varphi_1}\right) d\tau + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\varphi_2}\right) d\tau \quad (19)$$



由方程可知，ZWT 模型的本构方程可以分为三个部分：① 多项式项  $E_0\varepsilon + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^3$  为平衡状态下应力， $E_0, \alpha, \beta$  为非线性弹簧的弹性系数；② 积分项  $E_1 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\varphi_1}\right) d\tau$  和积分项  $E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\varphi_2}\right) d\tau$  分别来描述不同松弛时间低频和高频的黏弹性响应，2 个积分项所代表麦克斯韦体相关参数，如表 1 所示。

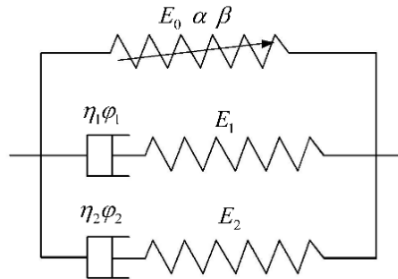


Figure 6. The schematic diagram of ZWT model  
图 6. ZWT 模型示意图

Table 1. Maxwell related parameters  
表 1. Maxwell 相关参数

Maxwell 体弹性常数		松弛时间	
		分级	量级/s
低频	$E_1$	$\varphi_1$	$10 \sim 10^2$
高频	$E_2$	$\varphi_2$	$10^{-6} \sim 10^{-4}$

### 3.4.2. ZWT 模型基础上建立的统计损伤本构

付玉凯、解北京[9]等对 1/3 焦煤和无烟煤进行了霍普金森压杆(SHPB)单轴冲击实验，在前人研究成果的基础上，通过对实验曲线特征的系统分析，建立了损伤体 - 黏弹性模型，该模型由一个强度服从 Weibull 分布的损伤体元件和 2 个不同松弛时间的麦克斯韦体并联而成，详见图 7 所示。

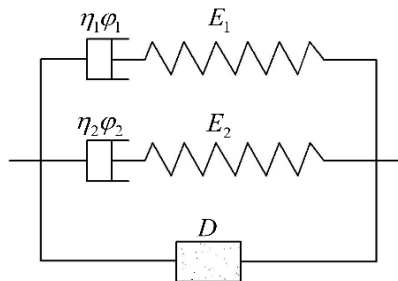


Figure 7. Statistical damage constitutive model based on ZWT model  
图 7. ZWT 模型基础上建立的统计损伤本构模型

该模型本构关系为：

针对煤岩体材料复杂的力学性质，为了能够很好的描述弹塑性行为和损伤特性，在 ZWT 模型的基础上，并联一个损伤体  $D$ ，并定义损伤体  $D_a$  在损伤之前是线弹性的，弹性模量取平均值  $E$ ，强度服从参数为  $(m, \alpha)$  的 Weibull 分布。其概率密度  $\varphi(\varepsilon_a)$ 、损伤参数  $D$  以及本构关系  $\sigma-\varepsilon$  可表示为



$$\varphi(\varepsilon_a) = \frac{m}{\alpha} \varepsilon_a^{m-1} \exp\left(-\frac{\varepsilon_a^m}{\alpha}\right) (\varepsilon \geq 0) \quad (20)$$

$$D = 1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_a^m}{\alpha}\right) (\varepsilon \geq 0) \quad (21)$$

$$\sigma_a = E_0 \varepsilon_a (1 - D) = E_0 \varepsilon_a \exp\left(-\frac{\varepsilon_a^m}{\alpha}\right) (\varepsilon \geq 0) \quad (22)$$

煤岩体还有塑性流动特性，所以引入了黏弹性元件，模型中的 2 个黏弹性元件分别用于描述煤体的低应变率响应和高应变率黏弹性响应，因而可以把试件看成损伤体和 2 个黏弹性元件的并联体，建立本构模型如下：

$$\sigma_1 = E_1 \int_0^t \varepsilon \exp\left(-\frac{t-\tau}{\varphi_1}\right) d\tau \quad (23)$$

$$\sigma_2 = E_2 \int_0^t \varepsilon \exp\left(-\frac{t-\tau}{\varphi_2}\right) d\tau \quad (24)$$

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_1 + \sigma_2 = E_0 \varepsilon_a \exp\left(-\frac{\varepsilon_a^m}{\alpha}\right) + E_1 \int_0^t \varepsilon \exp\left(-\frac{t-\tau}{\varphi_1}\right) d\tau + E_2 \int_0^t \varepsilon \exp\left(-\frac{t-\tau}{\varphi_2}\right) d\tau \quad (25)$$

式中， $E_0, E_1, E_2$  为弹性模量常数； $\varphi_1, \varphi_2$  为松弛时间。

#### 4. 准脆性材料动态本构关系的繁衍与发展

自 20 世纪 80 年代开始，就有学者根据从实验的数据出发提出了一些准脆性材料的应变率相关的本构模型。1917 年，Abrams [10] 对混凝土材料进行了一系列动态压缩试验，实验结果表明，混凝土材料存在应变率相关性，随后国内外的研究学者们，例如 Drucker 和 Prager、Taylor [11]、Hlomquist [5]、朱兆祥 [8] 等优秀的研究学者也建立了许多经典的动态本构模型，随着一系列动态试验技术的涌现，国内外学者对准脆性材料的动态本构关系的研究一直没有停止过。准脆性材料大致的发展历程，如图 8 所示。

##### 4.1. 弹塑性本构

1952 年，Drucker 和 Prager 对 Von Mises 准则进行了修正后，正式提出 Drucker-Prager 准则，分别引入自变量  $I_1$  和静水压力  $J_2$  用以描述材料的屈服特征和材料破坏特征，最终建立了经典的 D-P [12] 模型。周永强 [13] 在二次加载面理论的基础上，基于 Drucker-Prager 准则构建了二次加载面的应力路径模型。除此之外，将岩石材料受载过程中的刚度和强度的速率效应引入模型中，通过自编程序实现了岩石材料二次加载面模型的构建(模型的重要表达式详见表 2)。

**Table 2.** The important expressions of the elastoplastic constitutive model

**表 2.** 弹塑性本构模型的重要表达式

文献来源	模型的重要表达式	参数释义
Drucker 和 Prager [12]	$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k$	$I_1$ 为自变量， $\alpha$ 、 $k$ 为控制参数，与材料自身的性质有关； $J_2$ 为静水压力；
周永强 [13]	$f(\bar{\sigma}) = A\bar{I}_1 + \sqrt{J_2} = RF(H) = Rk(H)$	$A$ 、 $K$ 均为材料参数； $I_1$ 、 $J_2$ 分别为应力的第一不变量和偏应力的第二不变量； $k(H)$ 的表达式参考文献 [14]

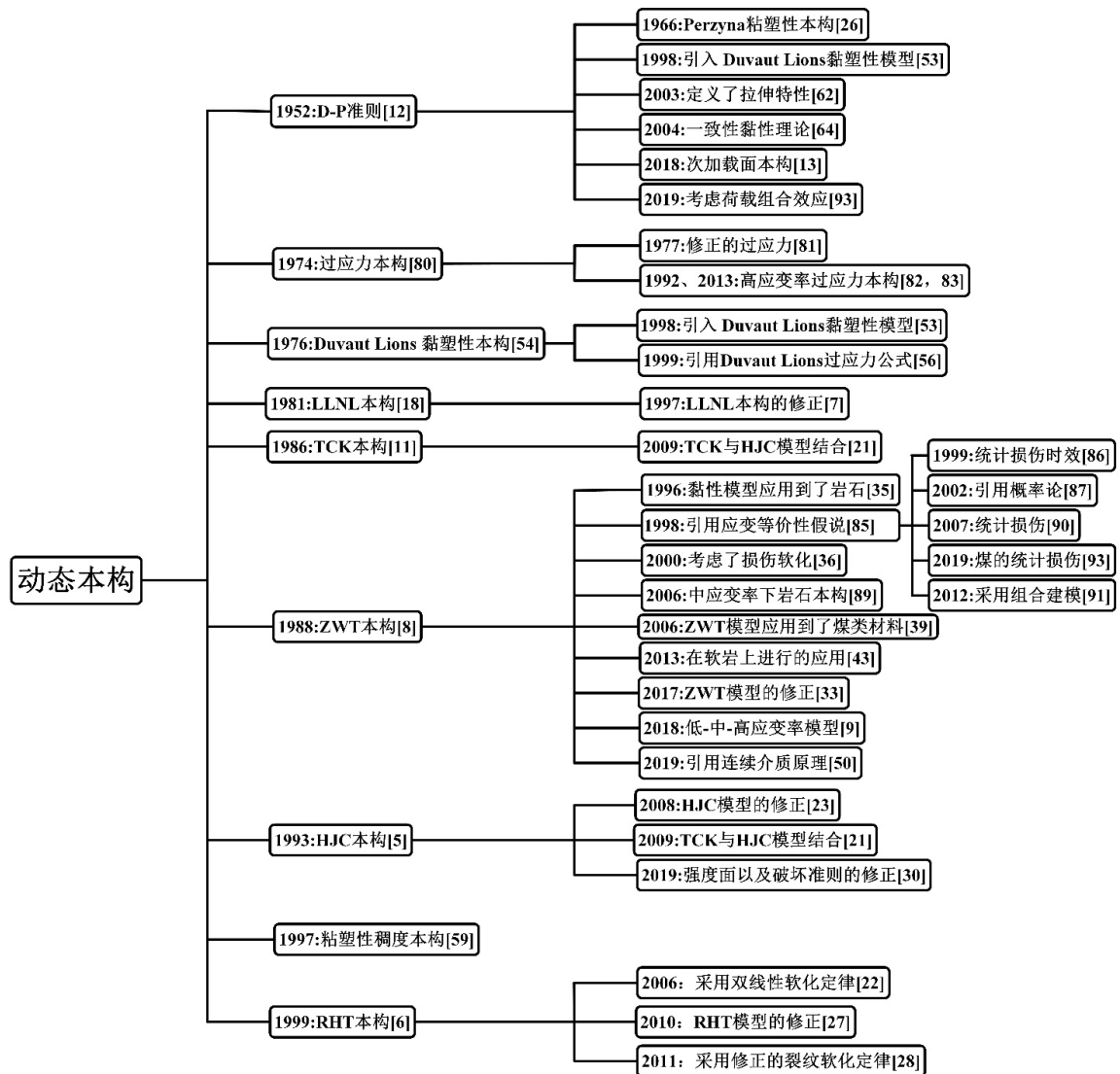


Figure 8. Development of dynamic constitutive relation for quasi-brittle materials  
 图 8. 准脆性材料动态本构关系发展历程

## 4.2. 弹塑性损伤本构

Taylor [11]将 Kipp-Grady 模型与 Budiansky [15]和 Grady 提出的等效体积模量、裂纹密度和碎块尺寸表达式结合,同时引入损伤因子,从而构建了提出经典的 TCK 模型。Suaris [16]等人基于动力平衡方程,提出了混凝土动态损伤本构模型。Hlomquist [5]提出了混凝土的计算本构模型(HJC),该模型利用损伤、应变率和压力函数表示等效强度,体积应变率函数表示压力变化,塑性体积的函数表示损失类似过程。董毓利、谢和平[17]等人对混凝土材料进行了7个数量级范围内压缩试验,结果表明,随着应变率的逐渐增高,材料的峰值应力和峰值应变越来越大,但弹性模量并未发生明显的变化。此外,还建立了含有损伤因子  $w$  和内变量  $q$  的混凝土塑性损伤本构模型。Marlva 模型是 Marlvar [7]等人对 LLNL 模型[18]修正后提出的,在 LLNL 模型的基础上引入 Praudtl-Reuss 流动法则,并采用3个固定极限面和8个独立的参数定义材料的压缩子午线。Eibl [19]在实验结果的基础上,证明了动态本构模型不仅仅需要考虑当前的应变率,同时需要考虑惯性的影响,通过以上定义,建立混凝土时效型弹塑性损伤本构。Burlion [20]用

两个损伤标量描述弹性模量的退化：拉伸损伤变量和压缩损伤变量，使用修正的 Gurson 屈服函数和相关的流动准则，建立了塑性损伤本构模型。Liu [21]建立了新型塑性损伤本构模型，该模型是在 TCK 模型和 HJC 模型基础上构建的。Leppänen [22]借鉴 RHT [6]模型，并在此基础上，采用了双线性软化定律，建立了修正的 RHT 塑性损伤本构模型。Polanco [23]基于 HJC 模型，首先在调整了应变率参数，其次引用了三个不同的损伤变量分别用于描述混凝土材料的拉伸、压缩和剪切机制，最后将第三偏应力不变量引入了本构模型中。在此基础上，建立了修正的 HJC 模型。刘海峰[24]基于混凝土冲击荷载作用下的实验研究，以修正 Ottosen 四参数破坏准则为屈服法则，引用 Lemaitre 应变等价性原理，同时考虑损伤，构建了混凝土动态塑性损伤模型。宁建国[25]在 Perzyna [26]黏塑性本构方程的基础上，把统计细观理论与连续损伤理论结合在一起，建立动态塑性损伤本构模型。Zhen [27]在 RHT 模型的基础上，修正了残余强度面的 Lode 角依赖性、拉伸软化规律和动态拉伸强度函数，建立了修正的 RHT 动态塑性损伤本构模型。Nyström [28]使用修改后的裂纹软化定律和双线性主拉应力破坏准则，建立了修正的 RHT 塑性损伤本构模型。Wu [29]利用 LS-DYNA 有限元软件，修正了 KCC 模型的损伤变量，建立了修正的 KCC 塑性损伤本构模型。张社荣[30]对 HJC 模型的强度平面、应变率效应参数和破坏准则进行了修正，在此基础上建立了 SHPB 有限元模型(模型的重要表达式详见表 3)。

**Table 3.** The important expressions of the elastoplastic damage constitutive model  
**表 3.** 弹塑性损伤本构模型的重要表达式

文献来源	模型的重要表达式	参数释义
Taylor [11]	$\Delta\sigma_{ij} = K_d\delta_{ij}\Delta\varepsilon_{kk} + 2G_d\Delta e_{ij}$	$K_d$ 和 $G_d$ 均为损伤材料的模量； $\Delta\varepsilon_{kk}$ 和 $\Delta e_{ij}$ 为体应变偏应变增量； $\delta_{ij}$ 为 Kronecker 记号。
Hlomquist [5]	$\sigma^* = [A(1-D) + BP^N][1 - c \ln(\dot{\varepsilon}^*)]$	$D$ 是损伤参数， $P^* = P/f_c$ 是归一化压力， $\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}_0/\dot{\varepsilon}$ 表示是无量纲应变率。 $A$ 为特征化黏聚强度； $B$ 为特征化压力硬度系数； $N$ 为特征化压力硬度指数；
Marlvar [7]	$\Delta\sigma_m = a_0 + \frac{p}{a_1 + a_2 p}$ $\Delta\sigma_r = p/(a_{1f} + a_{2f} p)$ $\Delta\sigma_y = \sigma_{0y} + p/(a_{1y} + a_{2y} p)$ $\Delta\sigma = \eta\Delta\sigma_m - \Delta\sigma_y + \Delta\sigma_r$ $\Delta\sigma = \eta\Delta\sigma_m - \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_y$	$\Delta\sigma_m$ 、 $\Delta\sigma_r$ 、 $\Delta\sigma_y$ 分别为等效失效强度、等效残余强度和等效屈服强度。 $a_0, a_1, a_2, a_{0y}, a_{1y}, a_{2y}, a_{1f}, a_{2f}$ 为 8 个独立参数。 $\eta$ 是损伤变量 $\lambda$ 的函数， $\lambda$ 是等效塑性应变的函数。
Eibl [19]	$\sigma = \left[ 1 - D(\kappa_d) + \int_{\tau=0}^t \frac{\partial D}{\partial \tau} \cdot g(t-\tau) d\tau \right] \cdot E_0 : (\varepsilon - \varepsilon_t)$	$E_0$ 为初始弹性模量； $D$ 为损伤变量； $\kappa_d$ 为等效损伤应变； $\varepsilon_t$ 为非弹性应变张量
Burlion [20]	$d\sigma_{ij} = (1-D)C_{ijkl} \left( d\varepsilon_{ij} - d\lambda \frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{ij}} \right) - \left[ \frac{\partial g_1(\dot{\varepsilon})}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} \left( d\varepsilon_{ij} - d\lambda \frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{ij}} \right) \right. \\ \left. + d\lambda \frac{\partial g_2(f^*)}{\partial f^*} k(1-f^*) f^* \frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{ij}} \right] \times C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e$	$D$ 为损伤变量； $C_{ijkl}$ 为弹性张量； $\sigma_{ij}$ 为应力分量； $\lambda$ 为 Lamé 因子； $\varepsilon_{ij}$ 为应变分量； $k$ 为损伤历史变量； $f^*$ 为材料孔隙率；
Liu [21]	$Y = [C_1(1 + C_2 \ln \dot{\varepsilon}_p) + C_3 P](1-D)$	$\dot{\varepsilon}_p$ 为等效应变率； $P$ 为平均压力； $C_1, C_2, C_3$ 是由实验数据确定的材料常数。
Riedel [6]	$Y_{TCK}^*(p) = A [p^* - p_{spall}^* F_{rate}(\dot{\varepsilon})]^N$	$p_{spall}^* = p_{spall}/f_c$ ，是归一化层裂强度； $A$ 失效面常数、 $N$ 为失效面指数；

Continued

Polanco [23]	$\dot{\sigma}_{ep}^* = B [P^* + T^* (1-D)]^N F(\dot{\varepsilon}_{ep}^*) R(\theta, e) \leq S_{max}$	<p><math>D</math> 是损伤参数, <math>P^* = P/f_c</math> 是归一化压力, <math>\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}_0/\dot{\varepsilon}</math> 表示是无量纲应变率, <math>A</math> 为特征化黏聚强度; <math>B</math> 为特征化压力硬度系数; <math>N</math> 为特征化压力硬度指数; <math>S_{max}</math> 特征化等效强度所能达到的最大应力; <math>T^*</math> 最大特征化等效拉应力; <math>F(\dot{\varepsilon}_{ep}^*)</math> 和 <math>R(\theta, e)</math> 为引入的新参数。</p> <p style="text-align: center;">详见文献[23]</p>
刘海峰[24]	$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{E(1-D)} [(1+\nu)\dot{\sigma}_{ij} - \nu\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij}] + \frac{\dot{D}}{E(1-D)^2} \times [(1+\nu)\dot{\sigma}_{ij} - \nu\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij}] + \gamma \left\langle \frac{F_1}{m_p} \right\rangle^{n_p} \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_{ij}}$	<p><math>\nu</math> 为泊松比, <math>E</math> 为弹性模量; <math>\gamma</math> 为流变系数, <math>F</math> 为屈服函数; <math>D</math> 为损伤变量; 函数 <math>\sigma_{ij}</math> 是 Kronecker delta 函数; <math>m_p, n_p</math> 为材料参数;</p> <p style="text-align: center;">详见文献[24]</p>
宁建国[25]	$\sigma_{ij} = \sigma_s [C_0 + C_1 \log \dot{\varepsilon}_p^* + C_2 (\log \dot{\varepsilon}_p^*)^2]$	<p><math>\sigma_s</math> 为准静态下的应力强度; <math>\dot{\varepsilon}_p^*</math> 为无量纲化的等效塑性应变率; <math>C_0, C_1</math> 和 <math>C_2</math> 为应变率敏感系数</p>
Zhen [27]	$Y_{residual} = \begin{cases} B \times (p^*)^M \times r_3(\theta) & p \geq 0 \\ 0 & p < 0 \end{cases}$ $\psi(p) = \begin{cases} 1/2 & p \leq 0 \\ 1/2 + 3f_t/2f_c & p = f_c/3 \\ \alpha f_c / [a_0 + (2\alpha f_c/3)/(a_1 + (2\alpha_2 \alpha f_c/3))] & p = 2\alpha f_c/3 \\ 0.753 & p = 3f_c \\ 1.0 & p = 8.453f_c \end{cases}$	<p><math>B</math> 为残余强度; <math>r_3(\theta)</math> 为标量函数; <math>p^*</math> 为等效强度; <math>M</math> 为失效指数; <math>f_t, f_c</math> 准静态抗拉和抗压强度; <math>a_0, a_1, a_2</math> 是三个独立的参数;</p>

### 4.3. 黏弹性本构

朱兆祥[8]等人将实验结果进行了归纳和总结, 引用了 Green-Rivlin 理论, 提出了温度恒定状态下的非线性黏弹性本构方程, 即现在应用很广的 ZWT 模型。Izzuddin [31]将材料的黏性系数引入弹性应变率函数中, 从而提出了黏弹性本构模型。黄海健[32]在朱 - 王 - 唐模型的基础上, 引入宏观唯象损伤力学的概念, 系统分析归纳实验结果, 并从中发现损伤特性的变化规律, 建立了泡沫混凝土等效黏弹性本构模型。Zhang [33]使用直径为 74 mm 的霍普金森杆研究了六种体积分量的 BFRC 在各种高应变率下的冲击行为, 基于改进的朱 - 王 - 唐[8]动态本构模型, 得出了 BFRC 的动态本构模型(模型的重要表达式详见表 4)。

Table 4. The important expressions of the viscoelastic constitutive model

表 4. 黏弹性本构模型的重要表达式

文献来源	模型的重要表达式	参数释义
朱兆祥[8]	$\sigma = E_0 \varepsilon + \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^3 + E_1 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\phi_1}\right) d\tau + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\phi_2}\right) d\tau$	$E_0, \alpha, \beta$ 为非线性弹簧的弹性系数; $E_1, E_2$ 表示不同松弛时间低频和高频的弹性模量; $\phi$ 表示松弛时间; $\dot{\varepsilon}$ 表示平均应变率;
黄海健[32]	$\sigma = E_0 \varepsilon + E_1 \varepsilon + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau$	$E_0$ 为非线性弹簧的弹性系数; $E_1, E_2$ 表示不同松弛时间低频和高频的弹性模量; $\theta$ 表示松弛时间; $\dot{\varepsilon}$ 表示平均应变率;
Zhang [33]	$\sigma = E_0 \varepsilon + E_1 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_1}\right) d\tau + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau$	$E_0$ 为非线性弹簧的弹性系数; $E_1, E_2$ 表示不同松弛时间低频和高频的弹性模量; $\theta$ 表示松弛时间; $\dot{\varepsilon}$ 表示平均应变率;

#### 4.4. 黏弹性损伤本构

尚仁杰[34]通过对同一试件先进行慢速压缩后,再进行快速压缩,证明黏性是产生动力效应的一个因素。随后对烘干试件进行快、慢两种速率的压缩,证明损伤滞后是产生动力效应的一个因素。由此而建立了同时考虑轴向压缩和拉伸的动态黏弹性损伤本构模型。郑永来[35]将损伤与黏弹性相结合,发模型中存在流变部分,通过将几个松弛时间不同的麦克斯韦体并联,用以描述岩石在大应变率范围的弹塑性和损伤特性,在此基础上,构建了黏弹性损伤本构。陈江瑛[36]认为微裂纹等损伤是引起混凝土弱化的主要原因,从而定义损伤参量  $D$ ,进一步研究得出计及损伤弱化的 ZWT 模型来表征混凝土材料。胡时胜[37]采用“损伤冻结”法系统地研究了混凝土材料在动载荷作用下的损伤演化过程,构建了混凝土的损伤演化方程,再基于 ZWT 模型和黏弹性本构理论,构建了混凝土材料的黏弹性损伤本构模型。商霖[38]采用拉普拉斯分析法对实验数据进行系统分析,找到了各力学分量沿时空的分布规律,得出了混凝土材料的应力应变曲线。在实验研究和拉普拉斯分析的基础上,得出混凝土在动态演化过程中的本构特征。再基于损伤率类型演化和黏弹性理论,建立了黏弹性损伤本构模型。单仁亮[39]对岩石进行了大量的霍普金森杆(SHPB)动态压缩实验,对岩石的应变曲线进行了拟合,提出了可以较好描述岩石损伤力学行为的黏弹性损伤本构模型。该本构模型由一个线性弹簧和两个具有不同松弛时间的麦克斯韦体并联,损伤变量  $D$  可通过动态应力-应变曲线任一点与原点之间的斜率的相对变化量来确定,试验结果表明该本构模型可以较好拟合实验数据。宁健国[40]在前人的基础上,利用 Lemaitre 应变等价性原理,考虑了损伤所引起的弱化效应,并引用了王礼立提出的观点,从而建立了损伤型黏弹性本构模型。孟益平[41]考虑混凝土内部微裂纹扩展对混凝土变形的影响,观察混凝土不同阶段的变形情况,将混凝土材料采用 ZWT 模型进行初步拟合,表现出了较好的拟合度,但并非所有参数都对混凝土本构行为有较大的影响,于是构建了修正的五参数 ZWT 混凝土黏弹性损伤本构模型。翟越[42]构建了损伤演化方程,并基于元件模型理论,对岩石材料的动态损伤特性展开了研究,假定岩石类材料由具有弹性、塑性、黏滞及损伤特性,建立黏弹塑性损伤型动态本构模型。根据软岩和混凝土材料在动荷载作用下的应力-应变曲线特征,谢理想[43]结合损伤体和麦克斯韦体的特点,建立了适用于软岩和混凝土材料的损伤型黏弹性动力本构模型方程。Zhang [44]利用 SHPB 实验研究了聚丙烯纤维增强砂浆(PFRM)材料在压缩冲击载荷作用下的动力特性和本构关系,再考虑材料破坏损伤,基于改进的 ZWT 动态本构模型,得出了 PFRM 的动态连续型损伤本构模型。Zhang [45]利用霍普金森杆(SHPB)研究了不同聚丙烯纤维增强混凝土(PFRC)在高应变速率下的动力行为和本构关系。在 ZWT 模型的基础上,考虑了材料内部损伤的影响,使用了概率服从 Weibull 分布的密度函数来表征 PFRC 的损伤演化,即损伤因子  $D$ ,从而建立黏弹性损伤本构模型。张文清[46]为了研究突出煤的动态力学行为,进行了大量的动态压缩实验,在经典的 ZWT 模型的基础上,简化其本构方程,应用 Lemaitre 应变等效原理,建立可用于表述煤动态力学行为的本构方程。Su [47]在 ZWT 模型的基础上,考虑损伤,建立了黏弹性损伤本构模型,用于描述超细不锈钢丝(SSW)增强活性粉末混凝土(RPC)的动态冲击行为,定义损伤变量  $D$  是应变函数的同时,忽略了低频的麦克斯韦项,并假定 RPC 服从 Weibull 分布。根据 SHPB 冲击试验中高强混凝土块体的分形损伤演化规律,焦楚杰[48]对高强度混凝土(HSC)材料的分形几何特征进行了研究,将分形几何用于标定材料的损伤情况,构建了损伤变量  $D$  的表达式,并对其分形维数范围进行了标定,再基于 ZWT 模型,结合近似恒定应变速率、动态损伤特性和应变速率相关性,建立了 HSC 高强度混凝土块的动态力学模型。郭德勇[9]从试验数据出发,分别对煤岩体的应力-应变曲线和破碎特征进行讨论,认为煤岩体的破碎是一个连续损伤破坏的过程,因此建立煤岩本构模型时,引入损伤元件,最后建立了适用于低、中和高应变率作用下的损伤型黏弹性本构模型。根据动态本构曲线的特点和前人的研究成果,付玉凯[49]将弹塑性理论引入动态本构模型中,建立了损伤型黏弹性本



构模型，并且该模型所拟合的曲线与实验结果高度吻合。解北京[50]针对岩石在中应变率下，表现出了弹塑性、损伤失效以及应变率相关性等综合相应特性，建立符合连续介质基本原理的损伤弹塑性动态本构模型。针对煤岩体，在付玉凯[49]提出的损伤体 - 黏弹性本构模型基础上，建立中应变率下煤体损伤体黏弹性本构模型(模型的重要表达式详见表 5)。

**Table 5.** The important expressions of the viscoelastic damage constitutive model  
**表 5.** 黏弹性损伤本构模型的重要表达式

文献来源	模型的重要表达式	参数释义
郑永来[35]	$\sigma(\varepsilon) = \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^m + 1 \right] \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^m \right] \left[ E_0 \varepsilon + \dot{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{E_0 \alpha_i}{n \cdot 10^{-4}} \right]$ $\times \left( 1 - e^{-10^{n-4} \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}}} \right) + \dot{\varepsilon} \frac{E_0 \alpha_2}{10^5} \left( 1 - e^{-10^5 \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}}} \right)$	<p><math>\varepsilon_0, m</math> 是与试样材料性质和形状有关的参数; <math>\eta</math> 为黏性系数; <math>n</math> 取决于应变率敏感范围率; <math>\alpha_1, \alpha_2</math> 为强度增强百分比; <math>E_0</math> 为初始弹性模量;</p>
陈江璞[36]	$\sigma = (1-D) \left[ E_0 \varepsilon + \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^3 + E_1 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp \left( - \frac{t-\tau}{\phi_1} \right) d\tau \right]$ $+ E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp \left( - \frac{t-\tau}{\phi_2} \right) d\tau$	<p><math>E_0, \alpha, \beta</math> 为非线性弹簧的弹性系数; <math>E_1, E_2</math> 表示不同松弛时间低频和高频的弹性模量; <math>\phi</math> 表示松弛时间; <math>\dot{\varepsilon}</math> 表示平均应变率; <math>D</math> 为损伤变量;</p>
胡时胜[37]	$\sigma_s = (1-D) \left[ E_0 \varepsilon + E_1 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp \left( - \frac{t-\tau}{\phi_1} \right) d\tau + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp \left( - \frac{t-\tau}{\phi_2} \right) d\tau \right]$ $D = D_0 \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^a \varepsilon^b$	<p><math>\sigma_s</math> 为表观应力; <math>E_0</math> 为非线性弹簧的弹性系数; <math>E_1, E_2</math> 表示不同松弛时间低频和高频的弹性模量; <math>\phi</math> 表示松弛时间; <math>\dot{\varepsilon}</math> 表示平均应变率; <math>D</math> 为损伤变量; <math>D_0, a, b</math> 为待定参数, 由实验数据拟合;</p>
商霖[38]	$\sigma_s = (1-D) E_0 \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) \exp \left( - \frac{t-\tau}{\theta} \right) d\tau$	<p><math>\sigma_s</math> 为表观应力; <math>\theta</math> 表示松弛时间; <math>D</math> 为损伤变量;</p>
单仁亮[39]	$\sigma = (1-D) \left[ E_0 \varepsilon + E_1 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp \left( - \frac{t-\tau}{\phi_1} \right) d\tau + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp \left( - \frac{t-\tau}{\phi_2} \right) d\tau \right]$ $D = \frac{E_b - E(\varepsilon_i)}{E_b}$	<p><math>E_0</math> 为非线性弹簧的弹性系数; <math>E_1, E_2</math> 表示不同松弛时间低频和高频的弹性模量; <math>\phi</math> 表示松弛时间; <math>\dot{\varepsilon}</math> 表示平均应变率; <math>D</math> 为损伤变量; <math>E_b</math> 为曲线的初始弹性模量, <math>E(\varepsilon_i)</math> 为曲线上任意一点与原点的割线模量;</p>
宁健国[40]	$\sigma = (1-D) \left[ E_t \varepsilon + E_t^2 \theta_2 \dot{\varepsilon} \left( 1 - \exp \left( - \frac{\varepsilon}{\theta_2 \dot{\varepsilon}} \right) \right) \right]$	<p><math>E_t</math> 为侧限弹性模量; <math>\theta</math> 为松弛时间; <math>\dot{\varepsilon}</math> 为应变率; <math>D</math> 为损伤变量;</p>
翟越[42]	$\sigma = \begin{cases} (E_0 + E_2) \varepsilon + \eta \left( \frac{E_1 + E_0 + E_2}{E_1} \right) \dot{\varepsilon} - \frac{\eta \dot{\sigma}}{E_1} & (\sigma < \sigma_s) \\ w E_0 \varepsilon + \eta \left\{ 1 + \frac{w E_0 [a - m \varepsilon (\varepsilon - \varepsilon_s)^{m-1}]}{a E_1} \right\} - \frac{\eta \dot{\sigma}}{E_1} + \sigma_s & (\sigma \geq \sigma_s) \end{cases}$	<p><math>\sigma_s</math> 为岩石类材料发生损伤时的应力门槛值; <math>E_0</math> 为损伤元件的初始弹性模量; <math>\eta</math> 为黏滞系数; <math>E_1</math> 为马克斯威尔体的初始弹性模量; <math>E_2</math> 为圣维南体的初始弹性模量; <math>w</math> 为 Weibull 分布函数; <math>\varepsilon_0, m</math> 是 Weibull 分布参数; <math>\dot{\sigma}</math> 和 <math>\dot{\varepsilon}</math> 分别为应力率与应变率;</p>
谢理想[43]	$\sigma(t) = E_0 \varepsilon \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon}{\alpha_0} \right)^{m_0} \right] + E_1 \dot{\varepsilon} \phi_1 \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon} \phi_1} \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon}{\alpha_1} \right)^{m_1} \right] \right] \right\}$ $+ E_2 \dot{\varepsilon} \phi_2 \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon} \phi_2} \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon}{\alpha_2} \right)^{m_2} \right] \right] \right\}$	<p><math>m_0, m_1, m_2</math> 为 3 个损伤体 weibull 的分布参数; <math>\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2</math> 分别为与 weibull 分布参数 <math>F_0, F_1, F_2</math> 相对的常数; <math>\phi</math> 表示松弛时间; <math>E_0</math> 为非线性弹簧的弹性系数; <math>E_1, E_2</math> 表示不同松弛时间低频和高频的弹性模量;</p>

Continued

Zhang [44]	$\sigma = \begin{cases} E_0 \varepsilon + E_1 \varphi_1 \dot{\varepsilon} \left[ 1 - e^{-\beta / (\varphi_1 \dot{\varepsilon})} \right] + E_2 \varphi_2 \dot{\varepsilon} \left[ 1 - e^{-\beta / (\varphi_2 \dot{\varepsilon})} \right] & \varepsilon \leq \varepsilon_{th} \\ e^{-(\varepsilon - \varepsilon_{th})^{m/\alpha}} E_0 \varepsilon + E_1 \varphi_1 \dot{\varepsilon} \left[ 1 - e^{-\beta / (\varphi_1 \dot{\varepsilon})} \right] + E_2 \varphi_2 \dot{\varepsilon} \left[ 1 - e^{-\beta / (\varphi_2 \dot{\varepsilon})} \right] \\ + \left[ 1 - (\varepsilon - \varepsilon_{th})^{m/\alpha} \right] k & \varepsilon > \varepsilon_{th} \end{cases}$	<p><math>E_0, \alpha, \beta</math> 为非线性弹簧的弹性系数; <math>E_1, E_2</math> 表示不同松弛时间低频和高频的弹性模量; <math>\varphi</math> 表示松弛时间; <math>\dot{\varepsilon}</math> 表示平均应变率; <math>D</math> 为损伤变量; <math>\varepsilon_{th}</math> 是材料累积损伤的极限应变; <math>\varepsilon_0, m</math> 是 Weibull 分布参数; <math>k</math> 是试样损坏区域中聚丙烯纤维的承载力;</p>
张文清[46]	$\sigma = (1 - D) \left[ E_s \varepsilon + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp \left( -\frac{t - \tau}{\varphi_2} \right) d\tau \right]$	<p><math>E_s</math> 表示 2 个简单弹簧并联后等效为一个简单弹簧的弹性模量; <math>\varphi_2</math> 表示松弛时间; <math>\dot{\varepsilon}</math> 表示平均应变率; <math>D</math> 为损伤变量;</p>
郭德勇[9]	$\sigma = E_0 \varepsilon \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^m + 1 \right] \exp \left[ -\left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^m \right] + E_1 \dot{\varepsilon} \varphi_1 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon} \varphi_1} \right) \right] + E_2 \dot{\varepsilon} \varphi_2 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon} \varphi_2} \right) \right] + E_3 \dot{\varepsilon} \varphi_3 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon} \varphi_3} \right) \right]$	<p><math>E_0, E_1, E_2, E_3</math> 均为弹性; <math>\varepsilon_0</math> 一般位于应力峰值对应的应变附近; <math>m</math> 代表维数, <math>\varphi</math> 表示松弛时间;</p>
付玉凯[49]	$\sigma = E_0 \varepsilon_a \exp \left( -\frac{\varepsilon_a^m}{\alpha} \right) + E_1 \int_0^t \varepsilon \exp \left( -\frac{t - \tau}{\varphi_1} \right) d\tau + E_2 \int_0^t \varepsilon \exp \left( -\frac{t - \tau}{\varphi_2} \right) d\tau$	<p><math>\varepsilon_a</math> 为损伤应变; <math>E_0, E_1, E_2</math> 为弹性模量常数; <math>\varphi_1, \varphi_2</math> 为松弛时间; <math>m</math> 为 weibull 分布参数。</p>

#### 4.5. 黏塑性本构

Perzyna 模型是黏塑性模型的主要形式之一, Perzyna [26] [51] 基于参量变分原理以及 Drucker 屈服条件, 建立了 Perzyna 黏塑性本构方程。Bicanic [52] 在修改后的 Perzyna 弹/黏塑性理论的基础上, 采用了应力率敏感的流动性参数和主应力空间中的两个表面(定义为偏离弹性的不连续表面和强度极限表面)作为损伤监测装置, 以及假设应力点达到极限强度水平时就开始破坏不连续表面, 建立了混凝土的速率和历史相关的黏塑性本构模型。López [53] 采用 DP 破坏准则和 Duvaut Lions [54] 黏塑性模型, 将应变率效应引入本构关系中, 提出混凝土黏塑性本构方程。Kang H [55] 研究了动态强度的增强和黏塑性的正则化特性, 以便于解决拉伸中的应变软化问题。为此, 将 Kang 和 Willam [56] 的弹塑性混凝土模型扩展到黏塑性 Duvaut Lions 过应力公式。Chen [57] 考虑速率效应, 保留初始边界值问题的适定性, 同时引入应变软化, 建立了高应变率下混凝土的黏塑性本构模型。Winnicki [58] 在 Wang [59] 提出的黏塑性模型的基础上, 建立了修正的黏性本构模型, 该模型利用了各向同性形式的霍夫曼屈服函数, 并进行了扩展, 以包括拉伸和压缩过程中的单独的硬化/软化行为。Wang [59] 将塑性应变率相关项引入屈服面方程, 并通过塑性理论解释塑性变形, 另外在本构模型中引入了率相关项, 推导和构建了黏塑性本构模型。冯明珩[60] 结合混凝土的变形特征, 用简化后的统一本构模型模拟了混凝土非破坏截面的变形, 取得了良好的效果。然后, 应用统一的黏弹塑性本构模型对混凝土的跳跃试验进行了预测。陈书宇[61] 研究动态荷载下混凝土的极限面的变化规律, 以及塑性屈服面的变化特征, 将 Perzyna 黏塑性和 Bicanic 塑性间断面运动理论用来描述混凝土的塑性特征, 建立了混凝土黏塑性本构模型。Georgin [62] 在 Duvaut-Lions 模型的基础上, 定义了非光滑屈服准则(Rankine 准则), 用于定义材料在拉伸特性, 再通过 Von-Mises 准则或 Drucker-Prager 准则对双轴压缩建模, 建立了黏塑性本构方程。肖诗云[63] 从黏塑性模型的理论出发, 对常用的 DP 模型进行了改进, 在本构理论中引入了率效应, 构建了基于 DP 准则的材料一致率型本构模型。肖诗云[64] 根据一致性黏塑性模型理论, 以及做了大量的混凝土动态压缩试验, 在试验结果和 Willam-Warke 三参数本构模型的基础上, 考虑应变率效应, 推导出了修正的 Willam-Warke 三参数率相关本构模型。Pandey [65] 提



出了一种基于应变速率的混凝土黏塑性本构模型，用于分析瞬态动力载荷下的三维钢筋混凝土结构，并且该模型考虑了三维载荷情况下的压力敏感性和动态载荷情况下的应变速率敏感性。褚卫江[66]在 Winnicki 和肖诗云工作的基础上，将线性 Drucker-Prager 模型应用于广义的一致性黏塑性模型。Aráoz [67]建立的修正黏塑性本构模型源自于广义的 Perzyna 模型，该模型考虑体积和偏斜响应，是在小应变的连续力学框架内制定的现象学模型，并采用了盖函数和硬化函数(模型的重要表达式详见表 6)。

**Table 6.** The important expressions of the viscoplastic constitutive model  
**表 6.** 黏塑性本构模型的重要表达式

文献来源	模型的重要表达式	参数释义
Perzyna [26]	$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma} \delta_{ij} + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$	$G$ 为切变模量； $\gamma$ 为材料参数； $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 为应变速率偏量； $S_{ij}$ 为应力偏量； $\Phi(F)$ 是关于 $F$ 的函数；
Bicanic [52]	$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} \frac{\dot{\sigma}}{E} & \sigma \leq \sigma_0 \\ \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma(\sigma - \sigma_0) & \sigma > \sigma_0 \end{cases}$	$\dot{\varepsilon}$ 为应变速率； $\dot{\sigma}$ 为应力率； $E$ 为弹性模量； $\gamma$ 为流动性参数； $\sigma_0$ 为初始应力；详见文献[52]
Kang H [55]	$\dot{\sigma} = \vartheta : \dot{\varepsilon} - \frac{1}{\tau} [\sigma - \bar{\sigma}]$	$\dot{\sigma}$ 表示应力率； $\dot{\varepsilon}$ 表示应变速率； $\bar{\sigma}$ 是在弹塑性状态下获得的一组内部状态变量； $\tau$ 表示松弛时间；
冯明璋[60]	$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}^e + \lambda^* \dot{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} + 2G^* \dot{\varepsilon}_{ij}^e \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^m \end{aligned}$	$\lambda, G$ 为拉梅常数； $\sigma_{ij}$ 为应力张量； $G^*, \lambda^*$ 黏弹性系数； $\varepsilon_{ij}^e$ 和 $\varepsilon_{ij}^m$ 弹性应变张量和非弹性应变张量
Georgin[62]	$\begin{aligned} \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} &= \frac{1}{\eta} [D_e]^{-1} \{ \{\sigma\} - \{\sigma_p\} \} \\ \{\dot{\varepsilon}\} &= \{\dot{\varepsilon}^e\} + \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} \end{aligned}$	$\{\sigma_p\}$ 为塑性应力张量； $\{\sigma\}$ 是应力张量； $\eta$ 为黏度参数； $\{\dot{\varepsilon}^{vp}\}$ 为黏塑性应变速率张量； $[D_e]$ 对应于胡可弹性矩阵；详细参数见文献[62]
肖诗云[63]	$m_{ij} d\sigma_{ij} + h d\lambda + s d\dot{\lambda} = 0$	$\lambda$ 为塑性乘子； $\sigma_{ij}$ 为应力张量的分量； $m_{ij}$ 为与塑性相关的张量； $h, s$ 为张量函数；
Pandey[65]	$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{vp} \\ \varepsilon_{ij}^{vp} &= \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned}$	$\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^{vp}$ 为弹性应变张量和塑性应变张量； $\gamma$ 为流动性参数； $\sigma_{ij}$ 为应力张量的分量； $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ 为方向函数；
褚卫江[66]	$F = q - p \frac{3(f_c + f_t)}{f_c - f_t} - \frac{2f_c f_t}{f_c - f_t}$	$f_c, f_t$ 为抗压强度和抗拉强度； $p, q$ 为与应力相关的张量；详见文献[66]

#### 4.6. 黏塑性损伤本构

李兆霞[68]为描述应变软化特征，认为裂纹损伤是导致混凝土局部区域破坏的主要原因，裂纹扩展过程中所释放的应变能决定了局部尺度参数和软化模量，从而建立了损伤型黏塑性本构模型。Govindjee [69]为了解决脆性材料的建模所涉及的连续性和计算问题，考虑了破坏面的完全各向异性的破坏规则，首先选择弹性模量作为内部损伤变量，其次引用了 von-Mises 原理，最终建立了考虑损伤效应的混凝土黏塑性本构模型。Dube [70]遵循 Perzyna 黏塑性本构方程的原理，提出了一种基于速率的损伤模型，通过将损伤演化方程的表达式变化，从与速率无关的损伤模型中得出与速率相关的模型。Rossi [71]在塑性退化模型和离散概率裂纹模型的基础上，考虑混凝土在动态加载作用下的应变速率效应，并建立了黏塑性损伤本构模型。陈书宇[72]将应变速率、静水压力和损伤三者引入本构模型中，再基于 Ot-tosen 的四参数破坏准则，建立了混凝土的黏塑性本构模型，与此同时，一种新的有限元计算方法被用于描述混凝土模型。Omidi

[73]在 Lee 和 Fenves1998 年提出的塑性损伤模型基础上,考虑了大裂缝的影响,描述了一种表示大量裂纹开合的新方法。陆晓霞[74]基于简单的力学模型,推导了损伤状态下岩石材料的应力-应变关系,同时将应变率效应引入本构关系中,推导了围岩状态下岩石的黏塑性损伤本构方程。Gatuingt [75]结合三种机制:通过均质化技术建模的压实,速率相关的损伤模型的拉伸损伤以及通过黏塑性与损伤相结合进行建模的压缩破坏,从而建立了黏塑性损伤模型。Ragueneau [76]为了对混凝土结构进行 3D 非线性瞬态分析,首先建立了混凝土热力学本构方程,之后定义了屈服与损伤的函数,最后构造连续损伤力学以及与损伤耦合的可塑性的本构模型,一种用于低应变速率,另一种用于高应变速率动力学。Ren [77]首先采用具有两个损伤标量的无黏性塑性损伤理论,然后基于等效应变假说,引入有效应力空间可塑性,并通过类比 Perzyna 型黏塑性,同时考虑动态损伤演化和速率依赖性扩展,根据简化的 Perzyna 型流动规则,引入了速率相关的损伤演化。最后,通过将有效应力空间黏塑性和速率相关损伤演化引入到弹塑性损伤框架中,从而建立了混凝土黏塑性损伤模型。Marzec [78]为了考虑加载速度、黏性和惯性项的影响,以及确保网格独立性,并在整个应变率范围内,正确再现应变局部化,通过使用非局部理论,基于准静态循环分析中使用的增强的耦合弹塑性损伤本构模型,建立了混凝土黏塑性损伤本构模型。Wu [79]在非局部周动力理论的框架下,介绍了与经典连续介质力学中的应变率相当的材料键的拉伸速率,然后提出了一种依赖于速率的蠕变模型来描述混凝土材料的动态损伤和破坏,同时考虑了键的动态破坏以及在不同拉伸速率下损伤发展的敏感性,从而建立混凝土黏塑性损伤本构模型(模型的重要表达式详见表 7)。

**Table 7.** The important expressions of the viscoplastic damage constitutive model  
**表 7.** 黏塑性损伤本构模型的重要表达式

文献来源	模型的重要表达式	参数释义
李兆霞[68]	$\dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}^*}{E} = \frac{\sigma}{E(1-hD)}$ $\dot{\varepsilon}^v = \left( \frac{\dot{\sigma}^* - \sigma_0}{\mu} \right)^n = \left[ \frac{\sigma - \sigma_0(1-hD)}{u(1-hD)} \right]^n$	$\sigma_0$ 为屈服应力; $\mu$ 为黏性系数; $\dot{\varepsilon}^e$ 和 $\dot{\varepsilon}^v$ 为弹性应变率和非弹性应变率; $\sigma^*$ 为有效应力; $D$ 为损伤变量; $h$ 为微裂纹闭合影响系数;
Govindjee [69]	$\dot{\sigma} = C : \left[ \dot{\varepsilon} - \sum_{k=1}^M \gamma_k \partial_{\sigma} \phi_k \right]$	$\dot{\sigma}$ 为应力率; $\dot{\varepsilon}$ 为应变率; $C$ 是材料的 4 级刚度张量; $\phi_k$ 为损失函数; $\gamma_k$ 为广义拉格朗日乘数; 详见文献[69]
Dube [70]	$\dot{\lambda} = \frac{1}{m} \left\{ \frac{\langle f(Y, Z) \rangle}{Y_0} \right\}^n$	$Y_0$ 是定义损伤阈值的参数; $Z$ 是硬化-软化控制变量; $Y$ 是损伤能量释放率; $\dot{\lambda}$ 为损伤倍数; $m$ 、 $n$ 是由实验拟合的正数;
陈书宇[72]	$f(I_1, J_2, \cos 3\theta) = a \frac{J_2}{e_c^2} + \lambda \frac{J_2}{e_c} + b \frac{I_1}{e_c} - f_1(p, D, \dot{X}) = 0$	$e_c$ 为单轴有效受压应力; $\theta$ 为应力角; $I_1, J_2$ 分别为应力的第一不变量和偏应力的第二不变量; $\lambda$ 为偏平面的表达式; $\dot{X}$ 为应变率; $a, b$ 为 Ottosen 模型中的 2 个参数;
Gatuingt [75]	$\sigma_{ij} = (1-D) \left[ K \varepsilon_{ik}^e \delta_{ij} + 2G \left( \varepsilon_{ij}^e - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} \right) \right]$	$\sigma_{ij}$ 为应力张量; $D$ 为损伤变量; $K, G$ 为体积模量和剪切模量;
Ragueneau [76]	$\dot{\lambda} = \frac{f^*}{1-f^*} \left\langle \frac{F_{NT}}{m_p} \right\rangle^{n_p}$ $df^* = k(1-f^*) f^* d\varepsilon_{kk}^e$	$m_p$ 和 $n_p$ 为材料参数; $f^*$ 为孔隙率; 参数 $k$ 校准孔隙的封闭速度; $\dot{\lambda}$ 为损伤倍数; $F_{NT}$ 为修正的 Gurson 屈服函数;

### 4.7. 过应力模型

Lindholm [80]介绍了在 Dresser 玄武岩上进行的一系列测试的结果，并将获得的强度数据与包含温度和应变率的破坏准则相关联，建立了经典的过应力模型。20 世纪 80 年代，川北[81]等人在过应力模型的基础上进行修正，得到修正的过应力模型，并且该模型可以很好的描述岩石的动态行为。于亚伦[82]采用先进的 SHPB 装置对四种矿岩进行了高应变率下的动载实验，并基于过应力理论与两个基本假设，提出了岩石过应力模型。谢理想[83]在修正过应力模型本构关系的基础上，通过量纲分析方法简化了修正的过应力本构关系，得到了修正的过应力本构模型(模型的重要表达式详见表 8)。

Table 8. The important expressions of the over stress model

表 8. 过应力模型的重要表达式

文献来源	模型的重要表达式	参数释义
Lindholm [80]	$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + F \langle \sigma - f(\varepsilon) \rangle$ $\langle F(x) \rangle = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ F(x) & x > 0 \end{cases}$	$\dot{\varepsilon}$ 为应变率; $\dot{\sigma}$ 为应力率; $E$ 为弹性模量;
于亚伦[82]	$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_d} + D \left( \frac{\sigma}{\sigma_d} - 1 \right)^n$	$E_d$ 为动载应力 - 应变曲线的线性阶段斜率; $D, n$ 为材料常数; $\sigma_d$ 为动载弹性极限;
谢理想[83]	$\sigma = \begin{cases} E_0 \varepsilon \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon}{\alpha} \right)^m \right] & (\sigma < \sigma_s) \\ \left\{ \sigma_s \left[ 1 + (k\tau)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{\dot{\varepsilon}_0} \right) (\dot{\varepsilon})^{\frac{a}{n+1}} (\varepsilon - \varepsilon_s)^{\frac{b}{n}} \right] \right\} \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_s}{\alpha} \right)^m \right] & (\sigma \geq \sigma_s) \end{cases}$	$E_0$ 为静态压缩强度后的弹性模量; $m, \alpha$ 均为 WeiBull 分布参数; $\tau, n$ 均为不同岩石的固有常数; $\sigma_s$ 屈服点的应力; $k$ 为与材料相关的常数; $\dot{\varepsilon}_0$ 为特征应变率; $\varepsilon_s$ 为屈服点的应变;

### 4.8. 统计损伤模型

Li [84]通过考虑动能和表面能之间的平衡，以及加载速率，材料刚度和损伤的变化，基于连续介质力学和统计断裂力学，并假设岩石介质是各向同性，建立岩石统计损伤本构。曹文贵[85]基于应变等价性假说，考虑到岩石微观元素强度分布的随机性，建立了能够表示岩石微元强度分布的变量，构建了三维受载条件下岩石损伤软化本构方程和岩石损伤演化方程。单仁亮、东兆星[86]将统计损伤模型与黏弹性模型结合在一起，提出了统计损伤时效模型，假定损伤前损伤体均为线弹性的，并且强度均服从麦克斯韦分布。为了描述岩石的破碎分布以及损伤特性，徐未亚[87]将岩石损伤变量  $D$  引入本构模型中，并考虑弹塑性变形的特征，建立了岩石材料的统计损伤模型。单仁亮[88]通过同时将统计损伤本构模型和黏弹性模型的特点引入新的本构方程中，并对花岗岩和大理岩实验数据的分析，构建了一个简化的岩石统计损伤本构模型。李夕兵[89]利用组合模型思路，将统计损伤模型的损伤特征和黏弹性模型的弹性特性归结在一起，建立了中等应变率下动载荷下一维和三维静载荷岩石的本构模型。杨明辉[90]经大量研究，得出了岩石微观元素强度的统计特征，考虑到岩石内部微观元素的复杂性，将这些微元体视为损伤体和黏性结合体。同时考虑到动载荷作用下岩石的动态力学特性，建立了动荷载下岩石的统计损伤本构模型。刘军忠[91]引用前人研究方法，将统计损伤模型和黏弹性模型组合在一起，最终建立了基于麦克斯韦分布的动态损伤本构模型。曹文贵[92]在应变率影响的岩石动态强度准则的基础上，利用统计损伤理论和微元强度的测量方法，基于 Lemaitre 应变等价性假设，建立岩石动态荷载下的统计损伤本构模型。王恩元[93]

引用了统计损伤理论，列举了三个基本假设来检验轴向静载荷，围压和冲击载荷对岩石动态力学性能影响，建立了岩石统计损伤本构模型(模型的重要表达式详见表 9)。

**Table 9.** The important expressions of the related statistical damage model  
**表 9.** 相关统计损伤模型的重要表达式

文献来源	模型的关键表达式	参数释义
LI [84]	$\sigma_f = (1-D)S_c + \frac{E(1-D)}{1-2\nu} \left( \frac{C_{df}}{\alpha} \right)^{\frac{1}{1+\beta}} (\dot{\theta})^{\frac{1}{1+\beta}}$	$E$ 为弹性模量; $\sigma_f$ 为断裂应力; $D$ 为损伤变量; $S_c$ 为静态强度; $\nu$ 为泊松比; $\dot{\theta}$ 为应变率; $C_{df}$ 为裂纹密度; $\alpha, \beta$ 为材料常数;
曹文贵[85]	$\sigma_1 = E\varepsilon_1(1-D) + 2\mu\sigma_2 = E\varepsilon_1 e^{-\left(\frac{\alpha_0 I_1 + J_2^2}{F_0}\right)} + 2\mu\sigma_2$	$I_1, J_2$ 分别为应力的第一不变量和偏应力的第二不变量; $\alpha_0$ 是与岩石相关的参数; $\mu$ 是泊松比; $\sigma_1, \sigma_2$ 为主应力;
徐未亚[87]	$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} = E \left[ c_n e^{-\left(\frac{\alpha_0 I_1 + J_2^2}{F_0}\right)} + 1 - c_n \right] + E\varepsilon_1 \left\{ -m \left[ \frac{\alpha_0 I_1 + J_2^2}{F_0} \right]^{m-1} \right. \\ \left. \cdot \left[ \frac{\alpha_0 (\sigma_1 + 2\sigma_2)E}{\sigma_1 - 2\mu\sigma_2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)E}{\sqrt{3}(\sigma_1 - 2\mu\sigma_2)} \right] \right\} c_n e^{-\left(\frac{\alpha_0 I_1 + J_2^2}{F_0}\right)^m}$	$I_1, J_2$ 分别为应力的第一不变量和偏应力的第二不变量; $c_n$ 为从 0 到 1 变化的系数; $m$ 和 $F_0$ 为 Weibull 分布参数; $\alpha_0$ 是与岩石相关的参数; $\mu$ 是泊松比; $\sigma_1, \sigma_2$ 为各个方向的主应力;
单仁亮[88]	$\sigma = E\varepsilon \cdot \exp(-\varepsilon^m/a) + \eta d\varepsilon/dt$	$E$ 为未损伤岩石的初始弹性模量; $m$ 和 $a$ 为分布曲线的形状系数; $\eta$ 为黏性系数;
李夕兵[89]	$\sigma_z(t+t_0) = \frac{9KE_2}{(3K+E_2)\eta} \left[ \eta(\varepsilon_{z0} + \varepsilon_r(t)) + \frac{E_1 - \beta\eta}{\beta} (\varepsilon_{z0} + \varepsilon_r(t) - C) e^{-\beta\left(\frac{\varepsilon_z(t)}{C}\right)^{t_0}} \right] \\ + \frac{S_{x_0} + S_{y_0}}{2(3K+E_2)\eta} \left[ \gamma + \delta e^{-\beta\left(\frac{\varepsilon_z(t)}{C}\right)^{t_0}} \right] \\ t+t_0 = 1 - \exp \left\{ - \left[ \varepsilon_{z0} + \varepsilon_r(t) / \alpha - \left( \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} - 2\nu \right) \left( \frac{\sigma_{x_0} + \sigma_{y_0}}{2} \right) / E_2 \varepsilon \right]^m \right\}$	$\sigma_z(t+t_0)$ 为动静组合加载应力 ( $t \neq 0$ ); $\varepsilon_{z0}$ 为假想动静组合应力 $S_{x_0}$ 和 $S_{y_0}$ 产生的初始应变; 平均弹性模量为 $E$ ; $m$ 和 $F_0$ 为 Weibull 分布参数; $t_0$ 为岩石受力状态为零的时刻; $\eta$ 为黏性系数; $\varphi$ 为岩石的内摩擦角; 具体参数想见文献[89]
杨明辉[90]	$\sigma_x = E\varepsilon_x \exp \left[ - \left( F^* / F_0 \right)^m \right] + \mu(\sigma_y + \sigma_z) + \eta \cdot \frac{d\varepsilon_x}{dt} \sigma_y$	$E$ 为弹性模量; $\varepsilon_x$ 为 $x$ 方向的应变; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 分别为三个方向的应力; $\mu$ 为泊松比; $\eta$ 为黏性系数; $m, F_0$ 分别为岩石微元强度的 $F_d$ 的 Weibull 分布参数;

### 5. 结论与展望

综上所述，本文主要阐述了岩石或岩土体、混凝土等材料动态本构关系的构造规律和重要性，详细的叙述了准脆性材料的繁衍规律及发展历程，相关研究的水平和态势很大程度上标志着岩土工程及力学研究理论高度和研究活力及其工程设计基础的水平，力学的重要概念对深入理解自然界所发生现象的规律和机理是及其有用的，材料的动态本构关系理论的研究与生产实践和工程应用是息息相关的。通过对

非均匀准脆性材料的动态本构关系的系统科学分析, 基于非线性连续介质力学理论, 复杂岩土介质材料的动态本构关系理论繁衍和发展具有如下特征: 注重实验技术应用和力学理论相结合; 注重岩土材料宏观力学和细观力学相结合; 注重介质环境和动力学相结合。复杂的岩土介质材料与均匀材料力学行为的区别主要在于动态响应方面, 虽然相关研究取得了一定的进展, 经过对比分析不同动态本构关系构建发展及应用领域的局限性, 目前依然存在诸多问题。由于动态荷载作用下准脆性材料的破坏机理非常复杂, 以致于岩土介质材料的动态本构参数较多, 其中大多数的材料参数都是通过实验数据的拟合得到的, 缺乏一定的理论依据; 另外由于实验条件的局限, 尚无法准确描述动载下岩土介质变形及破坏机理的实验研究以及各种因素对岩土介质动力学性能的影响, 因此, 未来仍需进一步发展和构建多场复杂环境下岩土介质的动态本构关系的统一理论研究。

## 基金项目

国家重大研发计划(2020YFA0711800); 国家自然科学基金(12072363)。

## 参考文献

- [1] 王利民. 准脆性材料黏聚阻裂的计算与实验[J]. 力学季刊, 2013, 3(34): 456-462.
- [2] 王青原. 基于三点弯曲梁试验的准脆性材料断裂行为研究[D]: [硕士学位论文]. 贵阳: 贵州大学, 2018.
- [3] 王利民, 韩巍巍. 准脆性材料损伤破坏的细观联结分析[J]. 固体力学学报, 2015, 36(S1): 20-25.
- [4] 霍新. 基于 Cosserat 理论混凝土等准脆性材料弯曲性能尺寸效应[D]: [硕士学位论文]. 北京: 北京交通大学, 2018.
- [5] Holmquist, T.J. and Johnson, G.R. (1993) A Computational Constitutive Model for Concrete Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Pressures. *14th International Symposium on Ballistics*, Quebec, 26-29 September 1993, 591-600.
- [6] Riedel, W. (1999) Penetration of Reinforced Concrete by BETA-B-500 Numerical Analysis Using a New Macroscopic Concrete Model for Hydrocodes. *9th International Symposium, Interaction of the Effects of Munitions with Structures*, Berlin, 3-7 May 1999, 315-322.
- [7] Malvar, L.J., Crawford, J.E., Wesevich, J.W., et al. (1997) A Plasticity Concrete Material Model for DYNA3D. *International Journal of Impact Engineering*, **19**, 847-873. [https://doi.org/10.1016/S0734-743X\(97\)00023-7](https://doi.org/10.1016/S0734-743X(97)00023-7)
- [8] 朱兆祥. 环氧树脂在高应变率下的热黏弹性本构方程和时温等效性[J]. 宁波大学学报, 1988, 1(1): 58-68.
- [9] 郭德勇, 吕鹏飞, 赵杰超. 煤岩冲击变形破坏特性及其本构模型[J]. 煤炭学报, 2018, 43(8): 2233-2242.
- [10] Abrams, D.A. (1917) Effect of Rate of Application of Load on the Compressive Strength of Concrete. *ASTM Journal*, **17**, 364-377.
- [11] Taylor, L.M., Chen, E.P. and Kuzmaul, J.S. (1986) Microcrack-Induced Damage Accumulation in Brittle Rock under Dynamic Loading. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, **55**, 301-320. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(86\)90057-5](https://doi.org/10.1016/0045-7825(86)90057-5)
- [12] 许浒, 余志祥, 赵世春. 混凝土非线性分析中的非协调参数 Drucker-Prager 模型[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2012, 44(4): 75-80.
- [13] 周永强, 盛谦, 罗红星. 考虑率效应的岩石材料次加载面动态本构模型[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(10): 1818-1826.
- [14] 白冰, 李小春, 石露. 基于虚强度参数的塑性硬化模式[J]. 长江科学院院报, 2012, 29(8): 24-28.
- [15] Budiansky, B. and O'Connell, R.J. (1976) Elastic Moduli of Cracked Solid. *International Journal of Solids & Structures*, **21**, 61-72. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(76\)90044-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(76)90044-5)
- [16] Suaris, W. (2016) Constitutive Model for Dynamic Loading of Concrete. *Journal of Structural Engineering*, **111**, 563-576. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1985\)111:3\(563\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1985)111:3(563))
- [17] 董毓利. 不同应变率下混凝土受压全过程的实验研究及其本构模型[J]. 水利学报, 1997(7): 72-77.
- [18] Livermore Software Technology Corporation (2003) LS-DYNA Keyword User's Manual V970.
- [19] Eibl, J. and Schmidt-Hurtienne, B. (1999) Strain-Rate-Sensitive Constitutive Law for Concrete. *Journal of Engineering*



- Mechanics*, **125**, 1411-1420. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1999\)125:12\(1411\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:12(1411))
- [20] Burlion, N., Gatingt, F. and Pijaudier-Cabot, G. (2000) Compaction and Tensile Damage in Concrete: Constitutive Modelling and Application to Dynamic. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **183**, 291-308. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00223-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00223-6)
- [21] Liu, Y., Ma, A. and Huang, F. (2009) Numerical Simulations of Oblique-Angle Penetration by Deformable Projectiles into Concrete Targets. *International Journal of Impact Engineering*, **36**, 438-446. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2008.03.006>
- [22] Leppänen, J. (2006) Concrete Subjected to Projectile and Fragment Impacts: Modelling of Crack Softening and Strain Rate Dependency in Tension. *International Journal of Impact Engineering*, **32**, 1828-1841. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2005.06.005>
- [23] Polanco-Loria, M., Hopperstad, O.S., Børvik, T., et al. (2008) Numerical Predictions of Ballistic Limits for Concrete Slabs Using a Modified Version of the HJC Concrete Model. *International Journal of Impact Engineering*, **35**, 290-303. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2007.03.001>
- [24] 刘海峰, 宁建国. 强冲击荷载作用下混凝土材料动态本构模型[J]. 固体力学学报, 2008, 29(3): 231-238.
- [25] 宁建国, 刘海峰, 商霖. 强冲击荷载作用下混凝土材料动态力学特性及本构模型[J]. 中国科学, 2008, 6(16): 759-772.
- [26] Perzyna, P. (1966) Fundamental Problems in Viscoplasticity. *Advances in Applied Mechanics*, **9**, 244-368. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70009-7](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70009-7)
- [27] Tu, Z. and Lu, Y. (2010) Modifications of RHT Material Model for Improved Numerical Simulation of Dynamic Response of Concrete. *International Journal of Impact Engineering*, **37**, 1072-1082. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2010.04.004>
- [28] Nyström, U. and Gylltoft, K. (2011) Comparative Numerical Studies of Projectile Impacts on Plain and Steel-Fibre Reinforced Concrete. *International Journal of Impact Engineering*, **38**, 95-105. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2010.10.003>
- [29] Wu, J., Li, L., Du, X., et al. (2017) Numerical Study on the Asphalt Concrete Structure for Blast and Impact Load Using the Karagozian and Case Concrete Model. *Applied Sciences*, **7**, 202-214. <https://doi.org/10.3390/app7020202>
- [30] 张社荣, 宋冉, 王超. 碾压混凝土 HJC 动态本构模型修正及数值验证[J]. 振动与冲击, 2019, 38(12): 25-31.
- [31] Izzuddin, B.A. and Fang, Q. (1997) Rate-Sensitive Analysis of Framed Structures Part I: Model Formulation and Verification. *Structural Engineering & Mechanics*, **5**, 221-237. <https://doi.org/10.12989/sem.1997.5.3.221>
- [32] 黄海健. 轻质泡沫混凝土动态力学性能及本构关系[J]. 建筑材料学报, 2020, 23(2): 232-238.
- [33] Zhang, H., Wang, B., Xie, A., et al. (2017) Experimental Study on Dynamic Mechanical Properties and Constitutive Model of Basalt Fiber Reinforced Concrete. *Construction and Building Materials*, **152**, 154-167. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.06.177>
- [34] 尚仁杰. 混凝土动态本构行为研究[D]: [博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 1994.
- [35] 郑永来, 夏颂佑. 岩石黏弹性连续损伤本构模型[J]. 岩石力学与工程学报, 1996(S1): 428-432.
- [36] 陈江瑛. 水泥砂浆的率型本构方程[J]. 宁波大学学报, 2000, 27(2): 1-5.
- [37] 胡时胜, 王道荣. 冲击荷载下混凝土材料的动态本构关系[J]. 爆炸与冲击, 2002, 22(3): 242-246.
- [38] 商霖, 宁建国. 强冲击荷载下混凝土动态本构关系[J]. 工程力学, 2005, 22(2): 116-119.
- [39] 单仁亮. 云驾岭煤矿无烟煤的动态本构模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(11): 2258-2263.
- [40] 宁建国, 商霖, 孙远翔. 混凝土材料冲击特性的研究[J]. 力学学报, 2006, 38(2): 199-208.
- [41] 孟益平. 冲击荷载作用下混凝土的率型本构关系[J]. 安徽理工大学学报, 2007, 27(4): 15-18.
- [42] 翟越, 赵均海, 李寻昌. 岩石类材料损伤黏弹塑性动态本构模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, 30(S2): 3820-3824.
- [43] 谢理想. 软岩及混凝土材料损伤型黏弹性动态本构模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(1): 857-864.
- [44] Zhang, H., Liu, Y., Sun, H., et al. (2016) Transient Dynamic Behavior of Polypropylene Fiber Reinforced Mortar under Compressive Impact Loading. *Construction and Building Materials*, **111**, 30-42. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.02.049>
- [45] Zhang, H., Wang, L., Zheng, K., et al. (2018) Research on Compressive Impact Dynamic Behavior and Constitutive Model of Polypropylene Fiber Reinforced Concrete. *Construction and Building Materials*, **187**, 584-595. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.07.164>

- [46] 张文清, 穆朝民. 突出煤的冲击力学行为及本构关系的研究[J]. 煤矿安全, 2016, 47(7): 1-4.
- [47] Dong, S., *et al.* (2018) Dynamic Impact Behaviors and Constitutive Model of Super-Fine Stainless Wire Reinforced Reactive Powder Concrete. *Construction and Building Materials*, **184**, 602-616. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.07.027>
- [48] 焦楚杰, 李习波, 程从密. 基于分形理论的高强混凝土动态损伤本构关系[J]. 爆炸与冲击, 2018, 38(4): 925-930.
- [49] 付玉凯, 解北京, 王启飞. 煤的动态力学本构模型[J]. 煤炭学报, 2013, 38(10): 1769-1774.
- [50] 解北京, 严正. 基于层叠模型组合煤岩体动态力学本构模型[J]. 煤炭学报, 2019, 44(2): 463-472.
- [51] Perzyna, P. (1963) The Constitutive Equations for Rate Sensitive Plastic Materials. *Quarterly of Applied Mathematics*, **20**, 321-332. <https://doi.org/10.1090/qam/144536>
- [52] Biani, N. and Zienkiewicz, O.C. (1983) Constitutive Model for Concrete under Dynamic Loading. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **11**, 689-710. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290110508>
- [53] López Cela, J.J. (1998) Analysis of Reinforced Concrete Structures Subjected to Dynamic Loads with a Viscoplastic Drucker-Prager Model. *Applied Mathematical Modelling*, **22**, 495-515. [https://doi.org/10.1016/S0307-904X\(98\)10050-1](https://doi.org/10.1016/S0307-904X(98)10050-1)
- [54] Duvaut, G.L.J.L. (1976) Inequalities in Mechanics and Physics. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-66165-5>
- [55] Kang, H.D. and Willam, K.J. (2000) Performance Evaluation of Elastoviscoplastic Concrete Model. *Journal of Engineering Mechanics*, **126**, 995-1000. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2000\)126:9\(995\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2000)126:9(995))
- [56] Kang, H.D. and Willam, K.J. (1999) Localization Characteristics of Triaxial Concrete Model. *Journal of Engineering Mechanics*, **125**, 941-950. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1999\)125:8\(941\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:8(941))
- [57] Chen, D., Al-Hassani, S.T.S., Yin, Z., *et al.* (2001) Modeling Shock Loading Behavior of Concrete. *International Journal of Solids & Structures*, **38**, 8787-8803. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00102-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00102-0)
- [58] Winnicki, A., Pearce, C.J. and Bieanie, N. (2001) Viscoplastic Hoffman Consistency Model for Concrete. *Computers & Structures*, **79**, 7-19. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00110-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00110-3)
- [59] Wang, W.M. (1997) Stationary and Propagative Instabilities in Metals. Delft University of Technology, Delft.
- [60] 冯明琿, 吕和祥, 林皋. 黏弹塑性理论在混凝土变形中的应用[J]. 工程力学, 2002, 19(2): 3-8.
- [61] 陈书宇. 动态载荷下的混凝土本构关系及有限元实现[J]. 辽宁工学院学报, 2003, 23(1): 5-7.
- [62] Georgin, J.F. and Reynouard, J.M. (2003) Modeling of Structures Subjected to Impact: Concrete Behaviour under High Strain Rate. *Cement and Concrete Composites*, **25**, 131-143. [https://doi.org/10.1016/S0958-9465\(01\)00060-9](https://doi.org/10.1016/S0958-9465(01)00060-9)
- [63] 肖诗云, 林皋, 王哲. Drucker-Prager 材料一致率型本构模型[J]. 工程力学, 2003, 20(4): 147-151.
- [64] 肖诗云, 林皋, 李宏男. 混凝土 WW 三参数率相关动态本构模型[J]. 计算力学学报, 2004, 21(6): 641-646.
- [65] Pandey, A.K., Kumar, R., Paul, D.K., *et al.* (2006) Strain Rate Model for Dynamic Analysis of Reinforced Concrete Structures. *Journal of Structural Engineering*, **132**, 1393-1401. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2006\)132:9\(1393\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2006)132:9(1393))
- [66] 褚卫江, 苏静波, 徐卫亚. 基于一致性理论的 Drucker-Prager 材料弹黏塑本构模型[J]. 岩土力学, 2008, 29(3): 811-816.
- [67] Aráoz, G. and Luccioni, B. (2015) Modeling Concrete like Materials under Sever Dynamic Pressures. *International Journal of Impact Engineering*, **76**, 139-154. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.09.009>
- [68] 李兆霞. 一个综合模糊裂纹和损伤的混凝土应变软化本构模型[J]. 固体力学学报, 1995, 16(1): 22-30.
- [69] Govindjee (1995) Anisotropic Modelling and Numerical Simulation of Brittle Damage in Concrete. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**, 3611-3633. <https://doi.org/10.1002/nme.1620382105>
- [70] Ju, J.W. (1997) Discussion: Rate Dependent Damage Model for Concrete in Dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, **123**, 1326-1328. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1997\)123:12\(1326\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:12(1326))
- [71] Rossi, P. (1997) Strain Rate Effects in Concrete Structures: The LCPC Experience. *Materials and Structures*, **30**, 54-62. <https://doi.org/10.1007/BF02539277>
- [72] 陈书宇. 一种混凝土损伤模型和数值方法[J]. 爆炸与冲击, 1998, 18(4): 62-70.
- [73] Lee, J. and Fenves, G.L. (1998) A Plastic-Damage Concrete Model for Earthquake Analysis of Dams. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **27**, 937-956. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9845\(199809\)27:9<937::AID-EQE764>3.0.CO;2-5](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9845(199809)27:9<937::AID-EQE764>3.0.CO;2-5)
- [74] 陆晓霞, 张培源. 在围压冲击条件下岩石损伤黏塑性本构关系[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2002, 25(1): 6-8.



- [75] Gatuingt, F. and Pijaudier, C.G. (2002) Coupled Damage and Plasticity Modelling in Transient Dynamic Analysis of Concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **26**, 1-24. <https://doi.org/10.1002/nag.188>
- [76] Ragueneau, F. and Gatuingt, F. (2003) Inelastic Behavior Modelling of Concrete in Low and High Strain Rate Dynamics. *Computers & Structures*, **81**, 1287-1299. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(03\)00043-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(03)00043-9)
- [77] Ren, X. and Li, J. (2013) A Unified Dynamic Model for Concrete Considering Viscoplasticity and Rate-Dependent Damage. *International Journal of Damage Mechanics*, **22**, 530-555. <https://doi.org/10.1177/1056789512455968>
- [78] Marzec, I. and Tejchman, J. (2013) Computational Modelling of Concrete Behaviour under Static and Dynamic Conditions. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, **61**, 85-96. <https://doi.org/10.2478/bpasts-2013-0007>
- [79] Ju, J.W. (1997) Discussion: Rate Dependent Damage Model for Concrete in Dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, **123**, 1326-1328. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1997\)123:12\(1326\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:12(1326))
- [80] Lindholm, U.S., Yeakley, L.M. and Nagy, A. (1974) The Dynamic Strength and Fracture Properties of Dresser Basalt. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, **11**, 181-191. [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(74\)90885-7](https://doi.org/10.1016/0148-9062(74)90885-7)
- [81] Muxia, Z., Zuoteng, Y. and Chuanbei, R. (1977) On the Mechanical Behaviour of Rocks under Impulsive Loading. *Bulletin of the Faculty of Engineering, Hokkaido University*, **3**, 51-61.
- [82] 于亚伦. 高应变率下的岩石本构方程[C]//岩石破碎理论与实践——全国第五届岩石破碎学术会论文集. 岩石破碎理论与实践, 1992: 40-44.
- [83] 谢理想, 赵光明, 孟祥瑞. 岩石在冲击载荷下的过应力本构模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(S1): 2772-2781.
- [84] Liu, L. and Katsabanis, P.D. (1997) Development of a Continuum Damage Model for Blasting Analysis. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, **34**, 217-231. [https://doi.org/10.1016/S0148-9062\(96\)00041-1](https://doi.org/10.1016/S0148-9062(96)00041-1)
- [85] 曹文贵. 岩石损伤软化统计本构模型之研究[J]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(6): 628-633.
- [86] 东兆星, 单仁亮. 高应变率下岩石本构特性的研究[J]. 工程爆破, 1999, 5(2): 5-9.
- [87] 徐卫亚, 韦立德. 岩石损伤统计本构模型的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(6): 787-791.
- [88] 单仁亮. 岩石动态破坏的时效损伤本构模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(11): 1771-1776.
- [89] 李夕兵, 左宇军, 马春德. 中应变率下动静组合加载岩石的本构模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(5): 865-874.
- [90] 杨明辉, 赵明华, 曹文贵. 基于统计理论的岩石动态损伤本构模型研究[J]. 武汉理工大学学报, 2007, 29(4): 95-98.
- [91] 刘军忠, 许金余, 吕晓聪. 围压下岩石的冲击力学行为及动态统计损伤本构模型研究[J]. 工程力学, 2012, 29(1): 55-63.
- [92] 曹文贵, 林星涛, 张超. 基于非线性动态强度准则的岩石动态变形过程统计损伤模拟方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, 36(4): 794-802.
- [93] 王恩元, 孔祥国, 何学秋. 冲击载荷下三轴煤体动力学分析及损伤本构方程[J]. 煤炭学报, 2019, 44(7): 2049-2056.