International Journal of Mechanics Research 力学研究, 2021, 10(2), 90-98
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ijm
https://doi.org/10.12677/ijm.2021.102009

Hans汉斯

基于泛复函的各向异性板裂纹尖端应力场解法

贾普荣

西北工业大学力学与土木建筑学院，陕西 西安
Email: prjia@nwpu.edu.cn

收稿日期：2021年3月22日；录用日期：2021年5月25日；发布日期：2021年6月1日

摘　要

本文介绍了泛复变函数的基本理论，利用特定的泛复变量建立求解各向异性材料弹性力学偏微分方程的广义复变函数方法。通过引入泛复变函数和极坐标代换方法解决了含裂纹各向异性板的应力边值问题。推导出I型裂纹端部应力场的实函数通解，有助于改进复合材料断裂力学的基本理论和研究方法。

关键词

泛复变函数，各向异性材料，坐标代换，裂纹端部应力场

Crack Tip Stress Field Solution to Anisotropic Plate Based on Pan-Complex Function

Purong Jia

School of Mechanics and Civil Engineering & Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi
Email: prjia@nwpu.edu.cn

Received: Mar. 22nd, 2021; accepted: May 25th, 2021; published: Jun. 1st, 2021

Abstract

The basic theory of pan-complex function is introduced, and the generalized complex function method to solve the partial differential equation of elastic mechanics for the anisotropic materials is built by the specific pan-complex variable. The pan-complex function and the polar coordinate replace method are utilized with the aim of solving the stress boundary problems for the anisotropic plate with a crack. The general solution of Mode I crack-tip stress field is derived with real function

文章引用: 贾普荣. 基于泛复函的各向异性板裂纹尖端应力场解法[J]. 力学研究, 2021, 10(2): 90-98.
DOI: 10.12677/ijm.2021.102009

variables. It is an aid to improve the basic theory and research method in the fracture mechanics to composite materials.

Keywords

Pan-Complex Function, Anisotropic Materials, Coordinate Replace, Crack-Tip Stress Field

1. 引言

泛复变函数论(pan-complex function theory)是一种广义函数论概念，将常用单变量复变函数推广到多维空间复变量的广义复变函数方法。泛复函理论已成为不同工程领域基础研究与应用的有力工具[1] [2] [3]，显示出独特的作用和效果，理论创新方兴未艾，应用前景非常宽广。一般工程材料的断裂力学问题已建立了完备的求解裂纹尖端奇异应力场及应力强度因子的理论与方法，已有许多相关的文献书籍提供参考[4] [5]。然而各向异性材料的弹性常数多，导致应力边值问题的基本方程复杂而求解难度大。近年来对正交异性材料的断裂力学问题研究引起关注，理论研究呈现出明显进展[6] [7] [8]。由于复合材料力学性能具有各向异性特征，因此对于各向异性材料的断裂问题研究具有重要理论意义与工程应用前景。本文以张开型裂纹板为例(如图 1 所示)，运用泛复变函数及坐标变换方法推导出各向异性板裂纹尖端应力场，为进一步发展泛复函理论并有效解决工程实际问题发挥积极作用。

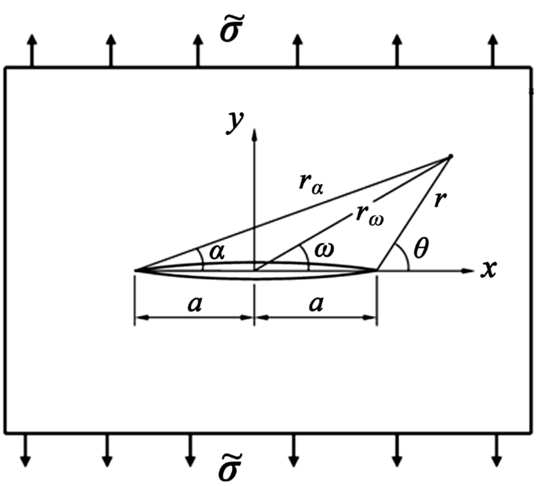

Figure 1. Central crack plate and axes
图 1. 中心裂纹板及坐标系

2. 泛复变函数基本理论

在解决弹性力学平面边值问题时，利用复变函数及其坐标变换法得到了一些经典的结果，若采用实函数求解就十分困难。复变函数理论中，常用的基本变量是复数 z，即：$z = x + iy$，$\bar{z} = x - iy$ （$i = \sqrt{-1}$）。为了解决各向异性材料中的应力边值问题，需要扩充复变量及复变函数的概念，即引进泛复变函数理论。

一般各向同性材料弹性力学平面问题的偏微分方程是标准的拉普拉斯方程，可利用调和函数求解，即采用常规的复变函数理论。而对于各向异性材料，弹性常数较多，基本偏微分方程较为复杂，且包含有材料参数，因此在求解时基本变量中需要适当引入材料参数，即采用泛复变量及泛复变函数理论才能得到满足偏微分方程的基本函数解答。

首先将泛复变量 w 与其共轭复变量 $\overline{w}$ 表示为：

$$w = x + qy = x + gy + ihy\,,\quad \overline{w} = x + \overline{q}y = x + gy - ihy \tag{1}$$

复常数 $(q, \overline{q})$ 取为：$q = g + ih$，$\overline{q} = g - ih$，即 g, h 为实数(且规定 $h > 0$)。容易得到以下关系式：

$$q + \overline{q} = 2g\,,\quad q - \overline{q} = 2hi\,,\quad q\overline{q} = g^2 + h^2$$

泛复变量具有以下性质：

$$w\overline{w} = (x + qy)(x + \overline{q}y) = x^2 + 2gxy + \left(g^2 + h^2\right)y^2 = (x + gy)^2 + h^2y^2$$

因此可定义泛复变量的范数为：

$$\|w\| = \|\overline{w}\| = \sqrt{(x + gy)^2 + h^2y^2} = L \tag{2}$$

对于裂纹长为 $2a$ 的中心裂纹板(如图 1 所示)，实变量 x, y 和复变量 w 可按极坐标形式表示如下：

$$x = a + r\cos\theta = r_\omega\cos\omega = r_\alpha\cos\alpha - a\,,\quad y = r\sin\theta = r_\omega\sin\omega = r_\alpha\sin\alpha$$

$$w = x + gy + ihy = a + r\cos\theta + gr\sin\theta + ihr\sin\theta$$

$$w = r_\omega\cos\omega + gr_\omega\sin\omega + ihr_\omega\sin\omega\,,\quad w = r_\alpha\cos\alpha - a + gr_\alpha\sin\alpha + ihr_\alpha\sin\alpha$$

由此可得：

$$\left.\begin{aligned} w - a &= r\left(\cos\theta + g\sin\theta + ih\sin\theta\right) \\ w &= r_\omega\left(\cos\omega + g\sin\omega + ih\sin\omega\right) \\ w + a &= r_\alpha\left(\cos\alpha + g\sin\alpha + ih\sin\alpha\right) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

为了后面简化泛复函的关系式，首先对三角函数表达式进行如下变换：

$$\cos\theta + g\sin\theta = J\cos\beta\,,\quad h\sin\theta = J\sin\beta$$

并定义 $J > 0$，由此容易确定出下列关系式：

$$\left.\begin{aligned} &\cos\theta + g\sin\theta + ih\sin\theta = J\left(\cos\beta + i\sin\beta\right) = Je^{i\beta} \\ &\tan\beta = \frac{h\sin\theta}{\cos\theta + g\sin\theta},\quad J = \sqrt{(\cos\theta + g\sin\theta)^2 + (h\sin\theta)^2} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

泛复函对坐标变量 (x, y) 的偏导数为：

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} = 1\,,\quad \frac{\partial w}{\partial y} = q = g + ih\,,\quad \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} = \overline{q} = g - ih$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F(w,\overline{w})}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial F}{\partial \overline{w}} \\ \frac{\partial F(w,\overline{w})}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} = q\frac{\partial F}{\partial w} + \overline{q}\frac{\partial F}{\partial \overline{w}} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

因此可求得高阶偏导数为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}&=\left(\frac{\partial}{\partial w}+\frac{\partial}{\partial \bar{w}}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial w}+\frac{\partial F}{\partial \bar{w}}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial w\partial \bar{w}}+\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{w}^2}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}&=\left(q\frac{\partial}{\partial w}+\bar{q}\frac{\partial}{\partial \bar{w}}\right)\left(q\frac{\partial F}{\partial w}+\bar{q}\frac{\partial F}{\partial \bar{w}}\right)=q^2\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}+2q\bar{q}\frac{\partial^2 F}{\partial w\partial \bar{w}}+\bar{q}^2\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{w}^2}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}&=\left(\frac{\partial}{\partial w}+\frac{\partial}{\partial \bar{w}}\right)\left(q\frac{\partial F}{\partial w}+\bar{q}\frac{\partial F}{\partial \bar{w}}\right)=q\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}+2g\frac{\partial^2 F}{\partial w\partial \bar{w}}+\bar{q}\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{w}^2}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

3. 平面应力问题解法

求解弹性体平面应力问题的惯用方法就是将应力分量作为基本变量，满足平衡微分方程和应变协调方程，并根据应力边界条件选择合理的应力函数进行求解。为了满足平衡微分方程(忽略体力)，一般利用应力函数 $F(x,y)$ 表示应力如下：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}，\quad \sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}，\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \tag{7}$$

承载弹性体内各点产生的相对位移而导致体内应变，平面问题中一点的三个应变分量($\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$)由两个位移分量确定。因此推导出三个应变分量必须满足相容条件，也就是应变协调方程：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{8}$$

复合材料的力学性能具有方向性，例如层合板是按工程需要而设计的各向异性材料，其板内的弹性力学分析可按照平面应力状态处理。为了叙述清楚，现以坐标轴(x, y)为参考系，将各向异性材料在平面应力状态下的本构关系表示为：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y+a_{16}\tau_{xy}\\ \varepsilon_y&=a_{12}\sigma_x+a_{22}\sigma_y+a_{26}\tau_{xy}\\ \gamma_{xy}&=a_{16}\sigma_x+a_{26}\sigma_y+a_{66}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中常数 a_{ij} 为参考坐标系(x, y)下各向异性材料的柔度系数。将应力分量表达式(7)代入物理方程(9)，再将所得的应变分量代入协调方程(8)，由此可推导出求解一般复合材料平面应力问题的基本方程为：

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}+A_1\frac{\partial^4 F}{\partial x\partial y^3}+A_2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+A_3\frac{\partial^4 F}{\partial x^3\partial y}+A_4\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}=0 \tag{10}$$

式中 $A_1=-\dfrac{2a_{16}}{a_{11}}$，$A_2=\dfrac{a_{66}+2a_{12}}{a_{11}}$，$A_3=-\dfrac{2a_{26}}{a_{11}}$，$A_4=\dfrac{a_{22}}{a_{11}}$。

基本方程(10)是一个常系数齐次线性偏微分方程，应力函数 F 为实函数，可根据给定边值问题选择合适的函数类型，以便求得具体问题的解答。由式(7)和式(10)易知，可选择与应力相关的二次和三次多项式的应力函数 $F^*(x,y)$ 作为简单应力状态解答，该应力函数可表示为：

$$F^*=c_1x^2+c_2xy+c_3y^2+c_4x^3+c_5x^2y+c_6xy^2+c_7y^3 \tag{11}$$

按式(7)可求得应力分量为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=2c_3+2c_6x+6c_7y\\ \sigma_y&=2c_1+6c_4x+2c_5y\\ \tau_{xy}&=-c_2-2c_5x-2c_6y\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

下面采用泛复函讨论各向异性板平面应力状态的边值问题求解方法。

对于图 1 所示的中心裂纹板，两端区域承受拉应力 $\tilde{\sigma}$，裂纹面自由，这是典型的张开型裂纹平面应力问题。各向异性板裂纹问题也可借鉴常规材料断裂力学理论进行求解。因此需要寻求合理的应力函数满足边界条件，首先讨论以下的泛复变函数 $\Psi(w)$ 及其导数关系式：

$$\Psi(w)=\frac{1}{2}\sqrt{w^2\left(w^2-a^2\right)}-\frac{a^2}{2}\ln\left(\sqrt{w^2}+\sqrt{w^2-a^2}\right) \tag{13}$$

$$\Psi'(w)=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}w}=w\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{w^2}}，\quad \Phi(w)=\Psi''(w)=\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}w^2}=\sqrt{\frac{w^2}{w^2-a^2}} \tag{14}$$

由此看出，当 $w\to\infty$ 时，$\Phi\to 1$ 为实数；而当 $w\to a$ 时，Φ 具有奇异性。因此在解决裂纹问题时，可利用泛复变函数 $\Psi(w)$ 或其导函数构造具体的应力函数。

为了求解各向异性材料张开型裂纹板应力场问题，可选择泛复变函数及其共轭泛复数将应力函数 $F(x,y)$ 表达为：

$$F=B\Psi(w)+\bar{B}\bar{\Psi}(\bar{w})+c_0y^2 \tag{15}$$

式中 w 由式(1)给定，再对应力函数求偏导数可得：

$$\frac{\partial F}{\partial x}=B\Psi'+\bar{B}\bar{\Psi}'，\quad \frac{\partial F}{\partial y}=qB\Psi'+\bar{q}\bar{B}\bar{\Psi}'+2c_0y$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=B\Psi''+\bar{B}\bar{\Psi}''=B\Phi+\bar{B}\bar{\Phi}，\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=qB\Psi''+\bar{q}\bar{B}\bar{\Psi}''=qB\Phi+\bar{q}\bar{B}\bar{\Phi}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=q^2B\Psi''+\bar{q}^2\bar{B}\bar{\Psi}''+2c_0=q^2B\Phi+\bar{q}^2\bar{B}\bar{\Phi}+2c_0$$

将上列偏导数代入到式(7)，可得应力分量的表达式为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=q^2B\Phi+\bar{q}^2\bar{B}\bar{\Phi}+2c_0=2\,\mathrm{Re}\left(q^2B\Phi\right)+2c_0\\ \sigma_y&=B\Phi+\bar{B}\bar{\Phi}=2\,\mathrm{Re}\left(B\Phi\right)\\ \tau_{xy}&=-qB\Phi-\bar{q}\bar{B}\bar{\Phi}=-2\,\mathrm{Re}\left(qB\Phi\right)\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

再对应力函数求高阶偏导数，代入四次偏微分方程(10)就可导得下式：

$$\left(q^4+A_1q^3+A_2q^2+A_3q+A_4\right)B\Phi''+\left(\bar{q}^4+A_1\bar{q}^3+A_2\bar{q}^2+A_3\bar{q}+A_4\right)\bar{B}\bar{\Phi}''=0$$

由此得到求解泛复数 $(q,\bar{q})$ 的特征方程：

$$\left.\begin{aligned}q^4+A_1q^3+A_2q^2+A_3q+A_4&=0\\ \bar{q}^4+A_1\bar{q}^3+A_2\bar{q}^2+A_3\bar{q}+A_4&=0\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

根据四次方程的求解方法可确定出四个根($q_1,q_2,q_3=\bar{q}_1,q_4=\bar{q}_2$)。

现在将 q_1,q_2 记为：$q_1=g_1+ih_1$，$q_2=g_2+ih_2$，且选取 $h_1>h_2>0$，可根据方程(17)的四个根来确定。由此就确定了泛复变量 w_1,w_2，即有：

$$w_1=x+q_1y=x+g_1y+ih_1y，\quad w_2=x+q_2y=x+g_2y+ih_2y$$

为求解各向异性材料张开型裂纹板的应力场，可选择两个泛复变函数为：

$$\Phi_1=\sqrt{\frac{w_1^2}{w_1^2-a^2}}，\quad \Phi_2=\sqrt{\frac{w_2^2}{w_2^2-a^2}} \tag{18}$$

再将应力表达式(16)转变为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= 2\,\mathrm{Re}\left(q_1^2B_1\Phi_1+q_2^2B_2\Phi_2\right)+2c_0\\ \sigma_y &= 2\,\mathrm{Re}\left(B_1\Phi_1+B_2\Phi_2\right)\\ \tau_{xy} &= -2\,\mathrm{Re}\left(q_1B_1\Phi_1+q_2B_2\Phi_2\right)\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

式中包含的任意常数需要根据给出的全部应力边界条件，构成一组方程进行求解，最后可确定出这些待定系数。

4. 确定应力场

各向异性材料中心裂纹板承受拉伸加载(图 1 所示)，在距离裂纹面较远区域的应力边界条件是：$\sigma_x=0$，$\sigma_y=\tilde{\sigma}$，$\tau_{xy}=0$ $(w\to\infty)$。

则在 $w\to\infty$ 时，应力函数变为：$\Phi_1=\bar{\Phi}_1=\Phi_2=\bar{\Phi}_2=1$。由式(19)可得：

$$\mathrm{Re}\left(q_1^2B_1+q_2^2B_2\right)+c_0=0,\quad 2\,\mathrm{Re}\left(B_1+B_2\right)=\tilde{\sigma},\quad \mathrm{Re}\left(q_1B_1+q_2B_2\right)=0$$

在裂纹面处($-a<x<a$，$y=0$，$w_1^2=w_2^2=x^2<a^2$)，应力边界条件是：$\sigma_y=0$，$\tau_{xy}=0$，代入式(19)可得：

$$\mathrm{Im}\left(B_1+B_2\right)=0,\quad \mathrm{Im}\left(q_1B_1+q_2B_2\right)=0$$

联合两组边界条件所得的五个方程，可求解出常数为：

$$c_0=-\mathrm{Re}\left(q_1^2B_1+q_2^2B_2\right),\quad q_1B_1+q_2B_2=0$$

$$B_1=\frac{\tilde{\sigma}}{2}\left[\frac{g_2\left(g_2-g_1\right)-h_2\left(h_1-h_2\right)}{\left(g_1-g_2\right)^2+\left(h_1-h_2\right)^2}+i\frac{g_2h_1-g_1h_2}{\left(g_1-g_2\right)^2+\left(h_1-h_2\right)^2}\right]$$

$$B_2=\frac{\tilde{\sigma}}{2}\left[\frac{g_1\left(g_1-g_2\right)+h_1\left(h_1-h_2\right)}{\left(g_1-g_2\right)^2+\left(h_1-h_2\right)^2}-i\frac{g_2h_1-g_1h_2}{\left(g_1-g_2\right)^2+\left(h_1-h_2\right)^2}\right]$$

再将求得的常数代入应力表达式(19)，可将应力场表达为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\tilde{\sigma}}{b_{12}}\mathrm{Re}\left[q_1^2\left(b_1+ib_3\right)\left(\Phi_1-1\right)+q_2^2\left(b_2-ib_3\right)\left(\Phi_2-1\right)\right]\\ \sigma_y &= \frac{\tilde{\sigma}}{b_{12}}\mathrm{Re}\left[\left(b_1+ib_3\right)\Phi_1+\left(b_2-ib_3\right)\Phi_2\right]\\ \tau_{xy} &= -\frac{\tilde{\sigma}}{b_{12}}\mathrm{Re}\left[q_1\left(b_1+ib_3\right)\Phi_1+q_2\left(b_2-ib_3\right)\Phi_2\right]\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

式中 b_1,b_2,b_{12},b_3 为实常数，计算公式如下：

$$\left.\begin{aligned}&b_1=g_2\left(g_2-g_1\right)-h_2\left(h_1-h_2\right),\ b_2=g_1\left(g_1-g_2\right)+h_1\left(h_1-h_2\right)\\ &b_{12}=b_1+b_2=\left(g_1-g_2\right)^2+\left(h_1-h_2\right)^2,\ b_3=g_2h_1-g_1h_2\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

在裂纹尖端附近区域，应力具有奇异性，为简化应力表达式先对复变量和复变函数做简化处理。考虑裂纹右端点(如图 1 所示)的局部区域($r\ll a$)，为了便于表达裂纹尖端应力，采用极坐标将变量及函数简化如下：

$$\alpha\approx0,\quad \omega\approx0,\quad r_\omega\approx a,\quad r_\alpha\approx2a,\quad w+a\approx2a$$

再根据式(3)和式(4)的表达式，可得：

$$\frac{w^2}{w^2-a^2} \approx \frac{a}{2(w-a)} = \frac{a}{2r}\frac{1}{\cos\theta + g\sin\theta + ih\sin\theta} = \frac{a}{2r}\frac{1}{Je^{i\beta}}$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{w^2}{w^2-a^2}} \approx \sqrt{\frac{a}{2r}}\frac{1}{\sqrt{J}}e^{-i\beta/2} = \sqrt{\frac{a}{2r}}\frac{1}{\sqrt{J}}\left(\cos\frac{\beta}{2} - i\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

因此，可将 Φ_1, Φ_2 表达为：

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \sqrt{\frac{w_1^2}{w_1^2-a^2}} = \sqrt{\frac{a}{2r}}\frac{1}{\sqrt{J_1}}\left(\cos\frac{\beta_1}{2} - i\sin\frac{\beta_1}{2}\right) \\ \Phi_2 &= \sqrt{\frac{w_2^2}{w_2^2-a^2}} = \sqrt{\frac{a}{2r}}\frac{1}{\sqrt{J_2}}\left(\cos\frac{\beta_2}{2} - i\sin\frac{\beta_2}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

式中：

$$\beta_1 = \arctan\frac{h_1\sin\theta}{\cos\theta + g_1\sin\theta}，\quad J_1 = \sqrt{(\cos\theta + g_1\sin\theta)^2 + (h_1\sin\theta)^2}$$

$$\beta_2 = \arctan\frac{h_2\sin\theta}{\cos\theta + g_2\sin\theta}，\quad J_2 = \sqrt{(\cos\theta + g_2\sin\theta)^2 + (h_2\sin\theta)^2}$$

将上列函数 Φ_1, Φ_2 代入到式(20)，再化简后可得应力分量为：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\tilde{\sigma}}{b_{12}}\sqrt{\frac{a}{2r}}\left[\frac{(g_1^2-h_1^2)b_1 - 2g_1h_1b_3}{\sqrt{J_1}}\cos\frac{\beta_1}{2} + \frac{(g_2^2-h_2^2)b_2 + 2g_2h_2b_3}{\sqrt{J_2}}\cos\frac{\beta_2}{2}\right. \\ &\quad \left. + \frac{(g_1^2-h_1^2)b_3 + 2g_1h_1b_1}{\sqrt{J_1}}\sin\frac{\beta_1}{2} - \frac{(g_2^2-h_2^2)b_3 - 2g_2h_2b_2}{\sqrt{J_2}}\sin\frac{\beta_2}{2}\right] - \frac{\tilde{\sigma}D}{b_{12}} \\ \sigma_y &= \frac{\tilde{\sigma}}{b_{12}}\sqrt{\frac{a}{2r}}\left(\frac{b_1}{\sqrt{J_1}}\cos\frac{\beta_1}{2} + \frac{b_2}{\sqrt{J_2}}\cos\frac{\beta_2}{2} + \frac{b_3}{\sqrt{J_1}}\sin\frac{\beta_1}{2} - \frac{b_3}{\sqrt{J_2}}\sin\frac{\beta_2}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{\tilde{\sigma}}{b_{12}}\sqrt{\frac{a}{2r}}\left[(g_2b_2 + h_2b_3)\left(\frac{1}{\sqrt{J_1}}\cos\frac{\beta_1}{2} - \frac{1}{\sqrt{J_2}}\cos\frac{\beta_2}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + (h_1b_1 + g_1b_3)\left(\frac{1}{\sqrt{J_2}}\sin\frac{\beta_2}{2} - \frac{1}{\sqrt{J_1}}\sin\frac{\beta_1}{2}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

式中：$D = (g_1^2-h_1^2)b_1 + (g_2^2-h_2^2)b_2 + 2g_2h_2b_3 - 2g_1h_1b_3$。式(23)就是各向异性材料中心裂纹板 I 型加载裂纹尖端的应力场通解，完全由实函数组成，式中的 β 和 J 与图 1 中裂纹端极坐标变量 θ 相关。

《计算举例》选取各向异性板的柔度系数为：

$$a_{11} = a_{22} = 80(\mathrm{TPa})^{-1}，\quad a_{66} = 140(\mathrm{TPa})^{-1}$$

$$a_{12} = -20(\mathrm{TPa})^{-1}，\quad a_{16} = a_{26} = -60(\mathrm{TPa})^{-1}$$

则可求得：

$$A_1 = -\frac{2a_{16}}{a_{11}} = \frac{3}{2}，\quad A_2 = \frac{a_{66} + 2a_{12}}{a_{11}} = \frac{5}{4}，\quad A_3 = -\frac{2a_{26}}{a_{11}} = \frac{3}{2}，\quad A_4 = \frac{a_{22}}{a_{11}} = 1$$

代入式(17)可得：

$$q^4 + A_1 q^3 + A_2 q^2 + A_3 q + A_4 = q^4 + 1.5q^3 + 1.25q^2 + 1.5q + 1 = 0$$

对四次方程求解，可得四个根为：

$$q_1 = 0.197822 + 0.98024i \text{，} \quad q_2 = -0.947822 + 0.3188i$$

$$q_3 = \overline{q}_1 = 0.197822 - 0.98024i \text{，} \quad q_4 = \overline{q}_2 = -0.947822 - 0.3188i$$

由此可得：$g_1 = 0.197822$，$h_1 = 0.98024$，$g_2 = -0.947822$，$h_2 = 0.3188$。

将四个数据代入计算公式(21)可求得：

$$b_1 = b_2 = 0.875 \text{，} \quad b_{12} = 1.75 \text{，} \quad b_3 = -0.992$$

再将这些数据代入式(23)，确定出应力表达式如下：

$$\frac{\sigma_x}{\tilde{\sigma}} = \sqrt{\frac{a}{2r}}\left[-\frac{0.261}{\sqrt{J_1}}\cos\frac{\beta_1}{2} + \frac{0.741}{\sqrt{J_2}}\cos\frac{\beta_2}{2} + \frac{0.716}{\sqrt{J_1}}\sin\frac{\beta_1}{2} + \frac{0.515}{\sqrt{J_2}}\sin\frac{\beta_2}{2}\right] - 0.481$$

$$\frac{\sigma_y}{\tilde{\sigma}} = \sqrt{\frac{a}{2r}}\left(\frac{0.5}{\sqrt{J_1}}\cos\frac{\beta_1}{2} + \frac{0.5}{\sqrt{J_2}}\cos\frac{\beta_2}{2} - \frac{0.567}{\sqrt{J_1}}\sin\frac{\beta_1}{2} + \frac{0.567}{\sqrt{J_2}}\sin\frac{\beta_2}{2}\right)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\tilde{\sigma}} = \sqrt{\frac{a}{2r}}\left(\frac{0.655}{\sqrt{J_2}}\cos\frac{\beta_2}{2} - \frac{0.655}{\sqrt{J_1}}\cos\frac{\beta_1}{2} + \frac{0.378}{\sqrt{J_2}}\sin\frac{\beta_2}{2} - \frac{0.378}{\sqrt{J_1}}\sin\frac{\beta_1}{2}\right)$$

式中：

$$\beta_1 = \arctan\frac{0.98\sin\theta}{\cos\theta + 0.198\sin\theta} \text{，} \quad J_1 = \sqrt{(\cos\theta + 0.198\sin\theta)^2 + (0.98\sin\theta)^2}$$

$$\beta_2 = \arctan\frac{0.319\sin\theta}{\cos\theta - 0.948\sin\theta} \text{，} \quad J_2 = \sqrt{(\cos\theta - 0.948\sin\theta)^2 + (0.319\sin\theta)^2}$$

以上说明了裂纹端部应力在极坐标系(r,θ)的表达式及其参数计算。

5. 结论

随着先进复合材料的工程应用日益扩大，各向异性材料断裂力学的理论发展显得更加突出。根据各向异性材料力学性能确定平面应力弹性力学的基本方程，建立求解偏微分方程的泛复函理论，解决了中心裂纹板的应力边值问题。推导出各向异性板裂纹端部应力场的实函数通解，举例说明各个参数的计算方法。本文的关键步骤是对泛复变量进行坐标变换，即采用变量代换关系式(4)，使得泛复变量成为指数形式，因而复变函数的实部和虚部就容易分开，这一步对简化应力表达式的最终结果十分重要。本文解析方法简明，所得结果比较完善，适合于一般各向异性体力学基础理论研究，亦具有推动工程应用的潜力。

基金项目

国家自然科学基金资助(No：51475372)。

参考文献

[1] 王其申. 由泛复函生成多项式型空间调和函数和球函数[J]. 应用数学和力学, 1997, 18(9): 819-823.

[2] 卞星明, 文远芳, 黄斐然. 基于泛复变函数求解 Maxwell 方程的方法[J]. 高电压技术, 2006, 32(4): 34-36.

[3] 熊锡金. 泛系函数论的理法扩变——泛复变函数论: 理念·方法论·定理[J]. 计算机与数字工程, 2013, 41(9): 1391-1394.

[4] 李群, 欧卓成, 陈宜亨. 高等断裂力学[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[5] Sih, G.C. (1991) Mechanics of Fracture Initiation and Propagation. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-011-3734-8

[6] Zhang, H. and Qiao, P. (2019) A State-Based Peridynamic Model for Quantitative Elastic and Fracture Analysis of Orthotropic Materials. *Engineering Fracture Mechanics*, **206**, 147-171. https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.10.003

[7] 贾普荣. 正交异性板裂纹端部应力及变形通解[J]. 力学研究, 2020, 9(2): 70-76. https://doi.org/10.12677/IJM.2020.92008

[8] 贾普荣. 正交异性材料 I + II + III 混合型裂纹尖端应力分析[J]. 力学研究, 2020, 9(4): 123-134. https://doi.org/10.12677/IJM.2020.94014