

理论力学中考虑定滑轮轴承摩擦因素的动力学问题的分析和求解

张劲夫

西北工业大学工程力学系, 陕西 西安
Email: jfzhang@nwpu.edu.cn

收稿日期: 2021年8月5日; 录用日期: 2021年9月6日; 发布日期: 2021年9月15日

摘要

由定滑轮和绳系重物所组成的这类系统的动力学问题的例题和习题常见于诸多的理论力学教科书中, 然而在这些例题和习题的设置当中, 均没有考虑轴承摩擦因素的影响, 由此所得到计算结果也就不能真实、客观地反映系统的运动规律。本文以一具体的定滑轮 - 绳系重物系统的动力学问题为例, 通过推导演示说明了如何将轴承的摩擦因素计入到系统动力学问题的分析和求解当中, 从而使得求解结果能够更加客观地反映系统的运动规律。本文所给出的这种分析和求解思路也可以类比地移栽到其他需要计入轴承摩擦影响的定滑轮 - 绳系重物系统动力学的分析和求解上。

关键词

定滑轮, 重物, 动力学, 摩擦

Analysis and Solution of Dynamic Problems Considering Friction of Fixed Pulley Bearings in Theoretical Mechanics

Jinfu Zhang

Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi
Email: jfzhang@nwpu.edu.cn

Received: Aug. 5th, 2021; accepted: Sep. 6th, 2021; published: Sep. 15th, 2021

Abstract

Examples and exercises of dynamics problems of fixed pulley-rope weight systems are common in

文章引用: 张劲夫. 理论力学中考虑定滑轮轴承摩擦因素的动力学问题的分析和求解[J]. 力学研究, 2021, 10(3): 189-193. DOI: 10.12677/ijm.2021.103018

many theoretical mechanics textbooks. However, in the setting of these examples and exercises, the friction factors of bearing are not considered, so the calculation results can not reflect the movement law of the system truly and objectively. The dynamics problem of a specific fixed pulley-rope weight system being taken as an example, it is shown how to incorporate the friction factors into the analysis and solution, so that the solution results can more objectively reflect the motion law of the system. The analysis and solution ideas given in this paper can also be applied to the analysis and solution of other fixed pulley-rope weight system dynamics in which the influence of bearing friction factors needs to be included.

Keywords

Fixed Pulley, Weight, Dynamics, Friction

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

大多数理论力学教科书(如[1]-[11])中都含有定滑轮 - 绳系重物系统动力学问题的例题和习题。然而在这些例题和习题的设置当中,均没有考虑轴承摩擦因素的影响。忽略轴承摩擦因素的影响虽然会使问题的分析和求解得以简化,但由此所得到计算结果也就不能客观、真实地反映系统的运动规律。因此,对于定滑轮 - 绳系重物系统动力学问题的分析和求解而言,计入轴承摩擦因素的影响是完全必要的。为了说明了如何将轴承的摩擦因素计入到系统动力学问题的分析和求解当中,本文以一具体的定滑轮 - 绳系重物系统的动力学问题为例,推导出了计入轴承摩擦因素影响的定滑轮角加速度、定滑轮运动规律和绳子张力的表达式。本文所给出的这种分析和求解思路也可以借鉴到其他需要计入轴承摩擦因素影响的定滑轮 - 绳系重物系统的动力学分析和求解上,这对于更加客观地分析和求解定滑轮 - 绳系重物系统的动力学问题具有重要的实际意义。

2. 推导和计算

如图 1 所示为一典型定滑轮 - 绳系重物系统,其中定滑轮的质量为 m ,半径为 R ,定滑轮对其转轴的转动惯量为 J_O ,定滑轮的轴承半径为 r ,其中轴承的轴孔和轴之间的动摩擦系数为 f 。左右两绳所系的重物的质量分别为 m_A 和 m_B (且 m_A 比 m_B 足够大,使得重物 A 能够加速向下运动)。不计绳索的质量,试求: 1) 定滑轮的角加速度; 2) 定滑轮的运动规律; 3) 左、右两绳的张力。

为了解决上述问题,取整个系统为研究对象,画出该系统的受力图(图 2)。图中 N 为轴孔表面所受到的压力, F 为轴孔表面所受到的摩擦力。对该系统应用质点系对固定轴的动量矩定理,有

$$\frac{dL_z}{dt} = m_A g R - m_B g R - F r \quad (1)$$

式中, L_z 为系统对 z 轴(z 轴通过轴承中心 O 且垂直纸面正向向外)的动量矩,其表达式为

$$L_z = J_O \omega + m_A v_A R + m_B v_B R = (J_O + m_A R^2 + m_B R^2) \omega \quad (2)$$

式中, ω 为定滑轮的角速度, v_A 和 v_B 分别为重物 A 和重物 B 的速度大小。将上式代入式(1)后,得到

$$(J_O + m_A R^2 + m_B R^2) \alpha = (m_A - m_B) g R - F r \quad (3)$$

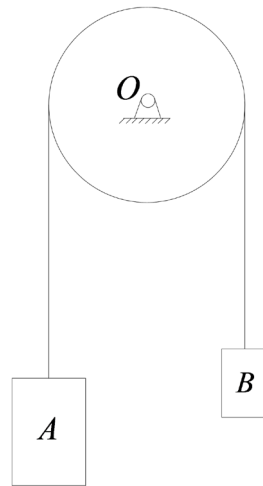


Figure 1. Fixed pulley-rope weight system
图 1. 定滑轮 - 绳系重物系统

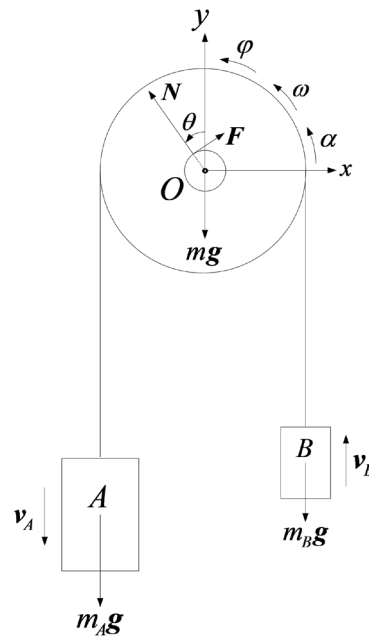


Figure 2. Free-body diagram of fixed pulley-rope weight system
图 2. 定滑轮 - 绳系重物系统受力图

考虑到式(3)中的摩擦力 F 是未知的, 因此, 无法通过该式解出定滑轮的角加速度 α 。下面将联合应用质点系的动量定理和库伦摩擦定律推导出摩擦力 F 的表达式。

对系统应用质点系的动量定理, 有

$$\frac{dP_x}{dt} = -N \sin \theta + F \cos \theta \quad (4)$$

和

$$\frac{dP_y}{dt} = N \cos \theta + F \sin \theta - (m + m_A + m_B) g \quad (5)$$

式中, θ 为压力 N 相对 y 轴的偏角(图 2 所示), P_x 和 P_y 分别为系统的动量在 x 轴和 y 轴上的投影, 其表达式分别为

$$P_x = 0 \quad (6)$$

和

$$P_y = -m_A v_A + m_B v_B = (m_B - m_A) R \omega \quad (7)$$

将式(6)和式(7)分别代入式(4)和式(5)后, 得到

$$N \sin \theta - F \cos \theta = 0 \quad (8)$$

和

$$N \cos \theta + F \sin \theta = (m + m_A + m_B) g + (m_B - m_A) R \alpha \quad (9)$$

将以上两式平方后相加, 得到

$$N^2 + F^2 = [(m + m_A + m_B) g + (m_B - m_A) R \alpha]^2 \quad (10)$$

根据库伦摩擦定律, 有

$$F = N f \quad (11)$$

联立方程(10)和方程(11), 可解出摩擦力 F 的表达式为

$$F = \frac{f [(m + m_A + m_B) g + (m_B - m_A) R \alpha]}{\sqrt{1 + f^2}} \quad (12)$$

将式(12)代入式(3)后, 得到

$$(J_O + m_A R^2 + m_B R^2) \alpha = (m_A - m_B) g R - \frac{f r [(m + m_A + m_B) g + (m_B - m_A) R \alpha]}{\sqrt{1 + f^2}} \quad (13)$$

从方程(13)中解出

$$\alpha = \frac{g [R(m_A - m_B) \sqrt{1 + f^2} - f r (m + m_A + m_B)]}{(J_O + m_A R^2 + m_B R^2) \sqrt{1 + f^2} - f r R (m_A - m_B)} \quad (14)$$

这就是计入轴承摩擦因素影响的定滑轮角加速度的表达式。考虑到 $\alpha = \ddot{\varphi}$ (φ 为定滑轮的角坐标), 因此式(14)也可以写成如下形式的微分方程

$$\ddot{\varphi} = \frac{g [R(m_A - m_B) \sqrt{1 + f^2} - f r (m + m_A + m_B)]}{(J_O + m_A R^2 + m_B R^2) \sqrt{1 + f^2} - f r R (m_A - m_B)} \quad (15)$$

将上式积分两次, 可进一步求得计入轴承摩擦因素影响的定滑轮运动规律为

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{g t^2 [R(m_A - m_B) \sqrt{1 + f^2} - f r (m + m_A + m_B)]}{2 [(J_O + m_A R^2 + m_B R^2) \sqrt{1 + f^2} - f r R (m_A - m_B)]} \quad (16)$$

式中, φ_0 和 ω_0 分别为定滑轮的初始角坐标和初始角速度。

取重物 A 为研究对象, 应用牛顿第二定律可以进一步求出左绳的张力为

$$T_A = m_A g \frac{(J_O + 2m_B R^2) \sqrt{1+f^2} + frR(m+2m_B)}{(J_O + m_A R^2 + m_B R^2) \sqrt{1+f^2} - frR(m_A - m_B)} \quad (17)$$

同理还可以求出右绳的张力为

$$T_B = m_B g \frac{(J_O + 2m_A R^2) \sqrt{1+f^2} - frR(m+2m_A)}{(J_O + m_A R^2 + m_B R^2) \sqrt{1+f^2} - frR(m_A - m_B)} \quad (18)$$

以上联合应用质点系对固定轴的动量矩定理、质点系的动量定理、库伦摩擦定律和牛顿第二定律求得了计入轴承摩擦因素影响的定滑轮角加速度、定滑轮运动规律和绳子的张力。在一些理论力学教科书(如[1][2][3])中,针对上述定滑轮-绳系重物系统为例,应用质点系对固定轴的动量矩定理和牛顿第二定律所求得的不计入轴承摩擦因素影响的定滑轮角加速度和绳子的张力分别为

$$\alpha = \frac{gR(m_A - m_B)}{J_O + m_A R^2 + m_B R^2} \quad (19)$$

$$T_A = m_A g \frac{J_O + 2m_B R^2}{J_O + m_A R^2 + m_B R^2} \quad (20)$$

$$T_B = m_B g \frac{J_O + 2m_A R^2}{J_O + m_A R^2 + m_B R^2} \quad (21)$$

将式(14)、式(17)和式(18)分别同式(19)、式(20)和式(21)相比较,可以看出:在计入轴承摩擦因素的情况下所求得的定滑轮角加速度和绳子的张力不同于忽略轴承摩擦因素的情况下所求得的结果。

3. 结束语

忽略轴承摩擦因素影响的定滑轮-绳系重物系统的动力学问题是理论力学教科书中常见的例题和习题。为了说明了如何将轴承的摩擦因素计入到定滑轮-绳系重物系统的动力学分析和求解中,本文以一具体的定滑轮-绳系重物系统为例,推导出了计入轴承摩擦因素影响的定滑轮角加速度、定滑轮运动规律和绳子张力的表达式。本文所给出的这种分析和求解思路也可以应用到其他需要计入轴承摩擦因素影响的定滑轮-绳系重物系统的动力学分析和求解上。

参考文献

- [1] 王青春, 钱双彬, 祝乐梅, 王国安. 理论力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2016: 232-233.
- [2] 陈立群, 薛纭. 理论力学[M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2014: 227-228.
- [3] 贾启芬, 刘习军. 理论力学[M]. 第3版. 北京: 机械工业出版社, 2014: 253-254.
- [4] 蔡泰信, 和兴锁, 朱西平. 理论力学(I) [M]. 第2版. 北京: 机械工业出版社, 2007: 312-313.
- [5] 刘又文, 彭献. 理论力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 216-217.
- [6] 冯维明, 刘广荣, 李文娟. 理论力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2018: 169.
- [7] 郝桐生, 殷祥超, 赵玉成, 巫静波. 理论力学[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2017: 250-251.
- [8] 师俊平, 解敏, 曹小彬, 曹升虎. 理论力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2016: 213-214.
- [9] 赵元勤, 周显波. 理论力学[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2014: 189-190.
- [10] 金江, 袁继峰, 葛文璇. 理论力学[M]. 南京: 东南大学出版社, 2019: 193-194.
- [11] 孙保苍. 理论力学基础[M]. 第2版. 北京: 国防工业出版社, 2019: 181.