

# 考虑尺度效应及记忆依赖效应半无限大薄板的热及化学冲击动态响应

张振军

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2021年10月25日; 录用日期: 2021年11月29日; 发布日期: 2021年12月9日

## 摘要

基于记忆依赖微分理论, 研究了半无限大薄板在热及化学冲击作用下的动态响应。文中给出考虑尺度效应及记忆依赖效应的半无限大薄板广义热弹性控制方程, 通过拉普拉斯积分变换及其数值反变换对控制方程进行了求解, 得到了热及化学冲击作用下的半无限大薄板中, 非局部参数、热传导时间迟滞因子和扩散时间迟滞因子对温度、应力、位移、浓度和化学势的影响。结果表明: 非局部参数对温度、浓度和化学势几乎没有影响; 体现记忆效应的核函数选取对各个物理量都有不同程度的影响。

## 关键词

广义热弹耦合理论, 记忆依赖微分, 非局部效应, 多场耦合, 拉斯积分变换

## Thermal and Chemical Shock Dynamic Response of a Semiinfinite Thin Plate Considering Scale Effect and Memory Dependent Effect

Zhenjun Zhang

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: Oct. 25<sup>th</sup>, 2021; accepted: Nov. 29<sup>th</sup>, 2021; published: Dec. 9<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

Based on memory-dependent differential theory, the dynamic response of semi-infinite thin plates

文章引用: 张振军. 考虑尺度效应及记忆依赖效应半无限大薄板的热及化学冲击动态响应[J]. 力学研究, 2021, 10(4): 237-251. DOI: 10.12677/ijm.2021.104024

subjected to thermal and chemical shocks is studied. In this paper, the generalized thermoelastic governing equation of semi-infinite thin plate considering the scale effect and memory dependent effect is given. The governing equation is solved by the Laplace integral transform and its numerical inverse transform. The equations of semi-infinite thin plate under thermal and chemical shock are obtained. Influence of non-local parameters, heat conduction time hysteresis factor and diffusion time hysteresis factor on temperature, stress, displacement, concentration and chemical potential. The results show that the non-local parameters have little effect on temperature, concentration and chemical potential. Kernel function selection which embodies memory effect has different influences on each physical quantity.

## Keywords

Generalized Thermoelastic Coupling Theory, Memory-Dependent Differential, Non-Local Effects, Multi-Field Coupling, Laplace Integral Transformation

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在经典的傅里叶热传导定律中,热在介质中的传播速度是无限大的,因此也可以把导热看作热扩散,它的热流量与温度成正比关系。但是随着科学技术的不断发展,经典的傅里叶热传导理论也有了一定局限性。如超高温传热、超低温传热及微尺度条件传热等非常规的热传导极端条件,因为传热的速度有限并且因为材料内部有一些区域不受该传热热波的影响,导致在传热过程中出现了热弛豫时间。而弛豫现象导致在传热过程中无法满足傅里叶热传导定律速度无限大的条件,因此经典的热传导定律无法再满足。为了在实际生产中解决这一问题,人们开始了对于非傅里叶热传导效应的研究,为了研究这些非常规的热传导过程,科研工作者们提出了一系列的非傅里叶热传导理论模型。Lord 和 Shulman [1]建立了 L-S 模型的广义热弹扩散理论,该理论考虑了温度与应变率的耦合效应,得到了双曲型的耦合方程,它消除了传统的热弹性耦合理论固有的无限传播速度与实验结果的悖论;Green-Lindsay [2]建立了 G-L 广义热弹性理论。在此基础上,Youssef [3]提出了双温度广义热弹性理论,引入了两种不同的温度,即传导温度和热力学温度,得到了均匀各向同性双温广义线性热弹性方程组的唯一性定理;1995 年的 Tzou [4]提出了双相滞后广义热弹性理论,它在热通量向量和温度梯度之间建立一个通用的方程,以耦合扩散、波和电磁的基本行为,该模型从双相滞后概念中概括为高速响应中的滞后行为。

Qi and Suh [5]在 2010 年提出了广义热弹动力学理论,是一种适用于超快激光脉冲激励下硅薄膜结构热力学耦合响应研究的广义热弹动力学公式;Kuang [6]提出了惯性熵热弹性理论,提出的非线性介电通用热力学变异原理,将其延伸至热电,作为热电通化动力学理论的基本物理原理。Wang 和 Zhang [7]提出了热质量热弹性理论,他从经典热传导定律出发,热质量被定义为电介质中声子气体的等效质量并考虑了惯性效应,推导并给出了各向异性非均匀材料和各向同性均匀材料的计算公式,证明了各向同性均质材料方程组的唯一性定理。与其它广义热弹性理论相比,基于热质量运动的理论更能合理地预测微尺度热传导条件下热弹性波的传播。

最近几年,分数阶微积分理论[8]及其工程应用[9]已经成为科研工作者关注的热点,同时分数阶理论也越来越多地应用到粘弹性[10]和热传导[11]等领域。因为分数阶微积分的特点是可以刻画复杂现象或材

料中的记忆性和非局部性等,因此在广义热弹性理论[3] [12]方面,各种不同的分数阶广义热弹性理论被提出。

Sherief [13]等利用分数阶微积分的方法推导出一个新的热弹性理论,即耦合热弹性理论和具有一个弛豫时间的广义热弹性理论作为极限情况,该理论允许热波以有限的速度传播,他是在 L-S 理论的基础上加入 Caputo 型分数阶导数; Sherief 和 Saleh [14]考虑了渗透物质接触的边界平面下热弹性半空间的问题,广义热弹性扩散理论与一个松弛时间,并利用基于拉普拉斯反变换的方法,数值求解了物理域中的问题,得到了温度、位移、应力、浓度和化学势;马永斌等[15]分数阶广义热弹性理论的基础上,对球形空腔的无限大体受热冲击时的动态响应做了研究;何天虎等[16]在 Sherief 分数阶热弹性理论基础上对无限长圆柱导体模型的动态响应问题进行了研究。

Caputo 分数阶微分具有描述系统或物理过程的瞬时变化率受过去情形的影响的优点,但是不能很好地反映出当时时间  $t$  比较大时的记忆影响。因此, Wang 和 Li [17]创造性地提出了“记忆依赖微分”这一概念,它的优点在于可以选取不同的核函数来反映不同的记忆影响; Ezzat [18]等提出了一种基于泰勒级数展开的弹性热扩散数学模型,根据数值结果建立了记忆依赖微分的影响;李妍[19]基于记忆依赖微分的广义热弹扩散问题的动态响应问题做了研究。

虽然在广义扩散理论中引入的记忆依赖微分具有运算更加便利,能更加灵活的体现出材料特性的优点。但是当研究一些微尺寸结构,例如研究对象为一个厚度非常薄的平板时,对广义热弹理论的适用性出现了不适用性。为了解决这一类问题,Eringen [20]提出了非局部理论,但因为非局部算子作用会导致微分-积分型控制方程,不便于求解。Eringen [21]将其简化并引入新的核函数将本构方程改写为微分形式便于更好的计算和研究。

本文在记忆依赖微分的广义热弹性理论基础之上,研究了非局部效应对无限大平面薄板动态响应的影响,并研究了选取不同核函数时对各个物理量的影响,获得了该模型的温度、化学势、位移、应力、浓度等受记忆依赖微分和非局部效应影响时的分布规律。

## 2. 基本方程

本文建立了一个均匀的各向同性的半无限大薄板,边界受到了化学势  $P$  的影响,边界面应力自由,  $x \geq 0$ 。在研究问题时,可将问题转化为一维问题,仅与坐标  $x$  有关。该模型的基本方程为:

运动方程

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

几何方程

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i,j} + \ddot{u}_{j,i}) \quad (2)$$

本构方程

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{i,j} + [\tau_0 e_{kk} - r_1 \theta - r_2 P] \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3)$$

在上述方程中,  $\sigma_{ij}$  是应力张量,  $e_{ij}$  是应变张量,  $u_i$  是位移矢量分量,  $\lambda, \mu$  是拉梅常数,  $\delta_{ij}$  是克罗内克符号,  $e_{kk}$  是体应变。

记忆依赖微分条件下,双相滞后热传导方程和扩散方程

$$(1 + \tau_1 D_{t_1}) q_i = -k_{ij} \theta_{,j} \quad (4)$$

$$(1 + \tau_2 D_{t_2}) \eta_i = -\Gamma_{ij} P_{,j} \quad (5)$$

上式中  $\tau_1$  是热传导效应的弛豫时间,  $\tau_2$  是热扩散效应的弛豫时间,  $k$  是材料的导热系数,  $\Gamma$  是扩散系数常数。

能量方程

$$q_{i,i} = -\rho T_0 \dot{S} \quad (6)$$

化学势表达式

$$\rho S = r_1 e_{kk} + l_1 \theta + dP \quad (7)$$

上式中

$$r_1 = \beta_1 + \frac{a}{b} \beta_2, l_1 = \frac{\rho C_E}{T_0} + \frac{a^2}{b}, d = \frac{a}{b}, \beta_1 = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t, \beta_2 = (3\lambda + 2\mu)\alpha_c$$

$\alpha_t$  是材料的线性热膨胀系数,  $\alpha_c$  是线性扩散膨胀系数。

质量方程和浓度方程

$$\eta_{i,i} = -\dot{C} \quad (8)$$

$$C = r_2 e_{kk} + d\theta + nP \quad (9)$$

上述方程中,  $\theta$  是温度增量  $\theta = T - T_0$ ,  $P$  是化学势,  $S$  是熵密度,  $C$  是浓度,  $q_i$  是热流矢量的分量,  $T_0$  是初始温度,  $T$  是变化后的温度,  $\eta_i$  是扩散流矢量的分量,  $\rho$  是密度,  $r_2 = \frac{\beta_2}{b}$ ,  $n = \frac{1}{b}$ 。

当考虑非局部效应时, 将非局部效应参数带入本构方程得

$$\sigma_{ij} \left[ 1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right] = 2\mu e_{i,j} + [\lambda_0 e_{kk} - r_1 \theta - r_2 P] \delta_{ij} \quad (10)$$

将式(2)和式(3)带入式(10), 得到非局部效应下的运动方程

$$\rho \dot{u}_i \left[ 1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right] = \mu u_{i,jj} + [(\lambda_0 + \mu) u_{j,ij} - r_1 \theta_{,i} - r_2 P_{,i}] \quad (11)$$

将式(6)和式(7)带入式(4), 式(8)和式(9)带入式(5), 得到非局部效应下的记忆依赖微分方程

$$(1 + \tau_1 D_{\tau_1}) (T_0 r_1 \dot{e}_{kk} + T_0 l_1 \dot{\theta} + T_0 d \dot{P}) = k \theta_{,ij} \quad (12)$$

$$(1 + \tau_2 D_{\tau_2}) (r_2 \dot{e}_{kk} + d \dot{\theta} + n \dot{P}) = \Gamma P_{,ij} \quad (13)$$

### 3. 问题描述

建立一个均匀的, 各向同性的半无限大薄板。该模型的表面无荷载作用, 在模型的左端受到热负荷和热冲击作用。根据结构和载荷特点, 文中建立的模型可以简化为一维问题, 即位移分量为

$$u_x = u(x, t), u_y = u_z = 0 \quad (14)$$

方程(2)和方程(10)~(13)写为

$$e = e_{kk} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (15)$$

$$\sigma \left[ 1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right] = (2\mu + \lambda_0) \frac{\partial u}{\partial t} - r_1 \theta - r_2 P \quad (16)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left[ 1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right] = (\lambda_0 + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} - r_2 \frac{\partial P}{\partial x} \quad (17)$$

$$(1 + \tau_1 D_{\tau_1}) \left( T_0 r_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + T_0 l_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 d \frac{\partial P}{\partial t} \right) = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (18)$$

$$(1 + \tau_2 D_{\tau_2}) \left( r_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + d \frac{\partial \theta}{\partial t} + n \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \Gamma \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (19)$$

引入以下无量纲变量

$$x' = c_1 \eta x, u' = c_1 \eta u, (e_0 a)' = c_1 \eta e_0 a, t' = c_1^2 \eta t, \theta' = \frac{\beta_1 \theta}{\rho c_1^2}, P' = \frac{P}{\beta_2},$$

$$C' = \frac{\beta_2 C}{\rho c_1^2}, \sigma' = \frac{\sigma}{\rho c_1^2}, q' = \frac{q}{k T_0 c_1 \eta}, L_0' = \frac{c_1 \eta L_0}{T_0 C_E \rho}, c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \eta = \frac{C_E \rho}{k}$$

对上述方程进行无量纲化之后,在接下来的工作中为便于表述去掉各物理量的角标。(16)~(19)以及(9)式写为

$$\sigma \left[ 1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_2 \theta - \alpha_3 P, \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left[ 1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \varepsilon_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} - \varepsilon_3 \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (21)$$

$$(1 + \tau_1 D_{\tau_1}) \left( \psi_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \psi_2 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \psi_3 \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (22)$$

$$(1 + \tau_2 D_{\tau_2}) \left( \gamma_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \gamma_2 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma_3 \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (23)$$

$$C = \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \varphi_2 \theta + \varphi_3 P, \quad (24)$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_0 + 2\mu}{\lambda + 2\mu}, \alpha_2 = \frac{r_1}{\beta_1}, \alpha_3 = \frac{r_2 + \beta_2}{\lambda + 2\mu}, \varepsilon_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \varepsilon_2 = \frac{r_1}{\alpha_1 \beta_1}, \varepsilon_3 = \frac{r_2 \beta_2}{\lambda_0 + 2\mu}, \psi_1 = \frac{T_0 r_1 \beta_1}{k \rho c_1^2 \eta},$$

$$\psi_2 = \frac{T_0 l_1}{k \eta}, \psi_3 = \frac{T_0 d \beta_1 \beta_2}{k \rho c_1^2 \eta}, \gamma_1 = \frac{r_2}{\Gamma \eta \beta_2}, \gamma_2 = \frac{d c_1^2 \rho}{\Gamma \eta \beta_1 \beta_2}, \gamma_3 = \frac{n}{\Gamma \eta}, \varphi_1 = \frac{r_2 \beta_2}{\rho c_1^2}, \varphi_2 = \frac{d \beta_2}{\beta_1}, \varphi_3 = \frac{n \beta_2^2}{\rho c_1^2}$$

问题的初始条件和正则条件为

$$u(x, 0) = \theta(x, 0) = C(x, 0) = 0, t > 0;$$

$$\dot{u}(x, 0) = \dot{\theta}(x, 0) = \dot{C}(x, 0) = 0, t > 0;$$

$$\ddot{u}(x, 0) = \ddot{\theta}(x, 0) = \ddot{C}(x, 0) = 0, t > 0;$$

并且当  $x \rightarrow \infty, t > 0$  时

$$u(x, t), \theta(x, t), C(x, t) \rightarrow 0$$

核函数定义为

$$k(t - \xi) = \begin{cases} 1, & \text{当 } p = q = 0, \\ 1 - \frac{(\tau - \xi)}{\tau}, & \text{当 } p = 0, q = \frac{1}{2}, \\ 1 - (\tau - \xi), & \text{当 } p = 0, q = \frac{\tau}{2}, \end{cases}$$

其中,  $\tau$  是热传导和扩散方程中的  $\tau_1$  和  $\tau_2$ ,  $p, q$  为常数。

#### 4. 拉普拉斯变换

定义拉普拉斯变换为

$$\bar{f}(x, s) = L[f(x, t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(x, t) dt, \operatorname{Re}(s) > 0 \quad (25)$$

对于上述方程, 我们对式(20)~(24)进行拉普拉斯变换有

$$\bar{\sigma} \left[ 1 - (e_0 a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right] = \alpha_1 \frac{d\bar{u}}{dx} - \alpha_2 \bar{\theta} - \alpha_3 \bar{P}, \quad (26)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} \left[ 1 - (e_0 a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right] \varepsilon_1 = \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \varepsilon_2 \frac{d\bar{\theta}}{dx} - \varepsilon_3 \frac{d\bar{P}}{dx}, \quad (27)$$

$$s(1 + G_1) \left( \psi_1 \frac{d^2 \bar{u}}{dx} + \psi_2 \bar{\theta} + \psi_3 \bar{P} \right) = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2}, \quad (28)$$

$$(1 + G_2) \left( \gamma_1 \frac{d\bar{u}}{dx} + \gamma_2 \bar{\theta} + \gamma_3 \bar{P} \right) = \frac{d^2 \bar{P}}{dx^2}, \quad (29)$$

$$\bar{C} = \varphi_1 \frac{d\bar{u}}{dt} + \varphi_2 \bar{\theta} + \varphi_3 \bar{P}, \quad (30)$$

上式中有

$$L \left[ \left( \psi_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \psi_2 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \psi_3 \frac{\partial P}{\partial t} \right) \right] = \left( \psi_1 \frac{d^2 \bar{u}}{dx} + \psi_2 \bar{\theta} + \psi_3 \bar{P} \right)$$

$$L \left[ \left( \gamma_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \gamma_2 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma_3 \frac{\partial P}{\partial t} \right) \right] = \left( \gamma_1 \frac{d\bar{u}}{dx} + \gamma_2 \bar{\theta} + \gamma_3 \bar{P} \right);$$

$$G_1 = 1 - \frac{2b}{s\tau_1} + \frac{2a^2}{s\tau_1^2} - e^{-s\tau_1} \left[ (1 - 2b + a^2) + \frac{2(a^2 - b)}{s\tau_1} + \frac{2a^2}{s^2\tau_1^2} \right] \quad (31)$$

$$G_2 = 1 - \frac{2b}{s\tau_2} + \frac{2a^2}{s\tau_2^2} - e^{-s\tau_2} \left[ (1 - 2b + a^2) + \frac{2(a^2 - b)}{s\tau_2} + \frac{2a^2}{s^2\tau_2^2} \right] \quad (32)$$

其中

$$L[\tau_1 D_{\tau_1}] = \begin{cases} 1 - e^{-s\tau_1}, k(t - \xi) = 1 \\ 1 - \frac{1}{s\tau_1} (1 - e^{-s\tau_1}), k(t - \xi) = 1 - \frac{(t - \xi)}{\tau} \\ \left( 1 - e^{-s\tau_1} \right) - \frac{1}{s\tau_1} (1 - e^{-s\tau_1}) + \tau_1 e^{-s\tau_1}, k(t - \xi) = 1 - (t - \xi) \end{cases}$$

$$L[\tau_2 D_{\tau_2}] = \begin{cases} 1 - e^{-s\tau_2}, k(t - \xi) = 1 \\ 1 - \frac{1}{s\tau_2} (1 - e^{-s\tau_2}), k(t - \xi) = 1 - \frac{(t - \xi)}{\tau} \\ \left( 1 - e^{-s\tau_2} \right) - \frac{1}{s\tau_2} (1 - e^{-s\tau_2}) + \tau_2 e^{-s\tau_2}, k(t - \xi) = 1 - (t - \xi) \end{cases}$$

对方程(27)~(29)进行联立, 消掉  $\bar{P}$  和  $\bar{\theta}$  得到一个如下微分方程

$$\frac{d^6}{dx^6}\bar{U} - L\frac{d^4}{dx^4}\bar{U} + M\frac{d^2}{dx^2}\bar{U} - N\bar{U} = 0 \quad (33)$$

式中

$$L = \frac{\varepsilon_1 s^2 + s(1+G_1)(\psi_2 g + \varepsilon_2 \psi_1) + s(1+G_2)(\gamma_3 g + \varepsilon_3 \gamma_1)}{g}$$

$$M = \frac{s^2(1+G_1)(1+G_2)[g(\psi_2 \gamma_3 - \psi_3 \gamma_2) + \varepsilon_1(\psi_2 \gamma_1 - \psi_1 \gamma_2)] + \varepsilon_2[s(1+G_1)\psi_2 + s(1+G_2)\gamma_3]}{g}$$

$$N = \frac{\varepsilon_1 s^4(1+G_1)(1+G_2)[(\psi_2 \gamma_3 - \psi_3 \gamma_2)]}{g}, \quad g = 1 + \varepsilon_1 s^2 (e_0 a)^2。$$

同理可以得到关于  $\bar{P}$  和  $\bar{\theta}$  的两个微分方程为

$$\frac{d^6}{dx^6}\bar{P} - L\frac{d^4}{dx^4}\bar{P} + M\frac{d^2}{dx^2}\bar{P} - N\bar{P} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{d^6}{dx^6}\bar{\theta} - L\frac{d^4}{dx^4}\bar{\theta} + M\frac{d^2}{dx^2}\bar{\theta} - N\bar{\theta} = 0 \quad (35)$$

上述方程的解为

$$\bar{U}(x, s) = \sum_{i=1}^3 \bar{U}_i e^{-k_i x} \quad (36)$$

$$\bar{\theta}(x, s) = \sum_{i=1}^3 p_i \bar{U}_i e^{-k_i x} \quad (37)$$

$$\bar{P}(x, s) = \sum_{i=1}^3 q_i \bar{U}_i e^{-k_i x} \quad (38)$$

上式中

$$p_i = \frac{-k_i [\psi_3 \gamma_1 s^2 (1+G_1)(1+G_2) + \psi_1 s(1+G_1)(k_i^2 - \gamma_3 s(1+G_2))]}{k_i^2 - \psi_2 s(1+G_1)}$$

$$q_i = \frac{-k_i [\gamma_1 s(1+G_2)(k_i^2 - \psi_2 s(1+G_1)) + \psi_1 \gamma_2 s^2 (1+G_1)(1+G_2)]}{k_i^2 - \psi_2 s(1+G_1)}。$$

$k_i$  是上述方程的特征方程的三个根为

$$k^6 - Lk^4 + Mk^2 - N = 0 \quad (39)$$

特征根的表达方式为

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{3}(2\Omega \sin Q + L)} \quad (40)$$

$$k_2 = \sqrt{-\frac{\Omega}{3}(\sqrt{3} \cos Q + \sin Q) + \frac{L}{3}} \quad (41)$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{\Omega}{3}(\sqrt{3} \cos Q - \sin Q) + \frac{L}{3}} \quad (42)$$

上式中  $\Omega = \sqrt{L^2 - 3M}$ ,  $Q = \frac{1}{3} \sin^{-1} R$ ,  $R = \frac{-2L^3 + 9LM - 27N}{3\Omega^3}$ 。

将式(36)~(38)分别带入关于应力和浓度的方程中即可得到关于应力和浓度的表达式为

$$\bar{\sigma}(x, s) = \sum_{i=1}^3 H_i \bar{U}_i e^{-k_i x} \quad (43)$$

$$\bar{C}(x, s) = \sum_{i=1}^3 O_i \bar{U}_i e^{-k_i x} \quad (44)$$

上式中

$$H_i = \frac{-\frac{1}{\varepsilon_1} k_i - \frac{r_1}{\beta_1} p_i - \frac{r_2}{\mu} q_i}{1 - (e_0 a)^2 k_i^2}, O_i = \frac{r_2}{\mu} (q_i - k_i) + \frac{\alpha_c}{\alpha_i} dp_i$$

## 5. 边界条件

该模型在  $x = 0$  的边界上受到与时间相关的热边界条件, 力学边界条件和化学冲击边界条件分别为

$$\theta_{(0,t)} = f_0 H_{(t)}, \sigma_{(0,t)} = 0, P_{(0,t)} = \phi_0 H_{(t)} \quad (45)$$

对以上三式进行拉普拉斯变换得

$$\bar{\theta}_{(0,s)} = \frac{f_0}{s}, \bar{\sigma}_{(0,s)} = 0, \bar{P}_{(0,s)} = \frac{\phi_0}{s} \quad (46)$$

上式中的  $f_0$  和  $\phi_0$  取值为 1, 对方程(46)式的三个方程联立可得常数  $u_i, i = 1, 2, 3$  的值为

$$u_1 = \frac{-\frac{1}{s}(d_2 q_3 - d_3 q_2) + \frac{1}{s}(d_2 p_3 - d_3 p_2)}{d_1(p_2 q_3 - p_3 q_2) + d_2(p_3 q_1 - p_1 q_3) + d_3(p_1 q_2 - p_2 q_1)} \quad (47)$$

$$u_2 = \frac{\frac{1}{s}(d_1 q_3 - d_3 q_1) - \frac{1}{s}(d_1 p_3 - d_3 p_1)}{d_1(p_2 q_3 - p_3 q_2) + d_2(p_3 q_1 - p_1 q_3) + d_3(p_1 q_2 - p_2 q_1)} \quad (48)$$

$$u_3 = \frac{-\frac{1}{s}(d_1 q_2 - d_2 q_1) + \frac{1}{s}(d_1 p_2 - d_2 p_1)}{d_1(p_2 q_3 - p_3 q_2) + d_2(p_3 q_1 - p_1 q_3) + d_3(p_1 q_2 - p_2 q_1)} \quad (49)$$

上式中有

$$d_i = \frac{1}{\varepsilon_1} k_i + \frac{r_1}{\beta_1} p_i + \frac{r_2}{\mu} q_i, i = 1, 2, 3。$$

上文中得到的为拉氏域中的解, 为了得到更为精确的解析解, 我们引进了 Brancik 拉普拉斯数值反变换的方法, 运用 Matlab 对各物理量进行求解。

## 6. 数值结果分析

为了验证上述模型理论的正确性以及得到非局部效应、时间弛豫因子和不同核函数下对不同物理量的影响, 接下来的这一节中我们将选取一种类似于铜的材料展开具体的数值分析和验证。以下为材料参数

$$k = 386 \text{ N/K} \cdot \text{s}, \alpha_i = 1.78 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \alpha_c = 1.98 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}, \rho = 8954 \text{ kg/m}^3, \lambda = 7.76 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

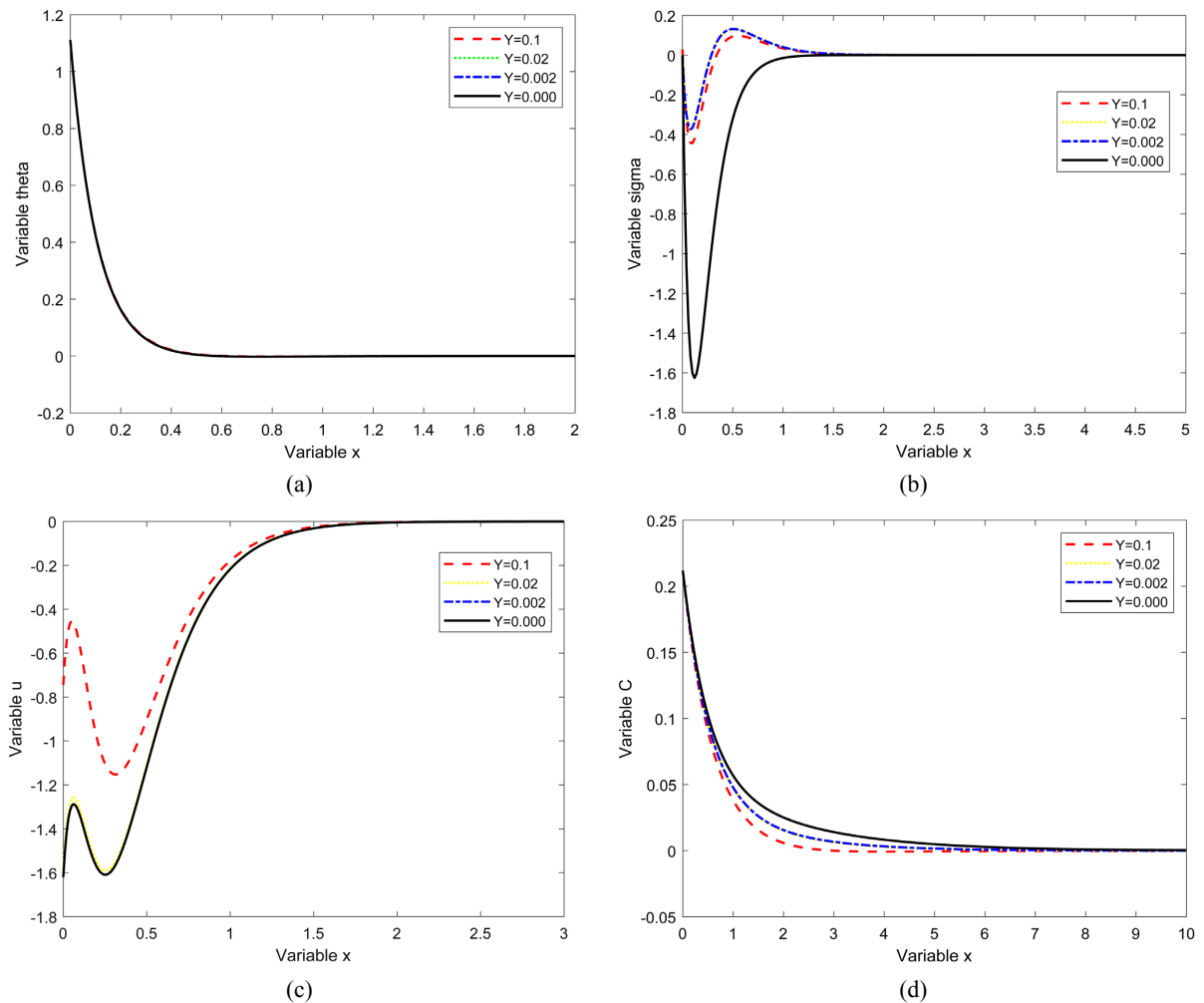


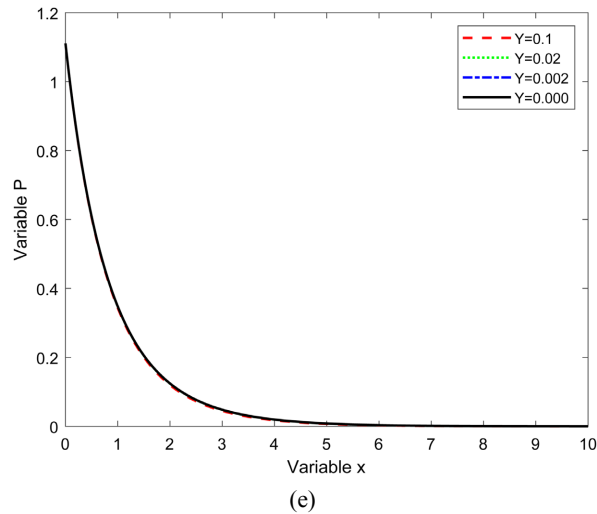
$$\mu = 3.86 \times 10^{10} \text{ kg/m} \cdot \text{s}^2, \Gamma = 8.5 \times 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{s/m}^3, T_0 = 293 \text{ K}, C_E = 383.1 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}), f_0 = 1$$

$$a = 1.2 \times 10^4 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K}), b = 9.0 \times 10^5 \text{ m}^5/(\text{kg} \cdot \text{s}^2), L_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ J/m}^2, \phi_0 = 1$$

图 1 描述了非局部参数对各个物理量的影响。为了得到非局部效应对各个物理量的影响，首先，对非局部参数  $e_0 a$  进行取值。为了便于描述在本文中  $e_0 a$  定义为  $Y$ ，分别取  $Y = 0.1$ ， $Y = 0.02$  和  $Y = 0.002$ ，热传导时间迟滞因子  $\tau_1 = 0.02$ ，扩散时间迟滞因子  $\tau_2 = 0.02$ ，核函数  $k(t - \xi) = 1$ ，研究不同的非局部参数  $Y$  对温度、应力、浓度、位移和化学势的影响；其次，将非局部参数进行退化，非局部参数取为  $Y = 0.000$ ，对没有非局部参数下的各物理量规律图与不同非局部参数下的各物理量规律图进行对比。

由图 1(b)和图 1(c)可以看出，非局部参数对应力和位移有一定的影响，且不同的非局部参数对物理量有不同程度的影响。非局部参数取 0.1 时影响比较显著；当非局部参数逐渐减小后，它对应力和位移的影响也在逐渐变小，其中当非局部参数取值为 0.02 时图像几乎与非局部参数为 0.002 时的图像重合，这表明非局部参数为 0.02 时影响已经变得非常微弱。由图 1 可以看出，浓度、温度和化学势在不同非局部参数下的规律图与非局部参数退化为 0 时的规律图基本重合，这也应证了非局部参数对这些物理量几乎没有影响，而在图 1(b)应力和图 1(c)位移的规律图中可以看到，在非局部效应的影响下，应力和位移的最大值和最小值都变大，并且和非局部参数退化为 0 时的规律曲线差异明显，但是总体的收敛趋势不变。



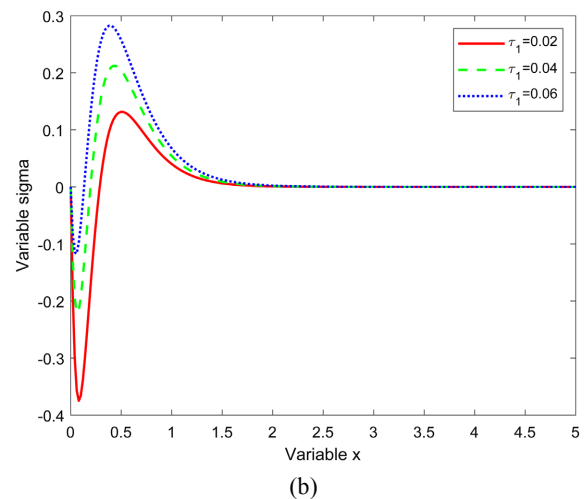
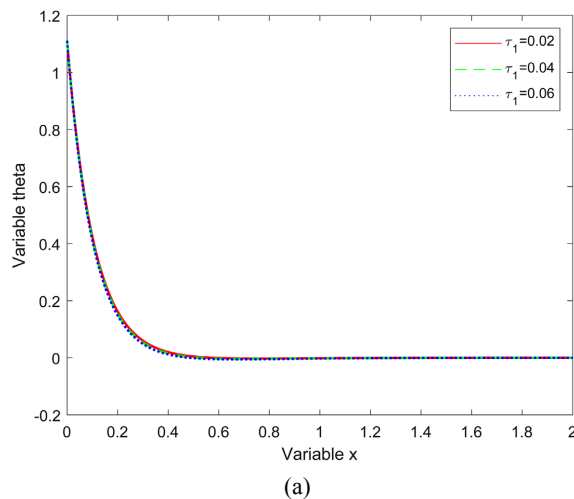


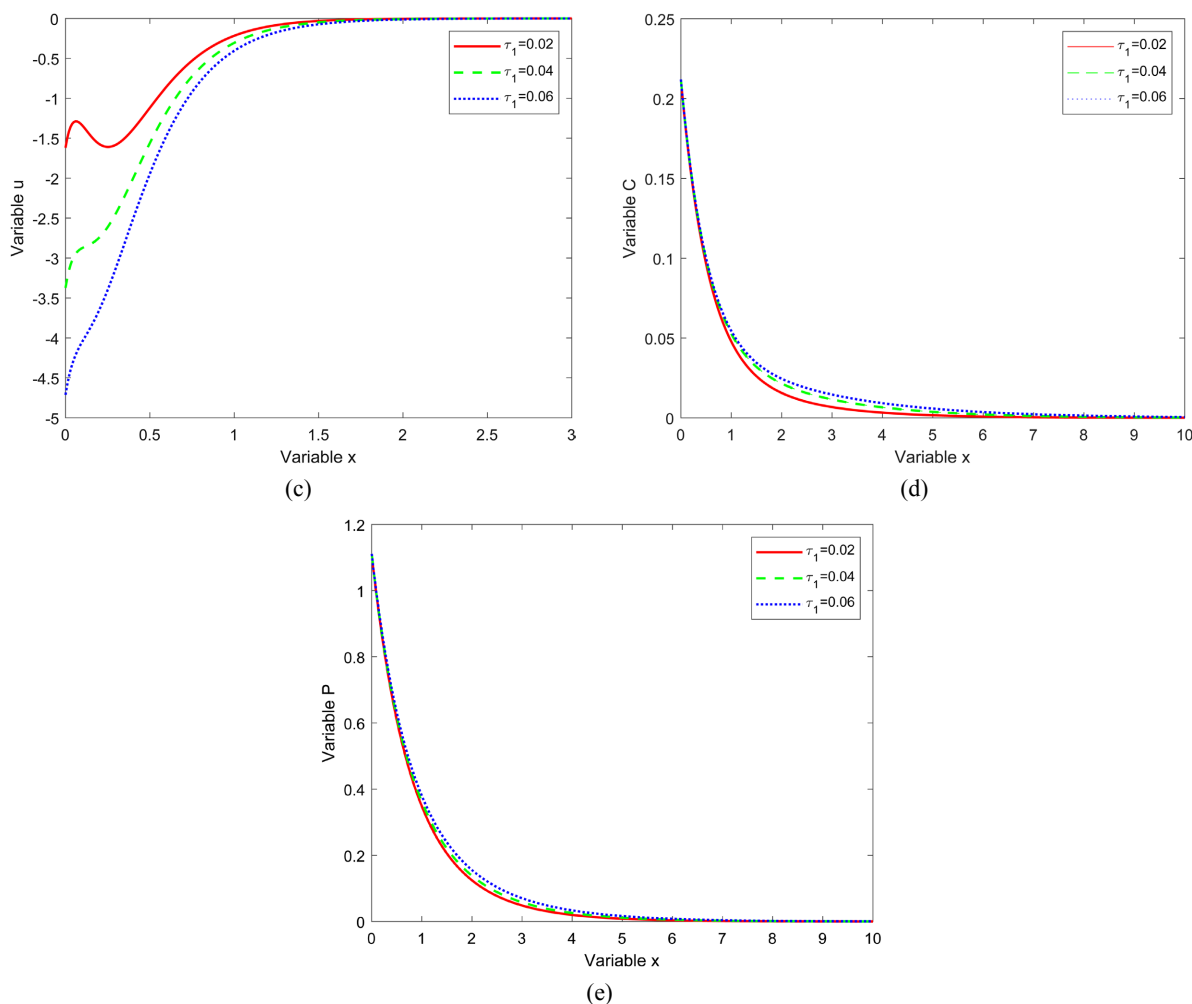
**Figure 1.** Influence trend of non-local parameters on various physical quantities. (a) Influence of non-local parameters on temperature; (b) Influence of non-local parameters on stress; (c) Influence law of non-local parameters on displacement; (d) Influence of non-local parameters on concentration; (e) Influence rule of non-local parameters on chemical potential

**图 1.** 非局部参数对各物理量的影响趋势。(a) 非局部参数对温度的影响规律；(b) 非局部参数对应力的影响规律；(c) 非局部参数对位移的影响规律；(d) 非局部参数对浓度的影响规律；(e) 非局部参数对化学势的影响规律

图 2 描述了在非局部效应的影响下，热传导时间迟滞因子  $\tau_1$  对各个物理量的影响。先对非局部参数进行取值，在这一小节非局部参数赋值为 0.01，核函数  $k(t-\xi)=1$ ，扩散时间迟滞因子  $\tau_2=0.02$ ，热传导时间迟滞因子  $\tau_1$  分别取值 0.02, 0.04 和 0.06。在不同的热传导时间迟滞因子的影响下，对温度、应力、位移、浓度和化学势的影响规律图。

从图 2 可以看出，在非局部效应下，热传导时间弛豫因子对应力和位移的影响较为显著。由图 2(b) 可以看出，当  $\tau_1$  的取值增大时，应力的趋势也逐渐增大，并且最终都趋向于零；由图 2(c) 可以看出，在距离边界  $x=0$  的同一点处，随着热传导时间弛豫因子不断增大，位移的趋势逐渐在减小。由位移规律图的变化趋势可以看出，越接近边界处且热传导时间弛豫因子越大，位移的变化越明显。由图 2(a)，图 2(d) 和图 2(e) 可以看出，在非局部效应下，热传导时间弛豫因子对温度、浓度和化学势的影响较小。其中，图 2(a) 表明，在离边界的同一点处随着  $\tau_1$  的增大温度在逐渐减小。图 2(d) 和图 2(e) 表明，在离边界的同一点处随着  $\tau_1$  的增大浓度和化学势在逐渐增大，并且在很短的距离内都收敛于零。这表明，在非局部下，





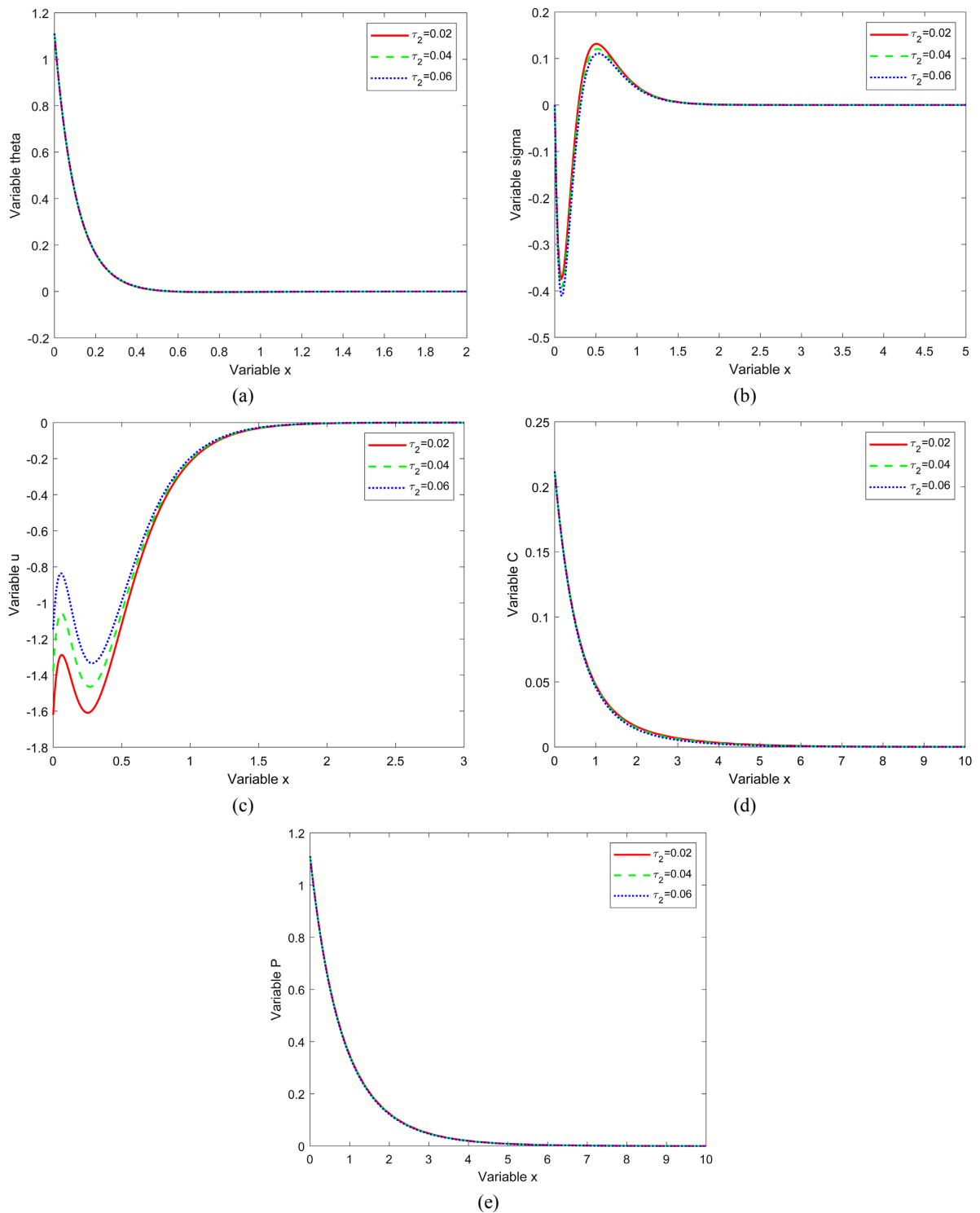
**Figure 2.** Influence trend of heat conduction time relaxation factors on various physical quantities. (a) The influence of heat conduction time relaxation factor on temperature; (b) The influence of heat conduction time relaxation factor on stress; (c) The influence of heat conduction time relaxation factor on displacement; (d) The influence of heat conduction time relaxation factor on concentration; (e) The influence of heat conduction time relaxation factor on chemical potential

**图 2.** 热传导时间弛豫因子对各物理量的影响趋势。(a) 热传导时间弛豫因子对温度的影响规律；(b) 热传导时间弛豫因子对应力的影响规律；(c) 热传导时间弛豫因子对位移的影响规律；(d) 热传导时间弛豫因子对浓度的影响规律；(e) 热传导时间弛豫因子对化学势的影响规律

距离边界  $x=0$  很短的范围内温度、浓度和化学势都发生了急剧的变化，快速收敛于 0，也可以看到边界条件对这三个物理量的影响是非常有限的。

图 3 描述了在非局部效应的影响下，热传导时间迟滞因子  $\tau_2$  对各个物理量的影响。先对非局部参数进行取值，在这一小节非局部参数赋值为 0.01，核函数  $k(t-\xi)=1$ ，扩散时间迟滞因子  $\tau_1=0.02$ ，热传导时间迟滞因子  $\tau_2$  分别取值 0.02, 0.04 和 0.06。在不同的热传导时间迟滞因子的影响下，对温度、应力、位移、浓度和化学势的影响规律图。

从图 3 可以看出，在非局部效应下，热扩散时间弛豫因子同样对应力和位移的影响较为显著。由图 3(b)可以看出，距离边界  $x=0$  的同一点处，当  $\tau_2$  的取值增大时，应力的趋势在逐渐减小，并且最终趋向于零；由图 3(c)可以看出，在距离边界  $x=0$  的同一点处，随着  $\tau_2$  不断增大，位移的趋势也逐渐在增大。同时，由位移规律图的变化趋势可以看出，越接近边界处，位移的变化越明显且在  $x=0$  处的位移绝对值越大。由图 3(a)和图 3(e)可以看出，在不同的扩散时间弛豫因子下温度和化学势的规律图几乎没有变化，



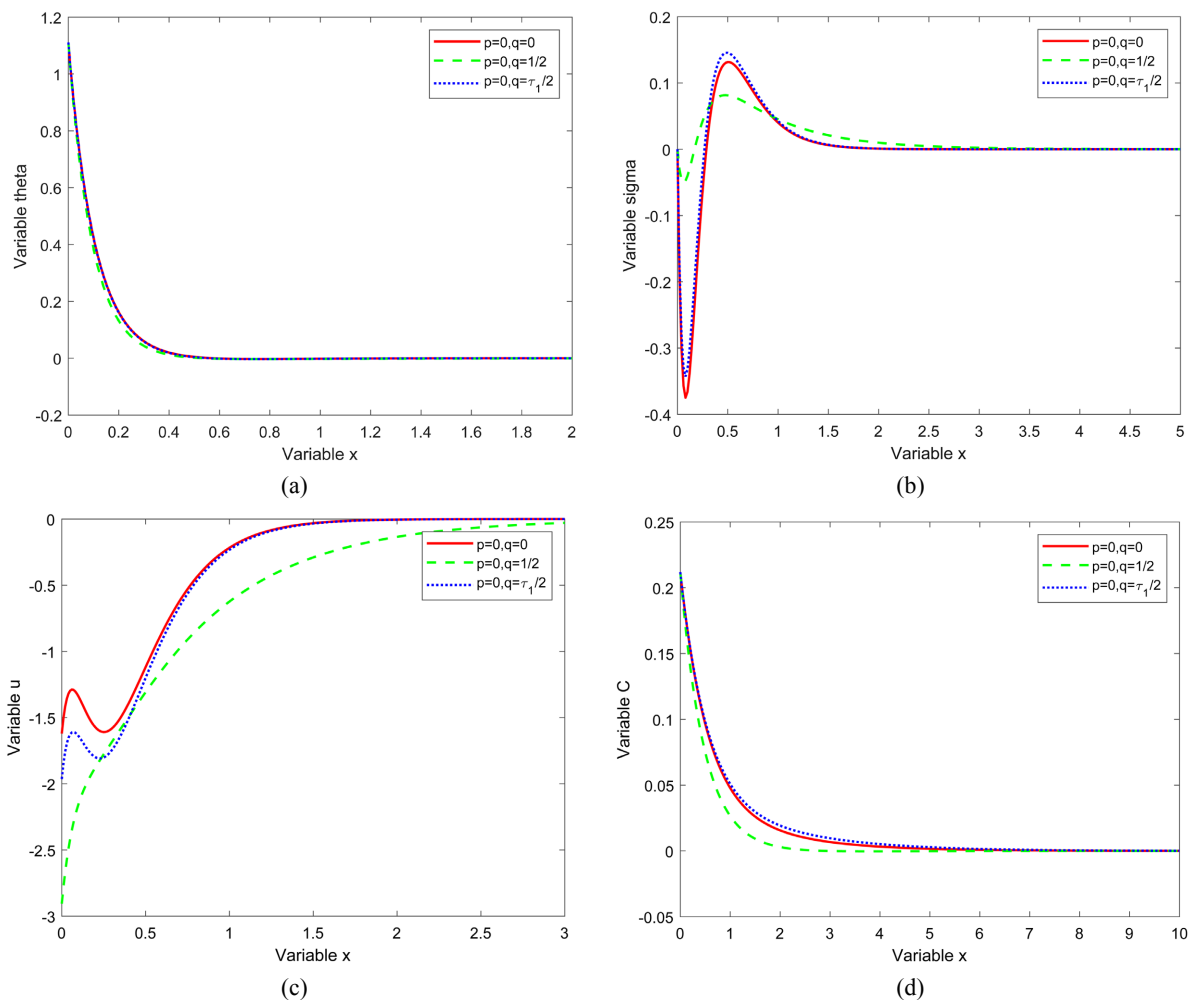
**Figure 3.** Influence trend of diffusion time relaxation factor on various physical quantities. (a) The influence of diffusion time relaxation factor on temperature; (b) The influence of diffusion time relaxation factor on stress; (c) The influence of diffusion time relaxation factor on displacement; (d) The influence of diffusion time relaxation factor on concentration; (e) The influence of diffusion time relaxation factor on chemical potential

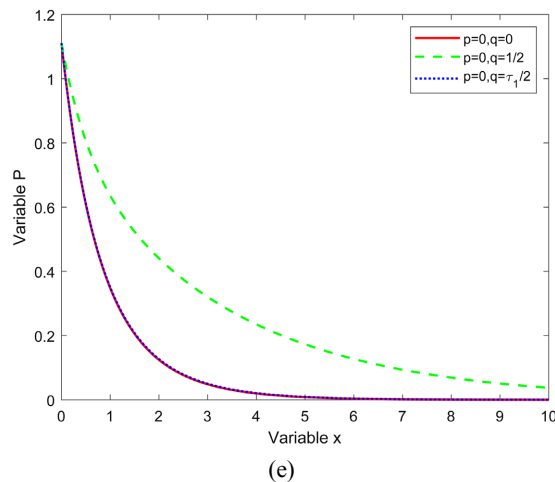
**图 3.** 扩散时间弛豫因子对各物理量的影响趋势。(a) 扩散时间弛豫因子对温度的影响规律；(b) 扩散时间弛豫因子对应力的影响规律；(c) 扩散时间弛豫因子对位移的影响规律；(d) 扩散时间弛豫因子对浓度的影响规律；(e) 扩散时间弛豫因子对化学势的影响规律

这表明扩散时间弛豫因子对温度和化学势的变化趋势几乎没有影响。对比图 2(a)和图 3(a)还可以得到,热时间弛豫因子的变化对温度有影响而扩散弛豫因子几乎不影响温度的变化。由图 3(d)表明,在非局部下距离  $x=0$  的同一点处,随着扩散时间弛豫因子的增大,浓度的趋势在逐渐减小。对比图 2(d)和图 3(d)可以得到,扩散弛豫因子的变化对浓度有影响而热传导时间弛豫因子几乎不影响浓度的变化。

图 4 选取了不同的三个核函数,研究了在不同的核函数下对各个物理量的影响。在这一小节中,非局部效应参数  $Y=0.001$ ,热传导时间弛豫因子  $\tau_1=0.02$ ,扩散时间迟滞因子  $\tau_2=0.02$ 。三个核函数分别取值为  $p=0, q=0$ ,  $p=0, q=1/2$  和  $p=0, q=\tau_1/2$ ,图 4 给出了三个不同的核函数分别对温度、应力、位移、浓度和化学势的影响规律图。

由图 4(a)和图 4(e)可以看出,不同的核函数对边界处某一点的温度和化学势有相对较弱的影响。核函数为  $p=0, q=0$  和核函数为  $p=0, q=\tau_1/2$  时,图像基本重合,它们对温度和化学势的影响几乎一致,当核函数为  $p=0, q=1/2$  时温度相比其他两个核函数会降低,但是浓度会比其他两个核函数增大。由图 4(b)可以看出,不同的核函数对应力有相对较大的影响。在应力规律图的峰值处可以看到,核函数为  $p=0, q=0$  时的应力大于  $p=0, q=\tau_1/2$  时的应力,但是这两个核函数所引起的应力变化规律图的变化趋势基本相同;当核函数为  $p=0, q=1/2$  时,对应力的变化趋势影响较大,在应力峰值处相较于其他两个核函数所引起的应力更小。由图 4(c)可以看出,不同的核函数对位移也有相对较大的影响。在位移规律图的峰值处可以看到,核函数为  $p=0, q=0$  时所引起的位移大于  $p=0, q=\tau_1/2$  时的位移,但是这两个





**Figure 4.** Influence trend of kernel function on each physical quantity. (a) Influence rules of different kernel functions on temperature; (b) Influence rules of different kernel functions on stress; (c) Influence rules of different kernel functions on displacement; (d) Influence rules of different kernel functions on concentration; (e) Influence rules of different kernel functions on chemical potential

**图 4.** 核函数对各物理量的影响趋势。(a) 不同核函数对温度的影响规律；(b) 不同核函数对应力的影响规律；(c) 不同核函数对位移的影响规律；(d) 不同核函数对浓度的影响规律；(e) 不同核函数对化学势的影响规律

核函数所引起的位移变化规律图的变化趋势基本相同；当核函数为  $p=0, q=1/2$  时，对位移的变化趋势影响较大，收敛为 0 的距离相较其他两个核函数增大。由图 4(d) 可以看出，在三个不同的核函数下，对浓度分别有不同的影响。在距离边界  $x=2$  处可以看到，核函数  $p=0, q=\tau_1/2$  引起的浓度较大，核函数  $p=0, q=0$  引起的浓度较小。

## 7. 结论

本文在记忆依赖微分条件的基础上加入了非局部效应，对在非局部效应下的各个物理量进行了研究。得到了在非局部效应下，非局部参数、热传导时间迟滞因子和扩散时间迟滞因子对温度、应力、位移、浓度和化学势的影响；在非局部效应的影响下，选取不同核函数对温度、应力、位移、浓度和化学势的影响做了研究。以下为根据对模型分析和研究得出的结论：

- 1) 非局部参数仅仅对和本构方程相关的物理量的影响较大，对温度、浓度和化学势几乎没有影响；
- 2) 不同的核函数对各个物理量都有不同的影响。这也验证了选取不同的核函数可以解决不同模型的问题，体现了它的灵活性和优越性；
- 3) 在非局部效应的影响下，热传导弛豫时间和扩散弛豫时间可以根据需要自由选择，由此可以得到更多的更为精确的力学行为。

## 基金项目

国家自然科学基金项目(12062011)，国家自然科学基金项目(11972176)。

## 参考文献

- [1] Lord, H.W. and Shulman, Y.A. (2007) A Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **15**, 299-309. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5)
- [2] Green, A. and Lindsay, K.A. (1972) Thermoelasticity. *Journal of Elasticity*, **2**, 1-7. <https://doi.org/10.1007/BF00045689>
- [3] Youssef, H.M. (2013) Theory of Two-Temperature-Generalized Thermoelasticity. *IMA Journal of Applied Mathematics*

- ics, **71**, 383-390. <https://doi.org/10.1093/imamat/hxh101>
- [4] Tzou, D.Y. (1995) A Unified Field Approach for Heat Conduction From Macro- to Micro-Scales. *Journal of Heat Transfer*, **117**, 8-16. <https://doi.org/10.1115/1.2822329>
- [5] Qi, X. and Suh, C.S. (2010) Generalized Thermo-Elastodynamics for Semiconductor Material Subject to Ultrafast Laser Heating. Part I: Model Description and Validation. *International Journal of Heat & Mass Transfer*, **53**, 41-47. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.10.010>
- [6] Kuang, Z.B. (2009) Variational Principles for Generalized Dynamical Theory of Thermopiezoelectricity. *Acta Mechanica*, **203**, 1-11. <https://doi.org/10.1007/s00707-008-0039-1>
- [7] Wang, Y.Z., Zhang, X.B. and Song, X.N. (2014) A Generalized Theory of Thermoelasticity Based on Thermomass and Its Uniqueness Theorem. *Acta Mechanica*, **225**, 797-808. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-1001-4>
- [8] Li, C., Chen, Y. and Kurths, J. (2013) Fractional Calculus and Its Applications. *Philosophical Transactions*, **371**, Article ID: 20130037. <https://doi.org/10.1098/rsta.2013.0037>
- [9] Liu, L.L. and Duan, J.S. (2015) A Detailed Analysis for the Fundamental Solution of Fractional Vibration Equation. *Open Mathematics*, **13**, 111-129. <https://doi.org/10.1515/math-2015-0077>
- [10] 李岩. 分数阶微积分及其在粘弹性材料和控制理论中的应用[D]: [博士学位论文]. 济南: 山东大学, 2008.
- [11] Povstenko, Y.Z. (2012) Nonaxisymmetric Solutions of the Time-Fractional Heat Conduction Equation in a Half-Space in Cylindrical Coordinates. *Journal of Mathematical Sciences*, **183**, 252-260. <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0811-6>
- [12] Youssef, H.M. and Al-Lehaibi, E.A. (2010) Fractional Order Generalized Thermoelastic Half-Space Subjected to Ramp-Type Heating. *Mechanics Research Communications*, **37**, 448-452. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2010.06.003>
- [13] Ef, S., et al. (2004) The Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion. *International Journal of Engineering Science*, **42**, 591-608.
- [14] Sherief, H.H. and Saleh, H.A. (2005) A Half-Space Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion. *International Journal of Solids & Structures*, **42**, 4484-4493. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.01.001>
- [15] 马永斌, 何天虎. 基于分数阶热弹性理论的含有球型空腔无限大体的热冲击动态响应[J]. 工程力学, 2016(7): 31-38.
- [16] 何天虎, 李林. 分数阶热弹性理论下的广义电磁热弹问题[J]. 兰州理工大学学报, 2016, 42(2): 167-172.
- [17] Wang, J.L. and Li, H.F. (2011) Surpassing the Fractional Derivative: Concept of the Memory-Dependent Derivative. *Computers & Mathematics with Applications*, **62**, 1562-1567. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.04.028>
- [18] Othman, M. and Sur, A. (2020) Transient Response in an Elasto-Thermo-Diffusive Medium in the Context of Memory-Dependent Heat Transfer. *Waves in Random and Complex Media*, **3**, 1-24. <https://doi.org/10.1080/17455030.2020.1737758>
- [19] 李妍. 广义热弹扩散记忆依赖问题的瞬态响应分析[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州理工大学, 2019.
- [20] Wilmanski, K. (1979) Localization Problem of Nonlocal Continuum Theories. *Archives of Mechanics*, **85**, 317-325.
- [21] Eringen and Cemal, A. (1983) On Differential Equations of Nonlocal Elasticity and Solutions of Screw Dislocation and Surface Waves. *Journal of Applied Physics*, **54**, 4703-4710. <https://doi.org/10.1063/1.332803>