

Winkler/Pasternak/Kerr地基上多孔FG板 基于四变量板理论的自由振动分析

居 腾, 马连生, 王壮壮

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2022年12月28日; 录用日期: 2023年1月11日; 发布日期: 2023年3月17日

摘 要

本文提出了一种新的广义四变量板理论,用于弹性地基上孔隙依赖功能梯度材料板(porous functionally graded plate, 简称孔隙依赖FG板)自由振动分析。考虑了三种不同的孔隙率分布(包括均匀分布、非均匀分布和对数非均匀分布)并对三种不同的地基(Winkler-Pasternak地基和Kerr地基)行了研究。通过哈密顿原理得到控制方程,通过解特征值问题得到了数值结果,研究了不同孔隙率、长细比、幂律指数和弹性刚度参数对多孔FG板基频的影响,并将所得的结果与已有文献进行对比,验证了本文理论的准确性。

关键词

FG板, 自由振动, Kerr地基, 多孔, 四变量理论

A Novel Four-Variable Plate Theory for Free Vibration of FG Plates with Porosities Resting on Winkler/Pasternak/Kerr Foundation

Teng Ju, Liansheng Ma, Zhuangzhuang Wang

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 28th, 2022; accepted: Jan. 11th, 2022; published: Mar. 17th, 2023

Abstract

The free vibration responses of porous functionally graded plate(FG)rectangular plates resting on

文章引用: 居腾, 马连生, 王壮壮. Winkler/Pasternak/Kerr 地基上多孔 FG 板基于四变量板理论的自由振动分析[J]. 力学研究, 2023, 12(1): 17-31. DOI: 10.12677/ijm.2023.121003

elastic foundations are investigated according to a novel four-variable refined plate theory. Three types of porosities distributions (even and uneven, and the logarithmic-uneven distribution) are learned. The elastic foundations are considered as *Winkler-Pasternak* and *Kerr* foundation. Governing equations are derived by using Hamilton principle. The effect of porosity parameter, slenderness ratio, the power-law index and parameters of elastic foundation are also investigated. The theoretical calculation results of fundamental frequency of porous FG plates resting on elastic foundations are predicted by solving the eigenvalue problems and compared with the available results in the literature to verify the theory.

Keywords

FGM, Free Vibration, Kerr Foundations, Porosity, Four-Variable Plate Theory

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

功能梯度材料(functionally graded, 简称 FG)是由两种或两种以上的组分组成的各向同性、微观不均匀的材料,材料特性在特定方向上连续平滑变化,它可以满足特定的机械设计要求,有着消去层间应力、分层破坏和热变形等优点,这些特性使功能梯度材料在航空航天、船舶、核能等领域发挥着重要作用。

由于 FGM 结构的广泛应用,评估它力学性能的研究有很多。Zhao 等[1]利用 FSDT 和改进的傅立叶级数方法研究了具有弹性边界条件的 FG 多孔矩形板的自由振动问题。Nguyen 等人[2]研究了反三角剪切变形理论下的功能梯度夹层板的静态、屈曲和自由振动问题。El Meiche 等[3]提出了一种双曲剪切变形理论来进行 FG 夹层板屈曲和自由振动分析。Thai [4] [5]使用四未知高阶剪切变形理论对 FG 板进行了弯曲和自由振动分析。Mantari 等[6]提出了一种新的非多项式高阶剪切理论,用于分析 *Pasternak* 基础上 FG 板的振动。Mantari 等[7]利用广义准三维混合剪切变形理论研究了 FG 板在 *Pasternak* 地基上的自由振动。Malekzadeh [8]采用微分求积法和级数解研究了双参数弹性地基上 FG 矩形板的自由振动。Li 等[9]研究了 *Winkler-Pasternak* 弹性地基上纤维增强夹层 FG 多孔板的非线性振动和动力屈曲。Baferani 等[10]使用三阶剪切理论分析了在双参数弹性基础上的 FG 矩形板的力学行为。Yang 等[11]基于一阶剪切变形理论分析了弹性地基上 FG 多层纳米复合梁的屈曲和后屈曲。Duc 等[12]研究了基于 *Winkler-Pasternak* 弹性地基的 FG 碳纳米管增强复合材料板的静态和自由振动分析。Sheikholeslami 和 Saidi [13]采用 Batra 和 Vidoli 提出的分析方法研究了简支 FG 矩形板在 *Winkler-Pasternak* 弹性地基上的自由振动。Thai 和 Choi [14]使用了一种细化的板理论来分析基于双参数 *Pasternak* 基础的 FG 板的振动和屈曲。Mahmoudi 等[15]报道了基于 *Pasternak* 弹性地基的夹层 FG 板的热力学行为。Demirhan [16]等用 Levy 法研究了各种边界下的弹性地基上的 FG 板的弯曲和振动问题。Lü [17]等人用空间状态法计算了弹性地基上厚 FG 板的精确基频。Li [18]等用准三维理论计算了弹性地基上的 FG 板的自由振动问题。Phuong [19]等计算了复合荷载下高阶剪切变形纤维 FG 石墨烯增强层合板的非线性屈曲。Wang [20]等分析了一阶剪切变形理论框架下石墨烯增强复合材料层合板屈曲和自由振动的半解析解。Zenkour [21]等研究了基于准三维理论的弹性地基上的多孔夹层 FG 板的弯曲。Hadji [22]等分析了孔隙依赖 FG 夹层板的固有频率。

本文主要用四变量板理论,通过用弯曲 w_b 和剪切 w_s 横向位移来模拟剪切理论的横向位移 w_0 。该理论变量少计算简单,而且不需要考虑剪切修正因子。板的力学性能在厚度方向上随着幂律指数变化而变化。

利用哈密顿原理, 推导了基于弹性地基的孔隙依赖 FG 板的控制方程。然后通过 Navier 法来求解这些运动方程, 通过求解特征值问题, 得到了固有频率。通过与文献中已有解的比较, 验证了本文的准确性。

2. 基本模型

2.1. 孔隙依赖 FGM 材料

考虑长度 a 宽度 b 和均匀厚度 h 的 FG 矩形板, 其几何结构和坐标系如图 1 所示, 假设其底面为金属顶面为陶瓷, 其材料特性在厚度方向均匀变化。基于具有均匀孔隙率的混合律模型, FG 板的材料参数可以写成厚度坐标 z 的函数表示如式(1)~(3), 角标 c 和 m 分别表示陶瓷和金属, P 表示 FG 板的幂律指数, ζ 表示 FG 板的物性参数(杨氏模量 E 、泊松比 ν 和密度 ρ), ζ_c 和 ζ_m 分别表示陶瓷和金属的物性参数, ξ ($0 < \xi \leq 1$) 表示孔隙率。

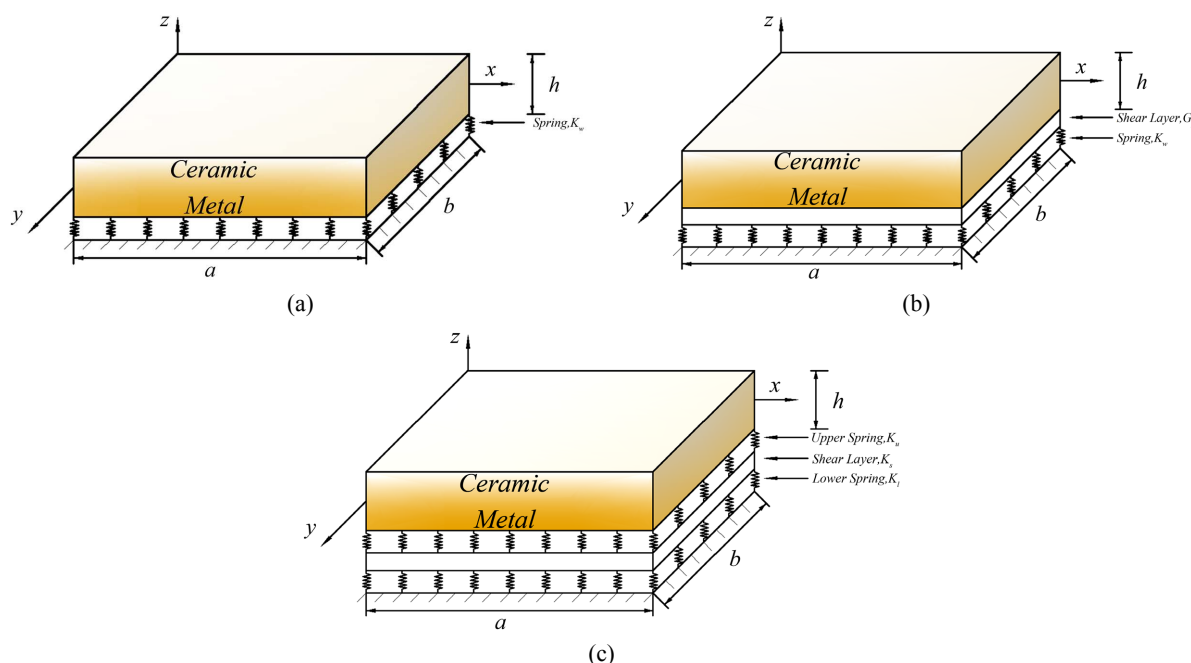


Figure 1. The geometry of FG plate resting on (a) Winkler (b) Pasternak and (c) Kerr foundation
图 1. 矩形 FGM 板嵌入 (a) Winkler 基础 (b) Pasternak 基础和 (c) Kerr 基础

2.1.1. 均匀模型

$$\zeta(z) = \zeta_c \left(\left(\frac{1+z}{2+h} \right)^P - \frac{\xi}{2} \right) + \zeta_m \left(1 - \left(\frac{1+z}{2+h} \right)^P - \frac{\xi}{2} \right) \quad (1)$$

2.1.2. 非均匀模型

$$\zeta(z) = \zeta_c \left(\left(\frac{1+z}{2+h} \right)^P - \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right) + \zeta_m \left(1 - \left(\frac{1+z}{2+h} \right)^P - \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right) \quad (2)$$

2.1.3. 对数非均匀模型

$$\zeta(z) = \zeta_c \left(\left(\frac{1+z}{2+h} \right)^P - \log \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right) + \zeta_m \left(1 - \left(\frac{1+z}{2+h} \right)^P - \log \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right) \quad (3)$$

2.2. 弹性地基模型

2.2.1. Winkler 模型

Winkler 模型的载荷分布定义如下

$$q_{Winkler} = K_w (w_b + w_s) \quad (4)$$

其中 K_w 是介质反应模量即弹簧的刚度系数。

2.2.2. Pasternak 模型

Pasternak 模型是一个双参数弹性模型, 由刚度是 G_p 的剪切层和刚度是 K_w 的独立上弹簧组成, G_p 表示弹簧部件之间的切向相互作用, 因此, *Pasternak* 模型与 FG 板之间的载荷分布可定义为

$$q_{Pasternak} = K_w (w_b + w_s) + G_p \nabla^2 (w_b + w_s) \quad (5)$$

其中 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 是笛卡尔坐标系下的拉普拉斯微分算子, 当弹簧间相互作用 $G_p = 0$ 时 *Pasternak* 可以退化为 *Winkler* 模型。

2.2.3. Kerr 模型

Kerr 地基模型是一个三参数弹性模型, 由一个刚度为 K_s 剪切层、刚度为 K_u 的独立上弹簧层和刚度为 K_l 独立的下弹簧层组成。 *Kerr* 模型的载荷分布定义如下[23]

$$q_{Kerr} = \frac{K_l K_u}{K_l + K_u} (w_b + w_s) - \frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \nabla^2 (w_b + w_s) \quad (6)$$

2.3. 四变量板理论

四变量板理论的位移场定义为

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, v = v_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}, w = w_b + w_s \quad (7)$$

其中 u_0 和 v_0 分别表示 x 和 y 方向的面内位移, 横向位移 w 分为弯曲作用引起的 w_b 和剪切作用引起的 w_s , $f(z)$ 是剪切形函数, 本文用到的是一种新的多项式函数

$$f(z) = 0.1z - 1.62z^3 - \frac{16}{5h^4} \left(1 - \frac{13.86h^2}{4} \right) z^5 \quad (8)$$

3. 基本方程

3.1. 本构关系

基于小变形假设, 线性应变表示如下

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1 + f'(z)) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ (1 + f'(z)) \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

广义胡克定律的应力应变关系为

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (10)$$

其中应力为 $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ ，应变为 $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ ，在不考虑厚度拉伸效应时 $(\varepsilon_{zz} = 0)$ 弹性常数定义如下

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}, Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu(z)^2}, Q_{66} = Q_{44} = Q_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \quad (11)$$

应用哈密顿能量原理推导孔隙依赖 FG 板的运动方程

$$\int \delta(U_S + V_E - K) dt = 0 \quad (12)$$

其中 δ 是变分符号， U_S 分别表示应变能， V_E 表示弹性地基势能， K 表示 FG 板的动能。

3.2. 应变能

应变能变分为

$$\begin{aligned} \delta U_S &= \iint_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz dA \\ &= \iint_A \left[N_{xx} \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} - M_{xx} \delta \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + S_{xx} \delta \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + N_{yy} \delta \frac{\partial v_0}{\partial y} - M_{yy} \delta \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + S_{yy} \delta \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + N_{xy} \left(\delta \frac{\partial u_0}{\partial y} + \delta \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + 2S_{xy} \delta \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} + Q_x \delta \frac{\partial w_s}{\partial x} + Q_y \delta \frac{\partial w_s}{\partial y} \right] dA \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{xx}, \sigma_{xx}) dz \\ (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{xx}, \sigma_{xx}) z dz \\ (S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{xx}, \sigma_{xx}) f(z) dz \\ (Q_x, Q_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) (1 + f'(z)) dz \end{aligned} \quad (14)$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, H_{ij}, F_{ij}, K_{ij}) = \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij} [1, z, f(z), z^2, zf(z), f^2(z), (f'(z)+1)^2] dz \quad (15)$$

3.3. 弹性地基引起的势能

势能变分为

$$\delta V_E = - \int \int_{A-h/2}^{h/2} (q_{Winkler} + q_{Pasternak} + q_{Kerr}) \delta(w_b + w_s) dz dA \quad (16)$$

3.4. 动能

动能变分为

$$\begin{aligned}
 \delta K &= \int_0^a \int_0^b \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho(z) (\dot{U} \delta \dot{U} + \dot{V} \delta \dot{V} + \dot{W} \delta \dot{W}) dz dx dy \\
 &= \int_0^a \int_0^b \left\{ I_0 \left[\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \right] - I_1 \left[\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} + \dot{u}_0 \delta \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] + I_2 \left[\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \right] + I_3 \left[\dot{u}_0 \delta \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} + \dot{v}_0 \delta \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right] \right. \\
 &\quad \left. - I_4 \left[\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \right] + I_5 \left[\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right] \right\} dA
 \end{aligned} \tag{17}$$

位移变量上的点表示对时间求导，其中

$$[I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5] = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho(z) [1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)] dz \tag{18}$$

将应变能(13)、势能(16)和动能(17)带入式(12)，通过对各项积分，可以得到孔隙依赖 FG 板的运动方程：

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_3 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_3 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\
 \delta w_b : \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} &- (q_{Winkler} + q_{Pasternak} + q_{Kerr}) \\
 &= -I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - I_4 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} - I_1 \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} - I_4 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} + I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\
 \delta w_s : \frac{\partial^2 S_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} &- \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} - (q_{Winkler} + q_{Pasternak} + q_{Kerr}) \\
 &= -I_3 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + I_4 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - I_5 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} - I_3 \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} + I_4 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} - I_5 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} + I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)
 \end{aligned} \tag{19}$$

4. 求解

本文利用纳维法定义偏微分方程组的解析解，基于如下重三角函数来假设满足边界条件。

其中： $\lambda_m = \frac{m\pi}{a}$ ， $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$ 。

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega_n t} \cos \lambda_m x \sin \lambda_n y \\
 v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega_n t} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y \\
 w_b(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} e^{i\omega_n t} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y \\
 w_s(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} e^{i\omega_n t} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y
 \end{aligned} \tag{20}$$

将式(20)代入式(19)得到特征方程：

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{42} & S_{44} \end{bmatrix} - \omega_n^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{42} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = 0 \tag{21}$$

5. 结果与讨论

本节将给出弹性地基在简支约束下无孔隙和有孔隙的FG板自由振动的数值结果，为了验证公式，将所得结果与已有三维精确解进行了对照，结果以表格的形式列出，平均误差定义如下

$$\text{误差 diff} = \left| \frac{\text{本文模型结果}}{\text{3D精确结果}} - 1 \right| \times 100\%$$

材料特性 $E_c = 380 \text{ GPa}$, $\rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3$ (c 表示陶瓷相 Al_2O_3) , $E_m = 70 \text{ GPa}$, $\rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3$ (m 表示金属相 Al) , 泊松比固定为 ($\nu_m = \nu_c = 0.3$) , 为方便起见使用无量纲形式如下

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \omega h \sqrt{\frac{\rho}{G}}, \tilde{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}, \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}, \bar{K}_w = \frac{K_w a^4}{\eta_{11}}, \bar{K}_l = \frac{K_l a^4}{\eta_{11}}, \\ \bar{K}_u &= \frac{K_u a^4}{\eta_{11}}, \bar{K}_s = \frac{K_s a^2}{\eta_{11}}, \bar{G}_p = \frac{G_p a^2}{\eta_{11}}, \eta_{11} = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu_c^2)} \end{aligned}$$

5.1. FG 板

表 1 给出的两边简支 FG 板考虑不同纵横比(b/a)、厚度比(h/a)以及不同幂律指数(P)的无量纲基频，并将所得结果与 Jin 等人[24]提出的三维精确解和 Mantari [25]提出的改进理论以及 Fatima Zohra Zaoui [26]等人的准三维解进行了比较。结果表明本文所有结果都有很好的一致性。对于非常厚的矩形 FG 板，本文结果和准 3D 结果[26]存在一些局限性。原因是对于 $h = a/2$ 的情况，结构形状是块而不再是板，此时剪切变形和厚度拉伸效应所起的作用非常重要。由于 x 和 y 方向采用相同的形函数来描述剪切应变沿板厚的分布，因此该模型更适用于方板分析($h = a/2, b = a$)，而不适用于矩形板($h = a/2, b = 2a$)。因此对于厚矩形板，可以采用三维弹性模型。

Table 1. Comparison of non-dimensional fundamental frequencies $\tilde{\omega}$ of FG plates

表 1. FG 板无量纲基频比较 $\tilde{\omega}$

b/a	h/a	P	模型			
			文献[24]	文献[25]	文献[26]	本文
1	0.1	0	0.1135	0.1137	0.1137	0.1135
		1	0.0870	0.0883	0.0883	0.0869
		2	0.0789	0.0806	0.0807	0.0789
		5	0.0741	0.0756	0.0756	0.0729
		0	0.4169	0.4183	0.4178	0.4169
	0.2	1	0.3222	0.3271	0.3267	0.3217
		2	0.2905	0.2965	0.2968	0.2908
		5	0.2676	0.2726	0.2725	0.2697
		0	1.8470	1.8543	1.8583	1.8475
		1	1.4687	1.4803	1.4830	1.4596
	0.5	2	1.3095	1.3224	1.3269	1.3061
		5	1.1450	1.1565	1.1576	1.1621

Continued

		0	0.0719	0.0719	0.0719	0.0718
	0.1	1	0.0550	0.0558	0.0558	0.0549
		2	0.0499	0.0510	0.0511	0.0499
		5	0.0471	0.0480	0.0480	0.0470
		0	0.2713	0.2721	0.2718	0.2713
2	0.2	1	0.2088	0.2121	0.2119	0.2086
		2	0.1888	0.1928	0.1930	0.1889
		5	0.1754	0.1789	0.1788	0.1763
		0	0.9570	1.3075	1.3086	1.3034
	0.5	1	0.7937	1.0371	1.0378	1.0221
		2	0.7149	0.9297	0.9322	0.9170
		5	0.6168	0.8248	0.8250	0.8256

5.2. 嵌入 Winkler-Pasternak 地基的 FG 板

不同幂律指数(P)下 Winkler 和 Pasternak 地基的弹性参数对 FG 板的无量纲基频的影响如表 2 所示。考虑了四种厚度比(h/a), 即 0.05、0.1、0.15 和 0.2。在方板的情况下, 考虑 Winkler-Pastarek 地基的 FG 板无量纲基频在所有厚度比范围内与准三维解的结果一致。从表中还可以看出无量纲基频随弹性刚度参数和厚度比的增大而增大, 随幂律指数(P)的增加减小, 这是由于弹性地基的刚度效应会使 FG 板的刚度增加, 而随着幂律指数的增加, FG 板变软。此外, 幂律指数(厚度比)对嵌入 Winkler 地基的 FG 板的影响可以忽略不计(非常重要), 而对 Pasternak 地基的 FG 板的自由振动有很大影响。对于相同的幂律指数,

Table 2. Non-dimensional fundamental frequency $\tilde{\omega}$ of FG plates resting on Winkler-Pasternak foundations
表 2. FG 方板在 Winkler-Pasternak 地基上的无量纲基频 $\tilde{\omega}$

\bar{K}_w, \bar{G}_p	h/a	模型	P					误差 Diff(%)
			0.0	0.5	1	2	5	
0,0	0.05	文献[26]	0.0291	0.0248	0.0226	0.0207	0.0195	-
		文献[23]	0.0291	0.0248	0.0226	0.0206	0.0195	0.00
		本文	0.0291	0.0246	0.0222	0.0202	0.0191	0.03
	0.10	文献[26]	0.1137	0.0972	0.0883	0.0807	0.0756	-
		文献[23]	0.1135	0.0970	0.0882	0.0806	0.0755	0.01
		本文	0.1134	0.0963	0.0868	0.0787	0.0740	0.13
	0.15	文献[26]	0.2464	0.2112	0.1919	0.1749	0.1623	-
		文献[23]	0.2459	0.2108	0.1916	0.1746	0.1622	0.03
		本文	0.2452	0.2090	0.1885	0.1706	0.1589	0.29
	0.20	文献[26]	0.4178	0.3593	0.3267	0.2968	0.2725	-
		文献[23]	0.4168	0.3586	0.3260	0.2961	0.2722	0.07
		本文	0.4150	0.3550	0.3205	0.2893	0.2667	0.53

Continued

100,0		文献[26]	0.0298	0.0257	0.0236	0.0219	0.0208	-
	0.05	文献[23]	0.0298	0.0257	0.0236	0.0218	0.0208	0.00
		本文	0.0298	0.0255	0.0232	0.0214	0.0205	0.03
		文献[26]	0.1164	0.1007	0.0924	0.0854	0.0809	-
	0.10	文献[23]	0.1163	0.1006	0.0923	0.0853	0.0809	0.00
		本文	0.1163	0.1000	0.0911	0.0838	0.0798	0.1
		文献[26]	0.2526	0.2192	0.2012	0.1856	0.1745	-
	0.15	文献[23]	0.2522	0.2190	0.2010	0.1855	0.1745	0.02
		本文	0.2523	0.2178	0.1986	0.1823	0.1726	0.19
		文献[26]	0.4290	0.3737	0.3433	0.3161	0.2948	-
	0.20	文献[23]	0.4284	0.3734	0.3431	0.3159	0.2950	0.02
		本文	0.4287	0.3715	0.3392	0.3111	0.2927	0.27
文献[26]		0.0411	0.0393	0.0386	0.0383	0.0385	-	
100,100	0.05	文献[23]	0.0411	0.0393	0.0386	0.0383	0.0385	0.00
		本文	0.0411	0.3922	0.3842	0.3806	0.3836	0.00
		文献[26]	0.1614	0.1548	0.1522	0.1509	0.1517	-
	0.10	文献[23]	0.1616	0.1551	0.1525	0.1512	0.1521	0.03
		本文	0.1618	0.1550	0.1519	0.1505	0.1516	0.00
		文献[26]	0.3538	0.3405	0.3350	0.3324	0.3337	-
	0.15	文献[23]	0.3551	0.3421	0.3367	0.3342	0.3358	0.02
		本文	0.3562	0.3424	0.3361	0.3331	0.3353	0.15
		文献[26]	0.6093	0.5884	0.5797	0.5754	0.5770	-
	0.20	文献[23]	0.6137	0.5940	0.5856	0.5815	0.5843	0.06
		本文	0.6168	0.5957	0.5857	0.5805	0.5841	0.07
		文献[26]						

频率随弹簧参数 K_w 而缓慢增加, 随剪切层参数 G_p 而迅速增加。当 G_p 值较大时, K_w 对频率的影响可以忽略不计, 原因是相较于 K_w , G_p 前的系数 $\alpha^2 + \beta^2$ 过大。此外, G_p 的变化改变了频率随幂律指数的变化趋势。在 $G_p = 0$ 的情况下, 频率随着梯度指数的增加而减小。但当 $G_p = 100$ 时, 频率随幂律指数适度上升。原因是 G_p 前 $\alpha^2 + \beta^2$ 系数较大导致特征值结果不准确。由此可见, *Pasternak/Kerr* 模型在预测剪切层刚度较大的 FG 板自由振动响应时存在缺陷。表 3 通过与 3D 和准 3D 结果的对比, 验证了四变量理论对嵌入弹性地基中 FG 板和孔隙依赖 FG 板的振动性能的影响。描述孔隙效应有四种模式, 即无孔隙(*perfect*)、孔隙均匀分布(*imperfect-even*)、孔隙非均匀分布(*imperfect-uneven*)和孔隙对数非均匀分布(*imperfect-logarithmic*), 厚度比(h/a)选择 0.05、0.1、0.15、0.2。在不考虑 *Winkler-Pasternak* 弹性地基的情况下, 计算了有和无孔隙 FG 板的无量纲频率。从表中可以看出均匀分布会导致无量纲基频降低, 固有频率随孔隙率增加而增加, 而均匀分布的固有频率随孔隙率增加而减少。

Table 3. Variations of frequency parameters $\bar{\omega}$ of porosity versus the *Winkler-Pasternak* foundation stiffness ($P=1$)
表 3. 孔隙率与 *Winkler-Pasternak* 地基刚度的变化对 FG 方板的频率 $\bar{\omega}$ 的影响 ($P=1$)

\bar{K}_w, \bar{G}_p	h/a	模型	无孔隙		均匀分布		非均匀分布		对数非均匀分布	
			$\zeta=0$	$\zeta=0.2$	$\zeta=0.5$	$\zeta=0.2$	$\zeta=0.5$	$\zeta=0.2$	$\zeta=0.5$	
0,0	0.05	文献[23]	9.020	8.370	5.738	9.052	9.117	9.050	9.106	
		本文	8.889	8.410	5.886	8.982	9.107	8.927	8.979	
	0.10	文献[23]	8.818	8.203	5.659	8.845	8.896	8.843	8.889	
		本文	8.693	8.235	5.799	8.776	8.881	8.728	8.773	
	0.15	文献[23]	8.516	7.950	5.535	8.536	8.569	8.535	8.565	
		本文	8.400	7.973	5.664	8.467	8.547	8.428	8.465	
	0.20	文献[23]	8.151	7.641	5.378	8.164	8.178	8.163	8.178	
		本文	8.044	7.654	5.494	8.096	8.149	8.066	8.095	
	100,0	0.05	文献[23]	9.430	8.917	6.933	9.505	9.655	9.501	9.626
			本文	9.305	8.803	6.810	9.480	9.645	9.360	9.435
		0.10	文献[23]	9.231	8.753	6.850	9.301	9.438	9.298	9.412
			本文	9.114	8.644	6.729	1.157	9.427	9.164	9.233
0.15		文献[23]	8.934	8.505	6.721	8.999	9.118	8.995	9.096	
		本文	8.827	8.405	6.604	0.056	9.100	8.872	8.934	
0.20		文献[23]	8.577	8.203	6.559	8.636	8.738	8.632	8.719	
		本文	8.481	8.112	6.446	0.048	8.715	8.520	8.574	
100,100		0.05	文献[23]	15.439	16.320	18.625	16.011	17.098	15.982	16.800
			本文	15.368	16.344	18.672	15.977	17.097	15.609	15.957
		0.10	文献[23]	15.245	16.148	18.464	15.812	16.883	15.783	16.668
			本文	15.194	16.179	18.512	15.792	16.889	15.431	15.772
	0.15	文献[23]	14.966	15.895	18.212	15.525	16.575	15.500	16.365	
		本文	14.941	15.937	18.257	15.524	16.591	15.172	15.504	
	0.20	文献[23]	14.640	15.595	17.872	15.192	16.221	15.164	16.016	
		本文	14.643	15.647	17.905	15.210	16.243	14.868	15.191	

对于非均匀分布, 对数函数的引入会导致无量纲频率降低。剪切参数对无量纲频率的影响显著, 但所有孔隙分布模式下无量纲频率变化趋势保持恒定。

5.3. *Kerr* 地基上的 FGM 板

表 4 分析了嵌入 *Kerr* 地基的 FG 板在不同弹性参数、厚度比(h/a)和幂律指数(P)下的固有频率变化。结果与 Shahsavari 的准三维解一致。与表 2 的结果相比, 当 K_s 和 K_l 不变时, 位于 *Kerr* 地基上的 FG 板的基频减小, 这是因为考虑 $K_u = \infty$ 时, *Kerr* 地基可以退化为到 *Pasternak* 地基, 因此的 *Kerr* 地基相比 *Pasternak* 地基会使 FG 板的刚度减小, 导致频率响应减小。但随着弹簧上刚度 K_u 值的增大, 固有频率的减小速率变缓。图 2 为 FG 板无量纲频率与厚度比、幂律指数和孔隙率的关系, 根据基频斜率的变化可以观察到 K_s 的变化对基频的影响大于 K_u , 增加 K_u ($K_s, h/a$)和幂律指数对固有频率的影响较小(较大,

较大), 而增加 K_u (K_s, P) 和 h/a 对自然频率的影响较小(较大, 较小)。

Table 4. Non-dimensional fundamental frequency $\tilde{\omega}$ of square FG plates resting on *Kerr* foundations ($\bar{K}_l = 100$)

表 4. FG 方板在 *Kerr* 地基上的无量纲基频 $\tilde{\omega}$ ($\bar{K}_l = 100$)

\bar{K}_u, \bar{K}_s	h/a	模型	P				误差 Diff(%)
			0.5	1	2	5	
100,0	0.05	文献[23]	0.0253	0.0231	0.0212	0.0202	-
		本文	0.0251	0.0227	0.0208	0.0198	0.04
	0.10	文献[23]	0.0988	0.0903	0.0830	0.0783	-
		本文	0.0982	0.0891	0.0814	0.0771	0.12
	0.15	文献[23]	0.2149	0.1964	0.1801	0.1685	-
		本文	0.2137	0.1939	0.1769	0.1665	0.22
	0.20	文献[23]	0.3661	0.3347	0.3061	0.2838	-
		本文	0.3641	0.3306	0.3011	0.2815	0.34
100,100	0.05	文献[23]	0.0329	0.0316	0.0308	0.0305	-
		本文	0.0328	0.0314	0.0305	0.0303	0.02
	0.10	文献[23]	0.1294	0.1245	0.1212	0.1201	-
		本文	0.1291	0.1238	0.1202	0.1194	0.06
	0.15	文献[23]	0.2842	0.2740	0.2666	0.2637	-
		本文	0.2839	0.2727	0.2649	0.2627	0.10
	0.20	文献[23]	0.4906	0.4739	0.4615	0.4560	-
		本文	0.4910	0.4727	0.4593	0.4553	0.09
200,100	0.05	文献[23]	0.0351	0.0341	0.0335	0.0334	-
		本文	0.0350	0.0339	0.0332	0.0332	0.02
	0.10	文献[23]	0.1385	0.1345	0.1320	0.1316	-
		本文	0.1382	0.1338	0.1311	0.1310	0.06
	0.15	文献[23]	0.3049	0.2964	0.2909	0.2897	-
		本文	0.3046	0.2954	0.2894	0.2890	0.08
	0.20	文献[23]	0.5273	0.5139	0.5047	0.5024	-
		本文	0.5282	0.5131	0.5030	0.5020	0.05
200,200	0.05	文献[23]	0.0427	0.0423	0.0422	0.0426	-
		本文	0.0426	0.0421	0.0420	0.0425	0.01
	0.10	文献[23]	0.1687	0.1670	0.1668	0.1684	-
		本文	0.1687	0.1666	0.1661	0.1681	0.03
	0.15	文献[23]	0.3728	0.3694	0.3689	0.3725	-
		本文	0.3733	0.3692	0.3681	0.3722	0.02
	0.20	文献[23]	0.6484	0.6436	0.6431	0.6494	-
		本文	0.6507	0.6443	0.6424	0.6492	0.05

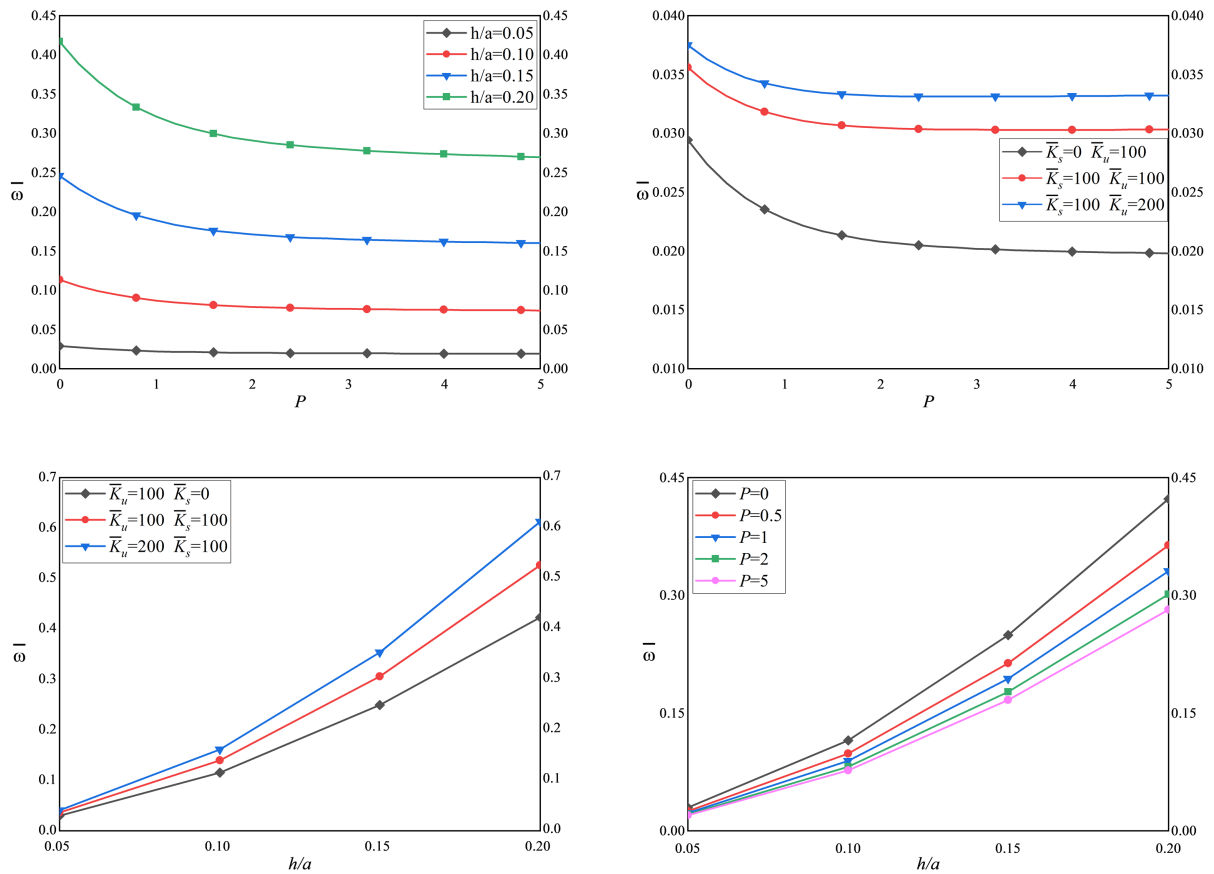


Figure 2. Effect of parameters ($K_u, K_s, h/a, P$) on non-dimensional fundamental frequency $\tilde{\omega}$ of FG plates resting on *Kerr* foundation ($\bar{K}_l = 100$)

图 2. 参数($K_u, K_s, h/a, P$)对 *Kerr* 地基上 FG 板无量纲频率 $\tilde{\omega}$ 的影响($\bar{K}_l = 100$)

表 5 研究了孔隙率的不同分布模式对嵌入 *Kerr* 地基矩形 FG 板无量纲频率的影响。对数函数的引入对高孔隙率的频率有重要影响，而对低孔隙率频率影响较小。随着弹性刚度参数(\bar{K}_u, \bar{K}_s)值的增加，弹性基础的整体刚度增加。为了明确孔隙率对 FG 板在软地基和硬地基的振动特性的影响，图 3 为 FG 板无量纲频率在厚度比恒定($h/a = 0.1$)时与幂律指数和弹性刚度参数的关系。从该图可以看出，FG 板的幂律指数(P)对具有孔隙均匀分布和孔隙不均匀分布的 FG 板振动有显著影响。在软地基中的 FG 板，孔隙不均匀分布比孔隙均匀分布，在高幂律指数时无量纲频率更大，而在硬地基中的 FG 板在所有幂律指数范围内，孔隙均匀分布的 FG 板基频最大。

Table 5. Variations of frequency parameters $\bar{\omega}$ of porosity versus the *Kerr* foundation stiffness ($P = 1, \bar{K}_l = 100$)

表 5. 孔隙率与 *Kerr* 地基弹性刚度参数的变化对 FG 方板的频率 $\bar{\omega}$ 的影响($P = 1, \bar{K}_l = 100$)

\bar{K}_u, \bar{K}_s	h/a	模型	无孔隙	均匀分布			非均匀分布		对数非均匀分布	
			$\zeta = 0$	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0.5$	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0.5$	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0.5$	
100,0	0.05	文献[23]	9.227	8.648	6.364	9.281	9.390	9.278	9.369	
		本文	9.099	8.539	6.271	9.214	9.379	9.146	9.210	

Continued

100,0	0.10	文献[23]	9.027	8.482	6.282	9.076	9.171	9.073	9.154
		本文	8.906	8.379	6.193	9.010	9.156	8.949	9.006
100,0	0.15	文献[23]	8.728	8.232	6.157	8.770	8.847	8.768	8.834
		本文	8.616	8.137	6.070	8706	8.828	8.653	8.703
100,0	0.20	文献[23]	8.367	7.927	5.997	8.403	8.462	8.401	8.453
		本文	8.265	7.840	5.914	8.340	8.463	8.296	8.338
100,100	0.05	文献[23]	12.643	12.969	13.780	13.006	13.702	12.987	13.562
		本文	12.554	12.774	13.357	12.960	13.697	12.715	12.947
100,100	0.10	文献[23]	12.454	12.807	13.656	12.811	13.494	12.793	13.357
		本文	12.378	12.623	13.240	12.775	13.493	12.536	12.762
100,100	0.15	文献[23]	12.176	12.567	13.463	12.528	13.194	12.510	13.061
		本文	12.121	12.398	13.054	12.505	13.199	12.273	12.492
100,100	0.20	文献[23]	11.849	12.281	13.216	12.196	12.847	12.178	12.718
		本文	11.817	12.127	12.811	12.188	12.857	11.964	12.175
200,100	0.05	文献[23]	13.639	14.174	15.564	14.079	14.920	14.056	14.751
		本文	13.557	13.957	15.072	14.038	14.917	13.747	14.022
200,100	0.10	文献[23]	13.449	14.009	15.426	13.884	14.710	13.862	14.545
		本文	13.383	13.804	14.941	13.854	14.712	13.570	13.838
200,100	0.15	文献[23]	13.172	13.766	15.213	13.601	14.410	13.579	14.248
		本文	13.129	13.577	14.734	13.586	14.418	13.310	13.571
200,100	0.20	文献[23]	12.847	13.477	14.934	13.270	14.063	13.249	13.905
		本文	12.829	13.304	14.460	13.272	14.078	13.005	13.258
200,200	0.05	文献[23]	16.901	18.040	21.010	17.575	18.851	17.541	18.595
		本文	16.838	17.752	20.313	13.545	18.851	17.118	17.521
200,200	0.10	文献[23]	16.704	17.861	20.832	17.372	18.630	17.338	18.377
		本文	16.662	17.588	20.142	17.358	18.638	16.938	17.335
200,200	0.15	文献[23]	16.420	17.598	20.547	17.079	18.313	17.045	18.066
		本文	16.407	17.345	19.862	17.086	18.332	16.676	17.064
200,200	0.20	文献[23]	16.089	17.286	20.147	16.739	17.947	16.706	17.706
		本文	16.107	17.050	19.456	16.767	17.973	16.369	16.745

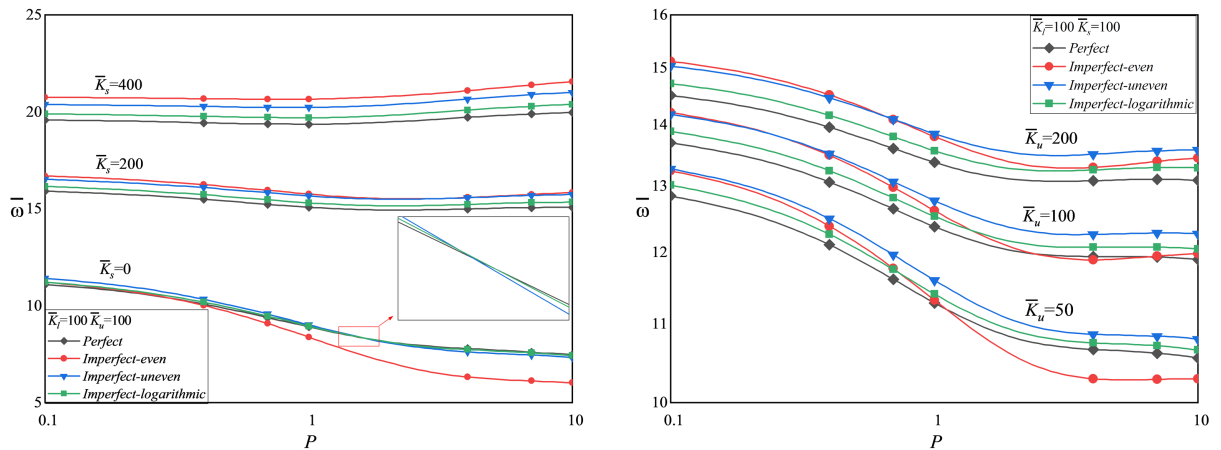


Figure 3. Variation of non-dimensional frequency $\bar{\omega}$ of FG plates resting on *Kerr* foundation versus power-law index for different spring parameters and shear layer parameters ($\xi = 0.2, P = 1$)

图 3. 幂律指数和弹性刚度参数对嵌入 *Kerr* 地基的 FG 板无量纲频率 $\bar{\omega}$ 的影响 ($\xi = 0.2, P = 1$)

6. 结论

本文对嵌入弹性地基的孔隙依赖 FG 板进行了振动分析。孔隙模式分为均匀分布、非均匀分布和对数非均匀分布，材料内部的孔隙对 FG 板有一定的刚度软化作用，孔隙率的体积分数对 FG 板的固有频率起主导作用。均匀分布 FG 板的基频均随幂律指数和孔隙率的增大而减小，而非均匀分布 FG 板的基频随幂律指数和孔隙率的减小和增加。因此，非均匀分布的 FG 板弹性模量大于均匀分布的 FG 板，在相同孔隙率参数、长细比和幂律指数下，非均匀分布的 FG 板频率值较高。在均匀孔隙率分布和不均匀孔隙率分布中，无量纲频率分别随孔隙率参数的增大而减小和增大。

参考文献

- [1] Zhao, J., Wang, Q., Deng, X., *et al.* (2019) Free Vibrations of Functionally Graded Porous Rectangular Plate with Uniform Elastic Boundary Conditions. *Composites Part B: Engineering*, **168**, 106-120. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.044>
- [2] Nguyen, V.-H., Nguyen, T.-K., Thai, H.-T., *et al.* (2014) A New Inverse Trigonometric Shear Deformation Theory for Isotropic and Functionally Graded Sandwich Plates. *Composites Part B: Engineering*, **66**, 233-246. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.05.012>
- [3] Mechab, I., Mechab, B. and Benaissa, S. (2013) Static and Dynamic Analysis of Functionally Graded Plates Using Four-Variable Refined Plate Theory by the New Function. *Composites Part B: Engineering*, **45**, 748-757. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.07.015>
- [4] Thai, H.-T. and Vo, T.P. (2013) A New Sinusoidal Shear Deformation Theory for Bending, Buckling, and Vibration of Functionally Graded Plates. *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 3269-3281. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.08.008>
- [5] Thai, H.-T. and Kim, S.-E. (2013) A Simple Higher-Order Shear Deformation Theory for Bending and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates. *Composite Structures*, **96**, 165-173. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.025>
- [6] Mantari, J.L., Granados, E.V. and Guedes Soares, C. (2014) Vibrational Analysis of Advanced Composite Plates Resting on Elastic Foundation. *Composites Part B: Engineering*, **66**, 407-419. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.05.026>
- [7] Mantari, J.L., Granados, E.V., Hinojosa, M.A., *et al.* (2014) Modelling Advanced Composite Plates Resting on Elastic Foundation by Using a Quasi-3D Hybrid Type HSDT. *Composite Structures*, **118**, 455-471. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.039>
- [8] Malekzadeh, P. (2009) Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Plates on Elastic Foundations. *Composite Structures*, **89**, 367-373. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.08.007>

- [9] Li, Q., Wu, D., Chen, X., *et al.* (2018) Nonlinear Vibration and Dynamic Buckling Analyses of Sandwich Functionally Graded Porous Plate with Graphene Platelet Reinforcement Resting on Winkler-Pasternak Elastic Foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*, **148**, 596-610. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.09.020>
- [10] Hasani Baferani, A., Saidi, A.R. and Ehteshami, H. (2011) Accurate Solution for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Thick Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation. *Composite Structures*, **93**, 1842-1853. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.020>
- [11] Yang, J., Wu, H. and Kitipornchai, S. (2017) Buckling and Postbuckling of Functionally Graded Multilayer Graphene Platelet-Reinforced Composite Beams. *Composite Structures*, **161**, 111-118. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.11.048>
- [12] Duc, N.D., Lee, J., Nguyen-Thoi, T., *et al.* (2017) Static Response and Free Vibration of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Rectangular Plates Resting on Winkler-Pasternak Elastic Foundations. *Aerospace Science and Technology*, **68**, 391-402. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.05.032>
- [13] Sheikholeslami, S.A. and Saidi, A.R. (2013) Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation Using Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory. *Composite Structures*, **106**, 350-361. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.016>
- [14] Thai, H.-T. and Choi, D.-H. (2011) A Refined Plate Theory for Functionally Graded Plates Resting on Elastic Foundation. *Composites Science and Technology*, **71**, 1850-1858. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2011.08.016>
- [15] Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., *et al.* (2017) A Refined Quasi-3D Shear Deformation Theory for Thermo-Mechanical Behavior of Functionally Graded Sandwich Plates on Elastic Foundations. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, **21**, 1906-1929. <https://doi.org/10.1177/1099636217727577>
- [16] Demirhan, P.A. and Taskin, V. (2019) Bending and Free Vibration Analysis of Levy-Type Porous Functionally Graded Plate Using State Space Approach. *Composites Part B: Engineering*, **160**, 661-676. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.020>
- [17] Lü, C.F., Lim, C.W. and Chen, W.Q. (2009) Exact Solutions for Free Vibrations of Functionally Graded Thick Plates on Elastic Foundations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **16**, 576-584. <https://doi.org/10.1080/15376490903138888>
- [18] Li, M., Guedes Soares, C. and Yan, R. (2021) Free Vibration Analysis of FGM Plates on Winkler/Pasternak/Kerr Foundation by Using a Simple Quasi-3D HSDT. *Composite Structures*, **264**, Article ID: 113643. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113643>
- [19] Phuong, N.T., Dong, D.T., Van Doan, C., *et al.* (2022) Nonlinear Buckling of Higher-Order Shear Deformable Stiffened FG-GRC Laminated Plates with Nonlinear Elastic Foundation Subjected to Combined Loads. *Aerospace Science and Technology*, **127**, Article ID: 107736. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2022.107736>
- [20] Wang, M., Xu, Y.-G., Qiao, P., *et al.* (2022) Buckling and Free Vibration Analysis of Shear Deformable Graphene-Reinforced Composite Laminated Plates. *Composite Structures*, **280**, Article ID: 114854. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114854>
- [21] Zenkour, A.M. and Alghanmi, R.A. (2022) A Refined Quasi-3D Theory for the Bending of Functionally Graded Porous Sandwich Plates Resting on Elastic Foundations. *Thin-Walled Structures*, **181**, Article ID: 110047. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110047>
- [22] Hadji, L., Avcar, M. and Zouatnia, N. (2022) Natural Frequency Analysis of Imperfect FG Sandwich Plates Resting on Winkler-Pasternak Foundation. *Materials Today: Proceedings*, **53**, 153-160. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.12.485>
- [23] Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., *et al.* (2018) A Novel Quasi-3D Hyperbolic Theory for Free Vibration of FG Plates with Porosities Resting on Winkler/Pasternak/Kerr Foundation. *Aerospace Science and Technology*, **72**, 134-149. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.11.004>
- [24] Jin, G., Su, Z., Shi, S., *et al.* (2014) Three-Dimensional Exact Solution for the Free Vibration of Arbitrarily Thick Functionally Graded Rectangular Plates with General Boundary Conditions. *Composite Structures*, **108**, 565-577. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.09.051>
- [25] Mantari, J.L. (2015) A Refined Theory with Stretching Effect for the Dynamics Analysis of Advanced Composites on Elastic Foundation. *Mechanics of Materials*, **86**, 31-43. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2015.02.010>
- [26] Zaoui, F.Z., Ouinas, D. and Tounsi, A. (2019) New 2D and Quasi-3D Shear Deformation Theories for Free Vibration of Functionally Graded Plates on Elastic Foundations. *Composites Part B: Engineering*, **159**, 231-247. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.051>