

非线性本构关系下两端固定多孔梁的大挠度弯曲变形

王立燕, 赵永刚

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2024年1月10日; 录用日期: 2024年1月30日; 发布日期: 2024年3月14日

摘要

本文以经典梁理论和非线性本构关系为基础, 研究了两端固定多孔梁在不同的孔隙分布类型下受到外部均匀荷载作用的大挠度弯曲问题。首先设多孔梁的弹性模量与应变是线性函数关系, 对非线性本构关系下多孔梁弯曲问题的基本方程进行了推导。采用打靶法计算出该边界条件下的多孔梁弯曲问题的数值解, 分析非线性本构参数、载荷、孔隙率、孔隙分布类型对弯曲变形行为的影响。

关键词

多孔梁, 弯曲, 打靶法, 非线性本构关系

Large-Deflection Bending Deformation of Fixed Porous Beams at Both Ends under Nonlinear Constitutive Relations

Liyan Wang, Yonggang Zhao

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: Jan. 10th, 2024; accepted: Jan. 30th, 2024; published: Mar. 14th, 2024

Abstract

Based on classical beam theory and nonlinear constitutive relationships, the large deflection bending problem of a fixed porous beam under different pore distribution types under external uniform loads was studied. Firstly, the elastic modulus and strain of porous beams are assumed to be a linear function relationship, and the basic equations for the bending problem of porous beams under nonlinear constitutive relationships are derived. The numerical solution of the bending

problem of porous beam under this boundary condition is calculated by shooting method, and the effects of nonlinear constitutive parameters, load, porosity and pore distribution type on bending deformation behavior are analyzed.

Keywords

Porous Beam, Bending, Target Method, Nonlinear Constitutive Relationship

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

多孔材料是一种新型复合材料, 在现代生活中广泛存在。此材料在结构、减震、隔热、渗透等多方面发挥着重要的作用。多孔材料存在孔隙的变化, 孔隙的存在会使多孔材料具备良好的力学性能, 如相对密度低、高比表面积、高冲击韧性、良好的传导性等, 多孔材料的应用十分广泛, 对其弯曲性能的研究非常重要。

为了解多孔材料梁的力学性能, 研究者们运用了多种方法理论[1] [2]。在经典力学理论的背景下, 研究人员的观点是材料的弹性系数在变形过程中不改变, 也就是说, 应力 - 应变本构关系在弹性范围内是线性关系。但事实上许多材料的本构关系并非线性关系, 多孔材料的本构关系就具有较强的非线性特性。1982年, Ambartsumyan [3]在研究这种非线性本构关系时, 发现多数材料的应力应变关系在受压和受拉时分别接近线性, 提出了双模量理论。很多学者利用该理论研究了构件的弯曲变形、屈曲、过屈曲问题以及振动问题。张鹏[4]等人利用双模量理论对四边固支的板进行了研究, 将所计算的数据与有限元软件对比得出结论, 双模量理论计算的数值更加精确。王康健和赵永刚等人[5]采用双模量理论对杆的过屈曲进行了分析。Fraternali [6]等人对曲梁进行了研究, 曲梁的后屈曲响应会受到拉压不同模量的强烈影响。穆琳[7]等人对简支梁的振动问题进行了研究, 采用打靶法求解了弯曲挠度和固定频率。还有许多研究表明采用双模量理论的计算精度得到了很大提高[8] [9]。此外, 还有许多的研究者对新型材料梁板的力学行为进行了研究[10] [11] [12]。然而, 在材料的本构关系非线性特征较强时, 即受拉和受压时的应力应变关系分别线性化显著不合适时, 双模量理论的研究结果就还不够精确。

本文思考非线性本构关系是连续变化状态, 认为材料的弹性系数是应变的线性函数[13], 对多孔梁两端固定边界条件的弯曲问题进行了研究。经过与文献的比较验证了本文方程和数据的准确性, 并基于所推导的基本方程研究了孔隙分布类型、孔隙率、非线性本构参数和载荷对多孔梁的弯曲变形的影响。

2. 基本方程

文章对如图 1 所示的具有非线性应力 - 应变本构关系的矩形截面多孔梁的弯曲变形问题进行了研究。多孔梁的长、宽、高分别为 l 、 b 和 h , 构件上加载了一个铅垂方向分布的作用载荷 q 。梁的厚度方向的孔隙分布有三种典型的分布形式, 如图 2 所示。其中, 类型 1 (T1)分布表示孔隙在梁的厚度方向均匀分布, 类型 2 (T2)分布表示梁的杨氏模量 $E(z)$ 在上下表面处最大, 向几何中面递减, 分布类型 3 (T3), 其杨氏模量的变化趋势与类型 2 (T2)的孔隙分布相反。三种情况下杨氏模量的表达式如下所示[14] [15]:

类型 1 (T1):

$$E(z) = E^* \left(2\sqrt{1-e_0}/\pi - 2/\pi + 1 \right)^2 \quad (1)$$

类型 2 (T2):

$$E(z) = E^* \left(1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) \quad (2)$$

类型 3 (T3):

$$E(z) = E^* \left(1 - e_0 + e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) \quad (3)$$

上式中, $E(z)$ 表示含孔隙的梁的有效杨氏模量, E^* 为无孔($e_0 = 0$)时材料的杨氏模量, e_0 是孔隙度系数。

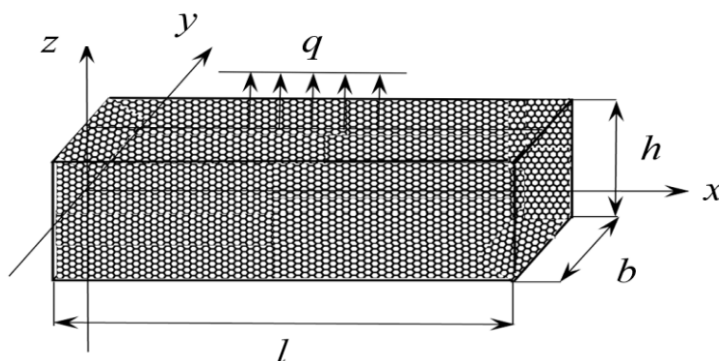


Figure 1. The geometric structure of multi hole beams

图 1. 多孔梁的几何结构

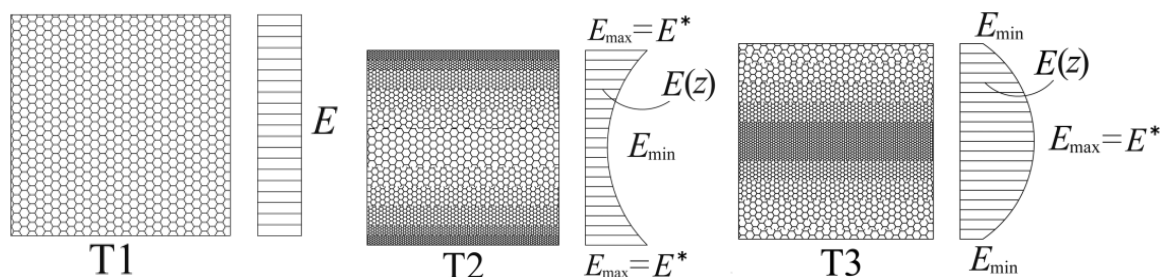


Figure 2. Three types of porosity distributions for beams

图 2. 梁的三种孔隙度分布类型

2.1. 几何方程

基于几何结构, 对多孔梁建立笛卡尔坐标系 $O-xyz$ (见图 1), x 、 y 、 z 轴分别为梁的轴线, 横截面的水平对称轴和铅垂对称轴。多孔梁在经历大挠度弯曲变形时, 其几何中面上的轴向应变 ε_0 为:

$$\varepsilon_0 = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (4)$$

其中: u 为多孔梁几何中面上的轴向位移, w 为多孔梁几何中面上的铅垂位移。关于多孔梁的非几何中面上的其他处的弯曲变形情况, 其应变 ε 为:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (5)$$

2.2. 物理方程

考虑到材料的本构关系的非线性特征, 本文假设材料的弹性模量 E 与应变是线性函数的关系(线性弹性模量理论), 即:

$$E(\varepsilon) = E_0 + E_1 \varepsilon \quad (6)$$

其中, E_0 和 E_1 分别是与多孔梁孔隙分布类型相对应的弹性常数, 它们与孔隙率的函数关系具有相同形式, 即可写为 $E_1 = E_r \cdot E_0$ 。 E_r 是反映该材料本构关系非线性特点的常数。则梁弯曲时, 截面上的正应力表达式为:

$$\sigma = E(\varepsilon)\varepsilon = E_0(\varepsilon + E_r \varepsilon^2) \quad (7)$$

多孔梁横截面上的轴力 F_N 和弯矩 M 的表达式为:

$$F_N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \cdot b dz = \frac{1}{4\pi^2} E^* C b h \left[\frac{1}{3} A E_r h^2 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + B \left(E_r \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + 2 \frac{du}{dx} E_r + 2 \right) \left(2 \frac{du}{dx} + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right) \right] \quad (8)$$

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} -\sigma z \cdot b dz = \frac{1}{12\pi^2} E^* A C b h^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \left(1 + 2 E_r \frac{du}{dx} + E_r \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right)$$

其中, 对于 T1 类型的梁: $A = 1, B = 1, C = (2\sqrt{1-e_0} - 2 + \pi)^2$;

对于 T2 类型的梁: $A = (\pi^3 - 6\pi^2 e_0 + 48e_0)/\pi, B = \pi^2 - 2e_0\pi, C = 1$;

对于 T3 类型的梁: $A = [(1-e_0)\pi^3 + 6\pi^2 e_0 - 48e_0]/\pi, B = (1-e_0)\pi^2 + 2e_0\pi, C = 1$ 。

2.3. 静力学方程

当多孔梁上受到了如图 1 所示的载荷分布时, 在大挠度弯曲变形时, 对构件的微段平衡进行了研究, 得到了内力的平衡方程为:

$$\frac{dF_N}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} - q - F_N \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (9)$$

两端固定边界条件为:

$$u = 0, w = 0, \frac{dw}{dx} = 0 \quad (10)$$

3. 对基本方程的无量纲处理

将相关方程以及边界条件进行了无量纲化以达到计算结果的准确性和求解的便利性要求, 相关无量纲参数如下所示:

$$W = \frac{w}{h}, \quad X = \frac{x}{l}, \quad U = \frac{ul}{h^2}, \quad \delta = \frac{h}{l}, \quad Q = \frac{12q}{E^* b \delta^4} \quad (11)$$

将相关参数代入(9)~(10)式, 得到无量纲内力表达式为:

$$\bar{F}_N = \frac{12F_N}{E^* b l \delta^3} = \frac{1}{\pi^2} C \left[A E_r \delta^2 \left(\frac{d^2 W}{dX^2} \right)^2 + 3B \left(\left(\frac{dW}{dX} \right)^2 + 2 \frac{dU}{dX} \right) \left(E_r \delta^2 \left(\frac{dW}{dX} \right)^2 + 2 E_r \delta^2 \frac{dU}{dX} + 2 \right) \right] \quad (12)$$

$$\bar{M} = \frac{12M}{E^* b l^2 \delta^4} = \frac{1}{\pi^2} A C \frac{d^2 W}{dX^2} \left(E_r \delta^2 \left(\frac{dW}{dX} \right)^2 + 2 E_r \delta^2 \frac{dU}{dX} + 1 \right)$$

无量纲控制方程为:

$$\frac{d\bar{F}_N}{dX} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{M}}{dX^2} - Q - \bar{F}_N \frac{d^2 W}{dX^2} = 0 \quad (13)$$

无量纲边界条件(固定端)为: 在 $X = 0, 1$ 处, $U = 0, W = 0, dW/dX = 0$ 。

4. 弯曲问题的数值分析

利用打靶法对两端固定边界条件下的无量纲方程进行求解。令:

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}^T = \left\{ U, \frac{dU}{dX}, W, \frac{dW}{dX}, \frac{d^2W}{dX^2}, \frac{d^3W}{dX^3} \right\}^T \quad (14)$$

无量纲化后的基本式子可转化为如下的一阶非线性常微分方程:

$$\frac{dY}{dX} = F(X; Y; E_r, \delta, Q) = \{y_2, \varphi_1, y_4, y_5, y_6, \varphi_2\}^T \quad (15)$$

其中:

$$\varphi_1 = -\frac{y_5 (AE_r \delta^2 y_6 + 6BE_r \delta^2 y_4^3 + 12BE_r \delta^2 y_2 y_4 + 6By_4)}{6B(E_r \delta^2 y_4^2 + 2E_r \delta^2 y_2 + 1)}, \quad \varphi_2 = \frac{S_1}{S_2}$$

$$\begin{aligned} S_1 = & -9B^2 CE_r^2 \delta^4 y_4^6 y_5 - 54B^2 CE_r^2 \delta^4 y_2 y_4^4 y_5 + 12ABCE_r^2 \delta^4 y_4^3 y_5 y_6 + 12ABCE_r \delta^2 \varphi_1 y_6 - 3ABCE_r \delta^2 y_5^3 \\ & - 3ABCE_r^2 \delta^4 y_4^2 y_5^3 - 27B^2 CE_r \delta^2 y_4^4 y_5 + 12ABCE_r^2 \delta^4 \varphi_1 y_4^2 y_6 - 24ABCE_r^2 \delta^4 \varphi_1 y_4 y_5 - 6ABCE_r^2 \delta^4 y_2 y_5^3 \\ & + 24ABCE_r^2 \delta^4 y_2 y_4 y_5 y_6 - 72B^2 CE_r^2 \delta^4 y_2^3 y_5 - A^2 CE_r^2 \delta^4 y_5 y_6^2 - 108B^2 CE_r^2 \delta^4 y_2^2 y_4^2 y_5 - 3\pi^2 BE_r \delta^2 Q y_4^2 \\ & + 24ABCE_r^2 \delta^4 \varphi_1 y_2 y_6 - 12ABCE_r^2 \delta^4 y_4^2 y_5^2 - 6\pi^2 BE_r \delta^2 Q y_2 - 12ABCE_r^2 \delta^4 \varphi_1^2 y_5 - 108B^2 CE_r \delta^2 y_2 y_4^2 y_5 \\ & + 12ABCE_r \delta^2 y_4 y_5 y_6 - 108B^2 CE_r \delta^2 y_2^2 y_5 - 18B^2 C y_4^2 y_5 - 36B^2 C y_2 y_5 - 3\pi^2 BQ \\ S_2 = & AC(-3BE_r^2 \delta^4 y_4^4 - 12BE_r^2 \delta^4 y_2 y_4^2 - 12BE_r^2 \delta^4 y_2^2 + AE_r^2 \delta^4 y_5^2 - 6BE_r \delta^2 y_4^2 - 12BE_r \delta^2 y_2 - 3B) \end{aligned}$$

相应的边界条件(固定端): $y_1 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0$ 。

当三种孔隙分布类型(T1, T2, T3)梁的孔隙率参数 $e_0 = 0$ 时, 多孔梁此时是一种无孔的均匀材料梁。针对大挠度弯曲问题, 此时对长细比 $\delta = 0.08$, 非线性本构参数 E_r 不同时, 的两端固定梁的中点挠度 $W(0.5)$ 与载荷 Q 变化关系进行数据计算, 如图 3 所示。将计算数据与文献[13]中的相关数据图进行了比较, 其变形结果高度吻合, 以此验证所推导方程的正确性和计算得到的数据的可靠性, 然后研究了两端固定梁在不同孔隙分布类型、物理非线性本构参数、载荷和孔隙率下的大挠度弯曲问题。

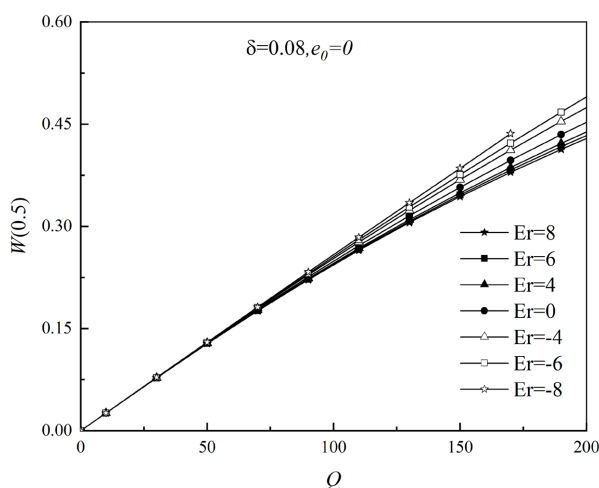


Figure 3. Equilibrium path of large deflection problem of T1, T2, T3 beams ($e_0 = 0$)

图 3. T1, T2, T3 梁大挠度问题的平衡路径($e_0 = 0$)

图 4 所示为 $\delta = 0.08$, 孔隙率 $e_0 = 0.4$, 非线性本构参数 E_r 不同数值下, 三种孔隙分布情况的两端固定多孔梁中点挠度 $W(0.5)$ 与载荷 Q 变化的平衡路径。观察图可知, E_r 取值的变化对挠度与载荷的非线性特征无影响, 因为该模型的几何关系具有非线性特性。并且当 $E_r > 0$ 和 $E_r < 0$ 时, 其相关数据是分居在 $E_r = 0$ 这条线的两侧。 E_r 取正值时, 曲线在下侧, $W(0.5)$ 变小, 抗弯曲能力增强; 当 E_r 取负值时, 曲线在上侧, $W(0.5)$ 变大, 抗弯曲能力减弱。在处于不同孔隙分布类型下时, 三种孔隙分布的梁抗弯能力按 T1、T3、T2 的顺序依次增强, 且 T2 梁的抗弯曲能力明显强于 T1 和 T3 梁。所以在现实工况中, 对于多孔材料分布类型的选择, 应该尽量选择孔隙度为 T2 分布形式的梁。

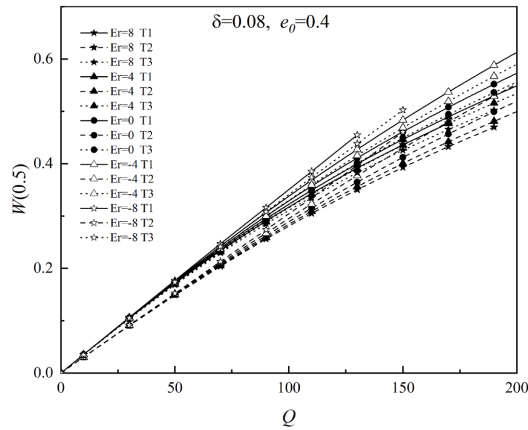


Figure 4. Equilibrium path of large deflection problem fixed at both ends of T1, T2 and T3 beams
图 4. T1, T2, T3 梁两端固定大挠度问题的平衡路径

图 5 所示为 $\delta = 0.08$, 载荷 $Q = 130$, 非线性本构参数 E_r 变化下, 大挠度问题下的不同孔隙分布类型的梁在中点挠度 $W(0.5)$ 随孔隙率 e_0 的趋势变化图。观察图可以发现, 随着孔隙率 e_0 的增加, T1, T2, T3 梁中点挠度也是逐渐增大的, 但是从变化的缓急程度来看, T2 梁变化的最缓和, 其次是 T3 梁, 最后是 T1 梁, 即 T1 梁受孔隙率 e_0 的影响最大。从曲线的变化节点来看, 大约 $e_0 > 0.6$ 后, T1 梁的中点挠度数值随着孔隙率 e_0 的增大而急剧上升, T2、T3 梁也有类似的情形, 这说明在选择多孔材料时, 面对孔隙率的选择, 在保持材料刚度能力最优时, 孔隙率 e_0 的大小最好不要超过 0.6。并且, 在相同的外部条件下, T2 梁的变化趋势远弱于 T1, T3 梁, 这也证实了 T2 梁的抗弯能力优于另外两种梁。

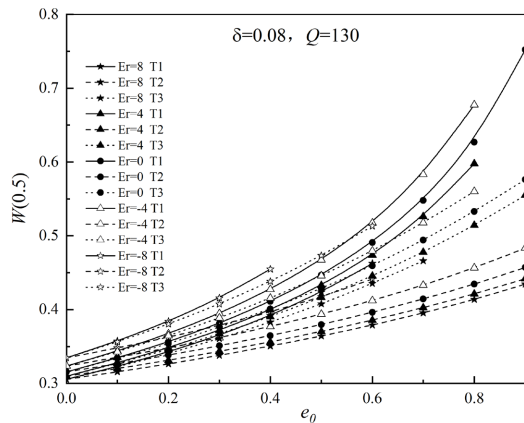


Figure 5. Diagram of the large deflection problem W at both ends of T1, T2 and T3 beams with porosity e_0
图 5. T1, T2, T3 梁两端固定大挠度问题 W 随孔隙率 e_0 的变化图

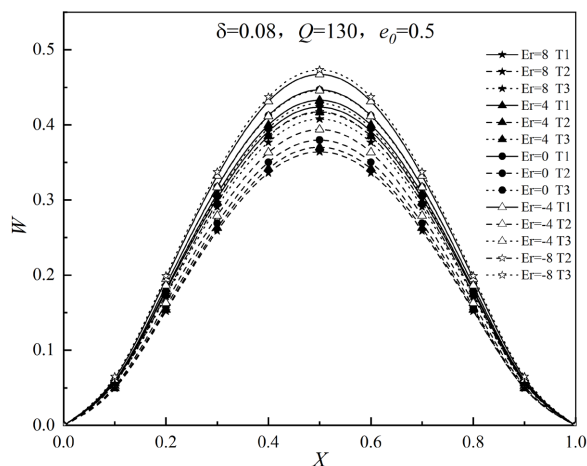


Figure 6. Equilibrium configuration of fixed large deflection problem at both ends of T1, T2, T3 beams
图 6. T1, T2, T3 梁两端固定大挠度问题的平衡构形

图 6 所示为 $\delta = 0.08$, $Q = 130$, $e_0 = 0.5$, 非线性本构参数 E_r 变化时, T1, T2, T3 梁的大挠度弯曲情况下的弯曲构形。看图可知, 梁的弯曲变形程度与 E_r 的变化是呈相反趋势的, 对于相同的非线性参数 E_r 时, 三种孔隙分布类型梁的抗弯性能均随着 E_r 的增大而减小。而面对不同孔隙分布类型, 三种孔隙分布类型的抗弯能力也是按 T1, T3, T2 逐次增强的, 且 T2 的抗弯能力明显优于另外两种。

图 7 给出了 $\delta = 0.08$, $Q = 130$, 非线性本构参数 $E_r = 0$ 时, 两端固定 T1, T2, T3 梁的大挠度的弯曲变形与孔隙率 e_0 的变化关系。看图可知, 随着孔隙率的增加, T1, T2, T3 梁的弯曲变形逐渐增大, 这是因为孔隙率的增加会让梁的孔隙部分越来越多, 梁的抗弯能力减弱, 因此在受到相同的外载荷的情况下, 多孔梁发生的弯曲变形就会随着孔隙率的增加而增加。且对于相同的孔隙率 e_0 , T1 梁的挠度最大。当三种梁的孔隙率 $e_0 > 0.5$ 后, 孔隙率 e_0 的变化对弯曲变形的影响愈加明显。

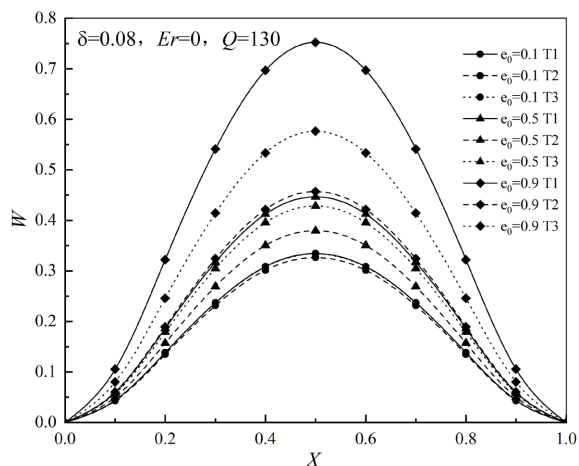


Figure 7. Equilibrium configuration of fixed large deflection problem at both ends of T1, T2, T3 beams with respect to the change of porosity e_0

图 7. T1, T2, T3 梁两端固定大挠度问题的平衡构形关于孔隙率 e_0 的变化

5. 结论

本文以非线性本构关系为基础, 设多孔材料梁的弹性模量与应变的关系是线性函数, 对多孔梁不同

孔隙分布类型下的弯曲变形问题的基本方程进行了推导, 采用打靶法求解了两端固定多孔梁在大挠度弯曲问题下受横向均布载荷的数值解。基于文中所研究的结果可得到以下结论:

(1) 多孔梁大挠度弯曲变形的数值会随着非线性本构参数 E_r 数值的增大而减小。

(2) 孔隙率 e_0 存在的情况下, T1, T2, T3 梁的弯曲变形数值随着孔隙率 e_0 的增加而增加, 其中三种梁的抗弯能力按 T2, T3, T1 的顺序依次减弱。

(3) 不同的孔隙分布类型下, 面对相同的外界条件, T2 梁受到外载荷 Q 、孔隙率 e_0 和非线性本构参数 E_r 的变化影响小于 T1 和 T3 梁, 即 T2 梁的综合抗弯能力最强。

基金项目

本文得到国家自然科学基金 11862012, 12062010 的资助。

参考文献

- [1] 滕兆春, 马铃权. 热环境中多孔功能梯度材料转动 Timoshenko 梁的自由振动特性分析[J]. 兰州理工大学学报, 2022, 48(6): 164-171.
- [2] 杨静宁, 王永祥, 唐健. 热机载荷下形状记忆合金梁超静定问题分析[J]. 兰州理工大学学报, 2021, 47(1): 158-163.
- [3] Ambartsumyan, S.A. 不同弹性模量理论[M]. 鄂瑞峰, 张允真, 译. 北京: 中国铁道出版社, 1986.
- [4] 张鹏, 范存新. 四边固支的双模量矩形板的弯曲计算[J]. 常州工学院学报, 2015, 28(6): 1-6.
- [5] 王康建, 赵永刚, 王铭慧, 等. 拉压弹性模量不等材料杆的过屈曲分析[J]. 甘肃科学学报, 2014, 26(6): 19-22.
- [6] Fraternali, F., Spadea, S. and Ascione, L. (2013) Buckling Behavior of Curved Composite Beams with Different Elastic Response in Tension and Compression. *Composite Structures*, **100**, 280-289. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.12.021>
- [7] 蔡来生, 俞焕然. 拉压模量不同弹性物质的本构[J]. 西安科技大学学报, 2009, 29(1): 17-21.
- [8] 穆琳, 胡宝庆, 凌雷, 等. 拉压弹性模量不等材料简支梁在横向载荷作用下的线性振动问题[J]. 甘肃科学学报, 2013, 25(4): 105-107.
- [9] 吴晓, 杨立军. 双模量泡沫铝芯夹层梁的弯曲计算分析[J]. 应用力学学报, 2015, 32(6): 922-927, 1098.
- [10] 马连生, 贾金政. 机械载荷作用下功能梯度梁的过屈曲分析[J]. 兰州理工大学学报, 2020, 46(3): 160-164.
- [11] 张靖华, 司成龙, 马浩. 石墨烯增强功能梯度梁自由振动的解析解[J]. 兰州理工大学学报, 2023, 49(2): 49-55.
- [12] 雷芳明. 四边简支功能梯度石墨烯增强复合材料厚板的自由振动分析[J]. 兰州理工大学学报, 2023, 49(4): 166-172.
- [13] 曲昭霞, 赵永刚, 秦慧峰. 非线性本构关系下两端固定梁的弯曲变形[J]. 甘肃科学学报, 2020, 32(1): 1-4.
- [14] Lei, Y.-L., Gao, K., Wang, X.W. and Yang, J. (2020) Dynamic Behaviors of Single- and Multi-Span Functionally Graded Porous Beams with Flexible Boundary Constraints. *Applied Mathematical Modelling*, **83**, 754-776. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.03.017>
- [15] Fang, W.H., Yu, T.T., Lich, L.V. and Bui, T.Q. (2019) Analysis of Thick Porous Beams by a Quasi-3D Theory and Isogeometric Analysis. *Composite Structures*, **221**, 110890. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.04.062>