Journal of Image and Signal Processing 图像与信号处理, 2022, 11(3), 125-133
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/jisp
https://doi.org/10.12677/jisp.2022.113014

基于共轭梯度的脉冲噪声去噪算法

孙 敏[1]，田茂英[2]

[1]枣庄学院，数学与统计学院，山东 枣庄
[2]山东煤炭卫生学校，山东 枣庄

收稿日期：2022年6月30日；录用日期：2022年7月11日；发布日期：2022年7月21日

摘 要

共轭梯度法是数值计算领域的一类重要方法。本文基于Schmidt正交化方法，提出了两种改进的Hestenes-Stiefel共轭梯度法。无需线搜索条件，它们自动满足共轭梯度法的两个重要性质，即充分下降性和共轭条件。在适当的条件下，本文证明了所设计算法的全局收敛性。最后，将这两种算法应用到脉冲噪声去噪中，初步的数值试验表明了算法的有效性。

关键词

共轭梯度，收敛性，脉冲噪声去噪

Impulse Noise Denoising Algorithm Based on Conjugate Gradient

Min Sun[1], Maoying Tian[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Zaozhuang University, Zaozhuang Shandong
[2]Shandong Coal Medical School, Zaozhuang Shandong

Received: Jun. 30th, 2022; accepted: Jul. 11th, 2022; published: Jul. 21st, 2022

Abstract

Conjugate gradient method is an important method in numerical computation. Based on Schmidt orthogonalization, two improved Hestenes-Stiefel conjugate gradient methods are proposed in this paper. Without line search conditions, they automatically satisfy two important properties of the conjugate gradient method, namely, sufficient descent and conjugate conditions. Under appropriate conditions, the global convergence of the proposed algorithm is proved. Finally, the two algorithms are applied to impulse noise denoising, and preliminary numerical experiments show the effectiveness of the algorithm.

文章引用: 孙敏, 田茂英. 基于共轭梯度的脉冲噪声去噪算法[J]. 图像与信号处理, 2022, 11(3): 125-133.
DOI: 10.12677/jisp.2022.113014

Keywords

Conjugate Gradient, Convergence, Impulse Noise Denoising

1. 引言

考虑无约束最优化问题(记为 UCP)：

$$\min_{x\in R^n} f(x) \tag{1}$$

其中 $f: R^n \to R$ 是一个光滑函数，且有下界。UCP 是最优化领域中最重要和最基本的问题之一，学者们对其进行了系统而深入的研究。有许多经典的迭代方法来求解 UCP，包括最速下降法、共轭梯度法、信赖域法、牛顿法、拟牛顿法等[1] [2]。尽管信赖域方法、牛顿方法和拟牛顿方法具有很好的收敛性，但它们不适合大规模的 UCP，因为它们需要计算 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(x_k)$ 或其近似值，从而导致大量的计算和存储。最速下降法和共轭梯度法在迭代方案中只包括梯度 $\nabla f(x_k)$，因此，它们适用于求解大规模的 UCP。

共轭梯度法的基本思想可以追溯到 Hestenes 和 Stiefel 求解线性方程组的研究成果。后来，Fletcher 和 Reeves 将其推广到解决非线性优化问题。共轭梯度法自出现以来，一直受到学者们的密切关注。从初始迭代 x_0 开始，共轭梯度法的迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, k = 0,1,\cdots \tag{2}$$

其中 α_k 是由某些线搜索计算的步长，d_k 是生成的搜索方向，其定义下式

$$d_k = \begin{cases} -g_k & \text{if } k = 0, \\ -g_k + \beta_k d_{k-1}, & \text{if } k \geq 1, \end{cases} \tag{3}$$

其中，$g_k = \nabla f(x_k)$ 和 β_k 是共轭参数，这是不同共轭梯度方法之间的根本区别。比较著名的共轭参数包括：Hestenes-Stiefel (HS)，Polak-Ribiere-Polyak (PRP)，Fletcher-Reeves (FR)，与 Dai-Yuan (DY)。具体定义如下[3]：

$$\beta_k^{\text{HS}} = \frac{g_k^\top (g_k - g_{k-1})}{d_{k-1}^\top (g_k - g_{k-1})}, \beta_k^{\text{PRP}} = \frac{g_k^\top (g_k - g_{k-1})}{\|g_{k-1}\|^2},$$

$$\beta_k^{\text{FR}} = \frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2}, \beta_k^{\text{DY}} = \frac{\|g_k\|^2}{d_{k-1}^\top (g_k - g_{k-1})}.$$

如果 UCP 中的 $f(x)$ 是一个强二次函数，并且(2)中的步长 α_k 是通过精确的线搜索生成的，则上述四个 β_k 公式是等价的，否则可以得到四个著名的共轭梯度方法，即 HS 方法、PRP 方法、FR 方法和 DY 方法。这四个方法具有不同的收敛结果和数值性能。FR 方法和 DY 方法分别在强 Wolfe 线搜索和 Wolfe 线搜索下具有全局收敛性。对于 HS 方法和 PRP 方法，它们通常被认为是实际应用中最有效的两种共轭梯度法，但即使步长 α_k 是精确步长，它们也可能发散。

大量数值试验表明，高效的共轭梯度法产生的搜索方向满足两个性质：充分下降条件和共轭条件，也就是

$$g_k^\top d_k \le -c\|g_k\|^2, c>0 \tag{4}$$

与

$$y_{k-1}^\top d_k = 0 \tag{5}$$

其中 $y_{k-1} = g_k - g_{k-1}$。近几年学者们设计了多种满足(4)或(5)的共轭梯度法。比如，Hager 与 Zhang [4]将(3)中的参数 β_k 取为

$$\beta_k^{\mathrm{HZ}} = \frac{1}{\langle d_{k-1}, y_{k-1}\rangle}\left\langle y_{k-1} - 2d_{k-1}\frac{\|y_{k-1}\|^2}{\langle d_{k-1}, y_{k-1}\rangle}, g_k\right\rangle.$$

如果 $\langle d_{k-1}, y_{k-1}\rangle \ne 0$，则有

$$g_k^\top d_k \le -\frac{7}{8}\|g_k\|^2.$$

文献[5] [6]提出了两种修正的 PRP 共轭梯度法，其方向取为

$$d_k^{\mathrm{ZTPRP}} = -g_k + \beta_k^{\mathrm{PRP}} d_{k-1} - \theta_k y_{k-1},$$

$$d_k^{\mathrm{CTPRP}} = -\left(1 + \beta_k^{\mathrm{PRP}}\frac{g_k^\top d_{k-1}}{\|g_k\|^2}\right) g_k + \beta_k^{\mathrm{PRP}} d_{k-1},$$

其中 $\theta_k = \dfrac{g_k^\top d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2}$。容易验证上面两类方向都满足 $g_k^\top d_k = -\|g_k\|^2$，并且容易看出 d_k^{CTPRP} 的设计动机来自于 Schmidt 正交化方法。基于这个设计思想，[7]提出了一类满足夹角性质的记忆梯度法，其产生的方向同时满足(4)与夹角条件 $\cos\langle -g_k, d_k\rangle \ge 1/3$。

本文继续对这一方向进行研究，提出了两种同时满足充分下降性和共轭条件的改进 HS 共轭梯度法。本文的其余部分组织如下：第 2 节提出了 HS 方法的两种变体，并证明了生成序列的一些重要性质。第 3 节证明了它们的全局收敛性。在第 4 节中，我们给出了一些图像去噪的试验结果。第 5 节给出一些未来的研究方向。

2. 两类改进的 HS 方法

在这一节中，我们设计两种改进的 HS 方法的迭代格式。在无需线搜索的条件下，它们产生的方向满足充分下降条件和共轭条件。

正如在第 1 节中所分析，由下式产生的方向 d_k 满足充分下降条件：

$$d_k = -\left(1 + \beta_k \frac{g_k^\top d_{k-1}}{\|g_k\|^2}\right) g_k + \beta_k d_{k-1} \tag{6}$$

因此，为了确保 d_k 满足共轭条件，我们只需将其代入(5)式，并求解得到的线性方程。也就是

$$y_{k-1}^\top\left(\left(1 + \beta_k \frac{g_k^\top d_{k-1}}{\|g_k\|^2}\right) g_k - \beta_k d_{k-1}\right) = 0$$

由此得

$$\beta_k^{\mathrm{HS1}}=\frac{\|g_k\|^2 g_k^\top y_{k-1}}{\|g_k\|^2 y_{k-1}^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}-\left(g_k^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}\right)\left(g_k^\top y_{k-1}\right)} \tag{7}$$

其中 d_{k-1} 替换成了 d_{k-1}^{HS1}。然后，将(7)代入(6)，得到以下迭代方向：

$$d_k^{\mathrm{HS1}}=-\left(1+\beta_k^{\mathrm{HS1}}\frac{g_k^\top d_{k-1}}{\|g_k\|^2}\right)g_k+\beta_k^{\mathrm{HS1}}d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}. \tag{8}$$

引理 2.1 由(8)定义的方向 d_k^{HS1} 满足充分下降条件和共轭条件。此外，如果步长 α_{k-1} 是通过精确的线搜索计算的，并且 $d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}=d_{k-1}^{\mathrm{HS}}$，那么 $d_k^{\mathrm{HS1}}=d_k^{\mathrm{HS}}$，其中 d_k^{HS} 是 HS 方法的方向，即

$$d_k^{\mathrm{HS}}=-g_k+\beta_k^{\mathrm{HS}}d_{k-1}^{\mathrm{HS}}.$$

证明 从 d_k^{HS1} 的公式可得

$$g_k^\top d_k^{\mathrm{HS1}}=-\|g_k\|^2, y_{k-1}^\top d_k^{\mathrm{HS1}}=0. \tag{9}$$

因此，方向 d_k^{HS1} 满足充分下降条件和共轭条件。

由于 α_{k-1} 是通过精确的行搜索计算的，因此我们有 $g_k^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}=0$。这与(7)、(8)表明如果 $d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}=d_{k-1}^{\mathrm{HS}}$，则 $\beta_k^{\mathrm{HS1}}=\beta_k^{\mathrm{HS}}$ 及 $d_k^{\mathrm{HS1}}=d_k^{\mathrm{HS}}$。证毕。

参数 β_k^{HS1} 由以下两个步骤生成：首先通过 Schmidt 正交化使 d_k 满足充分下降条件，然后通过求解相应的线性方程调整得到的 d_k 满足共轭条件。显然，上述两个步骤可以交换顺序。也就是说，可以先通过施密特正交化使 d_k 满足共轭条件，然后调整得到的 d_k 以满足充分下降条件。具体地，为了使(3)定义的 d_k 满足共轭条件，通过 Schmidt 正交化得

$$d_k=-g_k+\beta_k d_{k-1}-\frac{-g_k^\top y_{k-1}+\beta_k d_{k-1}^\top y_{k-1}}{\|y_{k-1}\|^2}y_{k-1}.$$

然后将上述等式代入等式 $g_k^\top d_k=-\|g_k\|^2$，得

$$\beta_k^{\mathrm{HS2}}=\frac{\left(g_k^\top y_{k-1}\right)^2}{\left(g_k^\top y_{k-1}\right)\left(y_{k-1}^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS2}}\right)-\|y_{k-1}\|^2 g_k^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS2}}} \tag{10}$$

其中 d_{k-1} 替换成了 d_{k-1}^{HS2}。于是，得到了一个新的方向

$$d_k^{\mathrm{HS2}}=-g_k+\beta_k^{\mathrm{HS2}}d_{k-1}^{\mathrm{HS2}}-\frac{-g_k^\top y_{k-1}+\beta_k^{\mathrm{HS2}}\left(d_{k-1}^{\mathrm{HS2}}\right)^\top y_{k-1}}{\|y_{k-1}\|^2}y_{k-1}. \tag{11}$$

引理 2.2 由(11)定义的方向 d_k^{HS2} 满足充分下降条件和共轭条件。此外，如果步长 α_{k-1} 是通过精确的线搜索计算的，并且 $d_{k-1}^{\mathrm{HS2}}=d_{k-1}^{\mathrm{HS}}$，那么 $d_k^{\mathrm{HS2}}=d_k^{\mathrm{HS}}$。

证明 从 d_k^{HS2} 的公式可得

$$g_k^\top d_k^{\mathrm{HS2}}=-\|g_k\|^2, y_{k-1}^\top d_k^{\mathrm{HS2}}=0. \tag{12}$$

因此，方向 d_k^{HS2} 满足充分下降条件和共轭条件。

由于 α_{k-1} 是通过精确的行搜索计算的，因此我们有 $g_k^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS2}}=0$。这与(9)、(10)表明如果 $d_{k-1}^{\mathrm{HS2}}=d_{k-1}^{\mathrm{HS}}$，则 $\beta_k^{\mathrm{HS2}}=\beta_k^{\mathrm{HS}}$ 及 $d_k^{\mathrm{HS2}}=d_k^{\mathrm{HS}}$。证毕。

在下文中，对问题(1)做出以下限制。假设：

(H1) 水平集 $\Omega=\left\{x\in R^n \mid f(x)\le f(x_0)\right\}$ 有界；

(H2) 在Ω的某个邻域中，梯度$g(x)$是 Lipschitz 连续的，即存在一个常数$L>0$，使得

$$\|g(x)-g(y)\| \le L\|x-y\|, \forall x, y \in N;$$

(H3) 函数$f(x)$在Ω上一致凸，即存在一个常数$\mu>0$，使得

$$(g(x)-g(y))^{\top}(x-y) \ge \mu\|x-y\|^2, \forall x, y \in \Omega. \tag{13}$$

假设(H1)与(H2)表明存在正常数γ与B使得

$$\|g(x)\| \le \gamma, \forall x \in \Omega, \tag{14}$$

$$\|x-y\| \le B, \forall x, y \in \Omega. \tag{15}$$

在共轭梯度法中，步长α_k通常由非精确线性搜索确定，比如 Armijo 线搜索、Wolfe 线搜索、Goldstein 线搜索等。本文采用 Armijo 线搜搜，即步长α_k是集合$\{1,\rho,\rho^2,\cdots\}$中满足下面不等式的最大的α：

$$f(x_k+\alpha d_k) \le f(x_k)-\sigma\alpha^2\|d_k\|^2, \tag{16}$$

其中$\rho \in (0,1)$，$\sigma>0$。

由(13)得

$$d_{k-1}^{\top}y_{k-1}=d_{k-1}^{\top}(g_k-g_{k-1}) \ge \alpha_{k-1}\|d_{k-1}\|^2 \ge 0. \tag{17}$$

如果$\|y_{k-1}\|=0$，则由充分下降性及(17)得$\|g_{k-1}\|=0$，这说明x_{k-1}是问题(1)的一个稳定点。

基于上面的分析，下面给出求解问题(1)的两项 HS 共轭梯度法。

TTMHSCG1 方法(两项修正 HS 共轭方法 1)

步 0. 选取正常数ν，ρ，σ满足$0<\rho<\sigma<1$。选取初始迭代点$x_0 \in R^n$，计算g_0。令$d_0^{\mathrm{HS1}}=-g_0$，$k:=0$。

步 1. 如果$\|g_k\|=0$，停止否则转步 2。

步 2. 由 Armijo 线搜索(16)确定步长α_k。

步 3. 令$x_{k+1}=x_k+\alpha_k d_k$，计算g_{k+1}。

步 4. 如果$g_{k+1}^{\top}y_k$与$g_{k+1}^{\top}d_k^{\mathrm{HS1}}$的符号相同且

$$\left|\|g_{k+1}\|^2 y_k^{\top}d_k^{\mathrm{HS1}}-\left(g_{k+1}^{\top}d_k^{\mathrm{HS1}}\right)\left(g_{k+1}^{\top}y_k\right)\right|<\nu\left\|d_k^{\mathrm{HS1}}\right\|$$

则令$d_{k+1}^{\mathrm{HS1}}=-g_{k+1}$；否则$d_{k+1}^{\mathrm{HS1}}$由(8)式确定。

步 5. 令$k=k+1$，返回步 1。

类似地，基于d_k^{HS2}可得另一类 HS 共轭梯度法。

TTMHSCG2 方法(两项修正 HS 共轭方法 2)

步 0~步 3. 与 TTMHSCG1 方法一样。

步 4. 如果$g_{k+1}^{\top}y_k$与$g_{k+1}^{\top}d_k^{\mathrm{HS2}}$的符号相同且

$$\left|\left(g_{k+1}^{\top}y_k\right)\left(y_k^{\top}d_k^{\mathrm{HS2}}\right)-\|y_k\|^2 g_{k+1}^{\top}d_k^{\mathrm{HS2}}\right|<\nu\left\|d_k^{\mathrm{HS2}}\right\|$$

则令$d_{k+1}^{\mathrm{HS2}}=-g_{k+1}$；否则$d_{k+1}^{\mathrm{HS2}}$由(11)式确定。

步 5. 令$k=k+1$，返回步 1。

3. 全局收敛性

本文讨论 TTMHSCG1 与 TTMHSCG2 的全局收敛性。下面的引理给出了 Armijo 线搜索所生成的步长序列$\{\alpha_k\}$存在一个正下界。

引理 3.1 如果函数$f(\cdot)$满足假设(H1)与(H2)，步长α_k由 Armijo 线搜索确定，则

$$\alpha_k \geq \min\left\{1, \frac{\rho\|g_k\|^2}{(L+\sigma)\|d_k\|^2}\right\}. \tag{18}$$

证明 如果$\alpha_k \neq 1$，这说明$\alpha_k' = \alpha_k/\rho$不满足(16)，即

$$f(x_k+\alpha_k' d_k) > f(x_k) - \sigma(\alpha_k')^2\|d_k\|^2. \tag{19}$$

由中值定理及(H2)得，存在常数$\theta_k \in (0,1)$使得

$$\begin{aligned}
& f(x_k+\alpha_k' d_k) - f(x_k) \\
&= \alpha_k' g(x_k+\theta_k\alpha_k' d_k)^\top d_k \\
&= \alpha_k' g_k^\top d_k + \left(g(x_k+\theta_k\alpha_k' d_k) - g_k\right)^\top d_k \\
&\leq -\alpha_k'\|g_k\|^2 + (\alpha_k')^2 L\|d_k\|^2,
\end{aligned}$$

由此式及(19)容易得到(18)成立。证毕。

定理 3.1 假设(H1)~(H3)成立，令$\{x_k\}$是算法 TTMHSCG1 与 TTMHSCG2 生成的点列，则

$$\lim_{k\to\infty}\|g_k\| = 0.$$

证明 我们只证明了 TTMHSCG1 的全局收敛性。TTMHSCG2 的证明与其类似。事实上，由(H2)可得$\|y_{k-1}\| \leq L\|x_k - x_{k-1}\|$；由(H3)可得$y_{k-1}^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}} \geq \mu\alpha_{k-1}\left\|d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}\right\|^2 > 0$。

以下证据分为三种情况。第一种情况，当$g_k^\top y_{k-1}$与$g_k^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}$有不同的符号时，有

$$\begin{aligned}
\left|\beta_k^{\mathrm{HS1}}\right| &= \frac{\|g_k\|^2\left|g_k^\top y_{k-1}\right|}{\left|\|g_k\|^2 y_{k-1}^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}} + \left|\left(g_k^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}\right)\left(g_k^\top y_{k-1}\right)\right|\right|} \\
&\leq \frac{\left|g_k^\top y_{k-1}\right|}{y_{k-1}^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}} \leq \frac{L\|g_k\|\|x_k - x_{k-1}\|}{\mu\alpha_{k-1}\left\|d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}\right\|^2} = \frac{L\|g_k\|}{\mu\left\|d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}\right\|},
\end{aligned}$$

由此可得

$$\left\|d_k^{\mathrm{HS1}}\right\| \leq \|g_k\| + 2\left|\beta_k^{\mathrm{HS1}}\right|\left\|d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}\right\| \leq \left(1+\frac{2L}{\mu}\right)\|g_k\|. \tag{20}$$

第二种情况，当$\left|\|g_k\|^2 y_{k-1}^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}} - \left(g_k^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}\right)\left(g_k^\top y_{k-1}\right)\right| \geq \nu\|d_{k-1}\|$，并且$g_k^\top y_{k-1}$与$g_k^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}$符号相同时，有

$$\left|\beta_k^{\mathrm{HS1}}\right| = \frac{\|g_k\|^2\left|g_k^\top y_{k-1}\right|}{\left|\|g_k\|^2 y_{k-1}^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}} - \left(g_k^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}\right)\left(g_k^\top y_{k-1}\right)\right|} \leq \frac{\|g_k\|^2\left|g_k^\top y_{k-1}\right|}{\nu\left\|d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}\right\|} \leq \frac{LD\gamma^2\|g_k\|}{\left\|d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}\right\|},$$

其中不等式是根据(14)、(15)得到的。于是

$$\left\|d_k^{\mathrm{HS1}}\right\| \leq \|g_k\| + 2\left|\beta_k^{\mathrm{HS1}}\right|\left\|d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}\right\| \leq \left(1+2LD\gamma^2\right)\|g_k\|. \tag{21}$$

第三种情况，当$\left|\|g_k\|^2 y_{k-1}^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}} - \left(g_k^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}\right)\left(g_k^\top y_{k-1}\right)\right| < \nu\|d_{k-1}\|$，并且$g_k^\top y_{k-1}$与$g_k^\top d_{k-1}^{\mathrm{HS1}}$符号相同时，由

TTMHSCG1 的第 4 步得

$$\left\|d_k^{\mathrm{HS1}}\right\| = \left\|g_k\right\|. \tag{22}$$

因此，从(20)~(22)，可得

$$\left\|d_k\right\| \le \tau\left\|g_k\right\| \le \tau\gamma, \tag{23}$$

其中 $\tau = 1 + 2L\max\left\{1/\mu, D\gamma^2\right\}$ 。

另一方面，从 Armijo 线搜索(17)，我们有

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k\left\|d_k\right\| = 0.$$

由这个式子与充分下降条件可得

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k\left\|g_k\right\| \le \lim_{k\to\infty}\alpha_k\left\|d_k\right\| = 0. \tag{24}$$

下面利用反证法证明结论。假设 $\lim_{k\to\infty}\left\|g_k\right\| = 0$ 不成立，于是存在常数 $\epsilon > 0$ 与无穷点列 K 使得

$$\left\|g_k\right\| \ge \epsilon, \forall k \in K.$$

由此式及(18) (23) (24)得

$$\lim_{k\to\infty, k\in K}\alpha_k = 0,$$

以及

$$\alpha_k \ge \min\left\{1, \frac{\rho\epsilon_1^2}{(L+\sigma)\tau^2\gamma^2}\right\}, \forall k \in K.$$

显然上面两个式子是矛盾的，因此假设不成立。证毕。

4. 数值实验

本节利用 TTMHSCG1 与 TTMHSCG2 求解[8]中提出的图像处理的两阶段法。令 $X = \left[x_{i,j}\right]_{M\times N}$ 表示一个有 $M\times N$ 个像素的图像，对于每个 $(i,j)\in A := \{1,2,\cdots,M\}\times\{1,2,\cdots,N\}$ ，令 $V_{i,j}$ 表示 (i,j) 的相邻点，即

$$V_{i,j} = \left\{(i,j-1),(i,j+1),(i-1,j),(i+1,j)\right\}.$$

同时令 $y_{i,j}$ 表示点 (i,j) 的观测像素。下面简要回顾一下两阶段法。在第一阶段，两阶段法利用自适应中值滤波器(AMF)探测出椒盐噪声的位置，并令 $N \subseteq A$ 表示椒盐噪声的坐标集合；第二阶段，两阶段法通过求解下面的最优化问题填补椒盐噪声点处的像素值。

$$\min_u \mathcal{G}_\alpha(u) = \sum_{(i,j)\in N}\left\{\sum\nolimits_{(m,n)\in V_{i,j}\setminus N}\varphi_\alpha\left(u_{i,j}-y_{m,n}\right) + \frac{1}{2}\sum_{(m,n)\in V_{i,j}\cap N}\varphi_\alpha\left(u_{i,j}-y_{m,n}\right)\right\},$$

其中 α 是正则化参数， φ_α 是保边函数， $u = \left[u_{i,j}\right]_{(i,j)\in N}$ 是一个列向量(按字典序排列)。

图 1 与图 2 给出利用 TTMHSCG1 与 TTMHSCG2 还原 Lena (256 × 256)的结果，其中图 1 的 PSNR 由 13.8402 增加到 29.0134，图 2 的 PSNR 由 13.8571 增加到 28.4543。

Figure 1. The denosing results of TTMHSCG1 (left: original, middle: nosed, right: recovered)
图 1. TTMHSCG1 去噪效果(左：原始图，中：含噪图，右：去噪图)

Figure 2. The denosing results of TTMHSCG2 (left: original, middle: nosed, right: recovered)
图 2. TTMHSCG2 去噪效果(左：原始图，中：含噪图，右：去噪图)

由图 1 与图 2 的还原效果可以看出，TTMHSCG1 与 TTMHSCG2 成功地将脉冲噪声去除，因此其在脉冲噪声去噪方面表现良好。

5. 结论

本文设计了两种修正的 HS 共轭梯度法，它们同时满足充分下降性与共轭条件，同时这两个性质是不依赖于线搜索的。同时本文证明了两种修正 HS 共轭梯度法的全局收敛性。最后初步的数值实验表明所设计方法在脉冲噪声去噪方面是有效的。

致　谢

感谢审稿人对本文提出的宝贵意见。

基金项目

枣庄学院博士科研启动基金、枣庄学院教学改革重点项目(XJG20019)。

参考文献

[1] 马昌凤. 最优化方法及其 Matlab 程序设计[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 87-108.

[2] 王宜举, 修乃华. 非线性最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 112-134.

[3] 戴彧虹, 袁亚湘. 非线性共轭梯度法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2000: 1-32.

[4] Hager, W.W. and Zhang, H.C. (2005) A New Conjugate Gradient Method with Guaranteed Descent and an Efficient Line Search. *SIAM Journal on Optimization*, **16**, 170-192. https://doi.org/10.1137/030601880

[5] Zhang, L., Zhou, W.J. and Li, D.H. (2006) A Descent Modified Polak-Ribière-Polyak Conjugate Gradient Method and Its Global Convergence. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **26**, 629-640. https://doi.org/10.1093/imanum/drl016

[6] Cheng, W.Y. (2007) A Two-Term PRP-Based Descent Method. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **28**, 1217-1230. https://doi.org/10.1080/01630560701749524

[7] Sun, M. and Bai, Q.G. (2011) A New Descent Memory Gradient Method and Its Global Convergence. *Journal of Systems Science and Complexity*, **24**, Article No. 784. https://doi.org/10.1007/s11424-011-8150-0

[8] Cai, J.F., Chan, R.H. and Fiore, C.D. (2007) Minimization of a Detail-Preserving Regularization Functional for Impulse Noise Removal. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **29**, 79-91. https://doi.org/10.1007/s10851-007-0027-4