

基于信号子空间的快速多项式求根测向算法

李国庆, 卢佳伟, 刘旋, 黄治炜, 郭艺夺*

空军工程大学防空反导学院, 陕西 西安

收稿日期: 2023年8月27日; 录用日期: 2023年9月18日; 发布日期: 2023年9月28日

摘要

波达方向估计(DOA, Direction of Arrival)为第五代(5G, the 5th Generation)移动通信系统的定位技术提供了重要的支撑,但现有的DOA估计算法有些由于计算量较大,无法用于5G移动通信的目标定位。本文提出了一种基于信号子空间的快速多项式求根测向算法。该算法从信号子空间构造多项式系数,然后通过多项式求根得到目标的DOA。所提的求根方法易于构造多项式系数,仅从M个根就可估计M个DOA。与其他多项式求根方法相比,对于大型阵列,该方法可以显著降低计算量。计算机仿真结果证明了所提方法的正确性和有效性。

关键词

第五代移动通信系统, 波达方向估计, 信号子空间, 多项式求根, 大型阵列

Fast Polynomial Rooting Direction Finding Algorithm Based on Signal Subspace

Guoqing Li, Jiawei Lu, Xuan Liu, Zhiwei Huang, Yiduo Guo*

Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an Shaanxi

Received: Aug. 27th, 2023; accepted: Sep. 18th, 2023; published: Sep. 28th, 2023

Abstract

DOA (Direction Of Arrival) provides an important support for the positioning technology of 5G (the 5th Generation) mobile communication system, but some of the existing DOA estimation algorithms cannot be used for the target positioning of 5G mobile communication due to the large amount of computation. In this paper, a fast polynomial rooting direction finding algorithm based on signal subspace is proposed. The algorithm constructs polynomial coefficients from signal subspace, and then gets the DOAs of the signals by polynomial rooting. The proposed method is easy

*通讯作者。

文章引用: 李国庆, 卢佳伟, 刘旋, 黄治炜, 郭艺夺. 基于信号子空间的快速多项式求根测向算法[J]. 图像与信号处理, 2023, 12(4): 352-359. DOI: 10.12677/jisp.2023.124034

to construct polynomial coefficients, and M DOAs can be estimated from M roots only. Compared with other polynomial rooting algorithms, our algorithm can significantly reduce the computation for large arrays. Simulation results prove the correctness and effectiveness of the proposed method.

Keywords

5G Mobile Communication System, Direction of Arrival, Signal Subspace, Polynomial Rooting, Large Arrays

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近几十年来, 雷达的发展日新月异, 在军用和民用两个领域中雷达均成为了环境感知和目标探测的重要核心设备。因为阵列天线的可靠性、可拓展性以及波束的灵活控制, 使得阵列天线作为接收/发射天线广泛应用于各种类型的雷达。随着阵列天线的应用, 传统雷达的信号处理方法不能发挥出阵列天线的优势, 阵列信号处理技术应运而生, 其中, 波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计[1] [2] [3]更是阵列信号处理的重要组成部分。DOA 估计通过多个传感器阵元共同采样来波信号接收阵列数据, 实现对有用信号进行增强、对噪声信息进行抑制的目的, 最终估计信号的波达方向角度。随着 DOA 估计技术性能的提高, 其应用领域也在迅速发展。对空间多个来波信号进行高精度的测向符合国防及民生众多行业部门的迫切需求, 同时赋予了 DOA 估计重大的研究意义[1] [2] [3]。

基于特征分解方法的 DOA 估计是一个活跃的研究领域。这些方法通常分为两大类: 基于谱峰搜索的算法[4] [5] [6]和基于求根的算法[7] [8] [9] [10]。基于谱峰搜索的算法需要在雷达一定的角度范围内进行角度搜索, 所以其估计精度和计算量与搜索步长紧密相关, 且两者相互矛盾。如果步长选择比较大, 该类算法的计算量比较小, 但测角精度不高; 反之, 步长选择较小可在一定程度上提高精度, 但计算量会急剧增加。与基于谱峰搜索的算法相比, 基于求根的算法表现出更高的角度分辨率和更低的计算量。迄今为止, 各国学者已经提出了很多基于求根的算法, 如求根 MUSIC 算法(RM, Root MUSIC) [7]和求根最小模算法(RMN, Root Minimum Norm) [8], 但这些方法都需要进行高阶多项式求根, 而高阶多项式求根可能得到多余的根, 导致 DOA 估计出现错误。为了解决这个问题, 文献[9]中提出了一种基于噪声子空间的快速求根 MUSIC 算法; 文献[10]中, 提出了新的基于二阶和四阶(FO, Fourth Order)统计的简化多项式求根算法, 但是高阶统计量同样会带来计算量较大的问题。

本文提出了一种新的基于信号子空间的多项式求根算法。利用子空间理论, 我们推导了所提算法的 M 阶多项式的系数, 并给出了具体的多项式计算公式, 然后通过计算一个 M 阶多项式的根可以获得 M 个 DOA。与其他多项式求根算法相比, 所提算法实现简单, 更适合于大型阵列。

2. 算法描述

2.1. 信号模型

考虑一个有 L 个阵元且阵元间间距为半波长的均匀线性阵列, 从 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, M)$ 方向接收 M 个窄带平面波信号。假设信号和噪声是平稳、零均值的不相关过程, 噪声是均值为零的白噪声, 方差为 σ^2 。阵列接收的回波信号模型为

$$\mathbf{X}(n) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S}(n) + \mathbf{N}(n), n = 1, \dots, N \quad (1)$$

式中, $\mathbf{X}(n)$ 是接收的数据向量, $\mathbf{S}(n)$ 是信号向量, $\mathbf{N}(n)$ 是噪声向量, $\mathbf{A}(\theta)$ 是导向矢量矩阵, $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_M)]$, $\mathbf{a}(\theta_i) = [1, e^{-j\pi \sin \theta_i}, \dots, e^{-j(L-1)\pi \sin \theta_i}]^T$; N 是快拍数。

阵列协方差矩阵为

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{X}(n)\mathbf{X}^H(n) \quad (2)$$

式中, H 表示埃尔米特转置。

通过对 \mathbf{R} 进行特征分解, 可以得到 $L \times M$ 维的信号子空间矩阵 \mathbf{U}_s , 它由协方差矩阵 \mathbf{R} 的 M 个最大特征值对应的 M 个特征向量组成。

2.2. 算法原理

因为 \mathbf{U}_s 的秩是 M , 假设存在一个 $M \times 1$ 维的向量 $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_M]^T$ 和一个 $(L-M) \times 1$ 向量 $\mathbf{e}_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$ 满足

$$[\mathbf{c}^T, \mathbf{e}_1^T] \mathbf{U}_s = 0 \quad (3)$$

定义

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{s1} \\ \mathbf{U}_{s2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, \mathbf{U}_{s1} 是一个 $M \times M$ 的子矩阵, \mathbf{U}_{s2} 是一个 $(L-M) \times M$ 的子矩阵, 把式(4)带入式(3)中, \mathbf{c}^T 可以表示为

$$\mathbf{c}^T = -\mathbf{e}_1^T \mathbf{U}_{s2} (\mathbf{U}_{s1})^{-1} \quad (5)$$

式中, $(\mathbf{U}_{s1})^{-1}$ 表示矩阵 \mathbf{U}_{s1} 的逆。

令 $z = e^{-j\pi \sin \theta}$, 那么转向矢量可以写成

$$\mathbf{a}(z) = [1, z, \dots, z^{L-1}]^T \quad (6)$$

由于信号子空间与入射信号的导向矢量所组成的空间相同, 根据式(3), 可定义如下的多项式

$$\mathbf{G}(z) = [\mathbf{c}^T, \mathbf{e}_1^T] \mathbf{a}(z) = 0 \quad (7)$$

现在 \mathbf{c}^T 已经由式(6)确定, 多项式 $\mathbf{G}(z)$ 为

$$\mathbf{G}(z) = \sum_{i=1}^{M+1} \mathbf{c}^i z^{i-1} = 0, \mathbf{c}_{M+1} = 1 \quad (8)$$

式(8)具有 M 个根, 其对应于 M 个信号的 DOA。在计算得到式(8)的 M 个根 $z_i (i = 1, 2, \dots, M)$ 之后, 信号的 DOA 可表示为

$$\theta_i = \arcsin \left[\frac{1}{\pi} \text{phase}(z_i) \right], i = 1, 2, \dots, M \quad (9)$$

式中, $\text{phaes}(z_i)$ 表示取 z_i 的相位。

2.3. 算法步骤

由上述分析, 该算法基本步骤可归纳如下:

- (1) 由阵列接收的数据 $\mathbf{X}(n)$ 估计阵列协方差矩阵 \mathbf{R} ;
- (2) 对协方差矩阵进行提特征值分解或奇异值分解, 得到信号子空间 \mathbf{U}_s ;
- (3) 将信号子空间 \mathbf{U}_s 分为 $M \times M$ 和 $(L-M) \times M$ 两个子矩阵 \mathbf{U}_{s1} 和 \mathbf{U}_{s2} , 并利用式(5)计算得到多项式系数 \mathbf{c} ;
- (4) 根据式(8)构造多项式, 求出多项式的 M 个根, 并利用式(9)计算得到各信号的 DOA。

3. 计算量分析

表 1 给出了所提算法、RM、RMN 和文献[9]中多项式求根算法的计算量对比。

Table 1. The computational cost of polynomial rooting for four methods

表 1. 四种算法多项式求根的计算量

算法	计算量	多项式系数求解	求根过程
所提算法		$o(M^3 + M^2)$	$o(M^2)$
RM 算法		$o[L(L-M)^2 + (L^2 + L)]$	$o[(2L-2)^2]$
RMN 算法		$o[(L-1)^3 + (L-1)M]$	$o[(L-1)^2]$
文献[9]算法		$o[(L-M)^3 + M(L-M)]$	$o(M^2)$

从表 1 中我们知道, 所提算法的多项式求根的计算量与 L 无关, 对于大型阵列, 其阵元数远远大于目标数, 即 $L \gg M$ 时, 所提算法计算量要远远小于 RM、RMN 和文献[9]中的算法。因此, 本文所提的算法更适用于大型阵列的 DOA 估计。

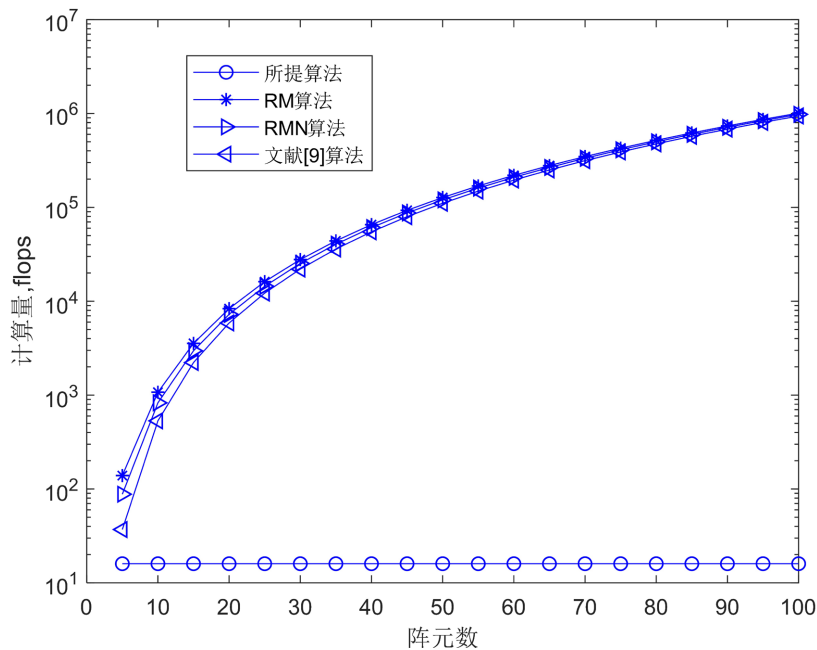


Figure 1. Computational cost of the polynomial rooting for four methods versus L

图 1. 四种算法多项式求根的计算量随 L 变化曲线

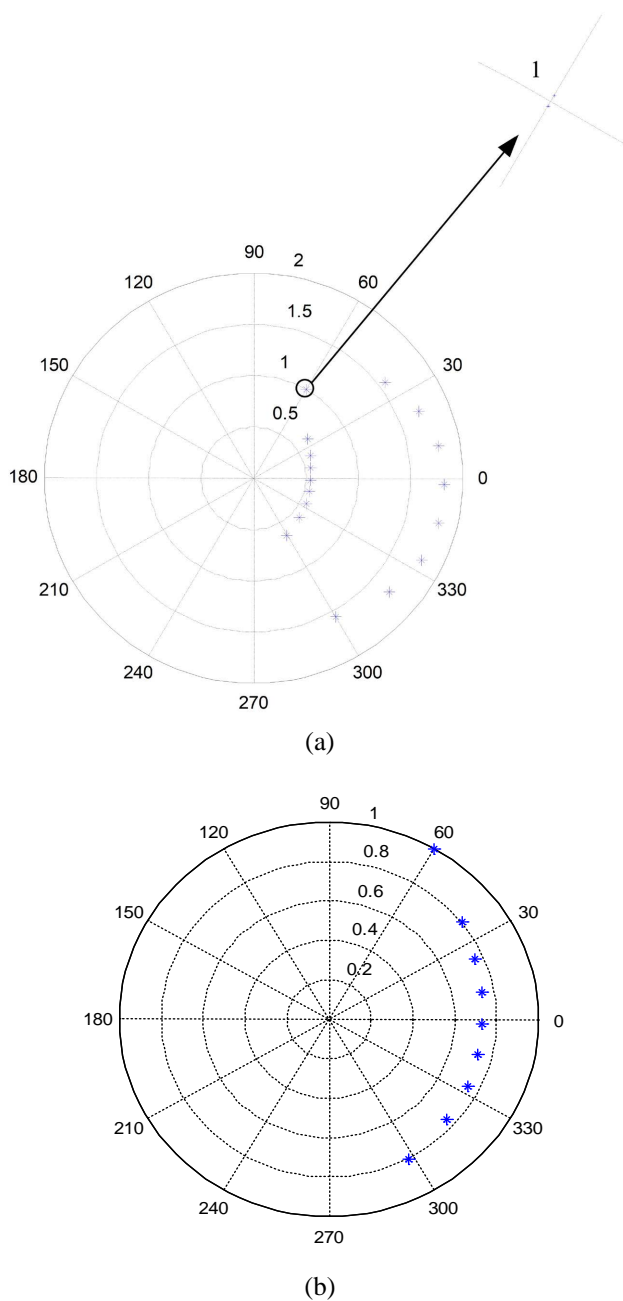
图 1 给出了四种方法的多项式求根计算量随 L 的变化曲线。仿真过程中, 假设信源数 $M = 2$, 阵元

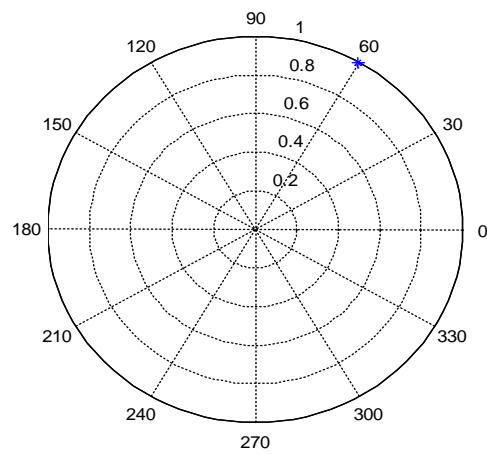
数 L 在 5 到 100 之间按步长 5 变化。从图中可以看出：所提算法的计算量不随阵元数变化，且当 $L \gg M$ 时，另外三种多项式求根算法的计算量几乎相同，要远远大于本文所提算法。

4. 计算机仿真结果

仿真过程中，假设均匀线阵阵元数 $L = 10$ ，快拍数 $N = 256$ 。

图 2 给出了信噪比 $SNR = 15$ dB 时，RM 算法、RMN 算法和所提算法对位于 60° 方向信号的 DOA 估计结果。从图中可以看出，RM 算法需要计算 $2L - 2 = 18$ 个根，正确根位于单位圆附近且成对出现；RMN 算法需计算 $L - 1 = 9$ 个根，正确根位于单位圆附近；而本文所提算法只需计算 $M = 1$ 个根，可以较为精确地估计出目标的 DOA，且不会出现多余错误的 DOA 估计值。

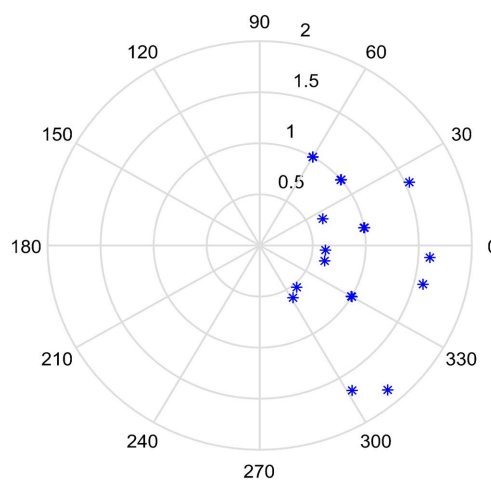




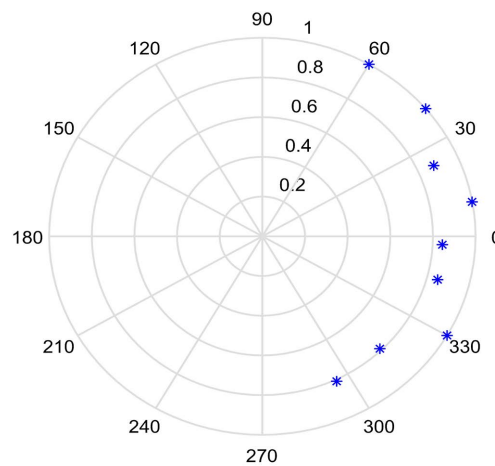
(c)

Figure 2. DOA estimated results with $SNR = 15$ dB of three algorithms for the one signal. (a) RM algorithm; (b) RMN algorithm; (c) The proposed algorithm

图 2. $SNR = 15$ dB 时, 三种算法对单个信号的 DOA 估计结果。(a) RM 算法; (b) RMN 算法; (c) 所提算法



(a)



(b)

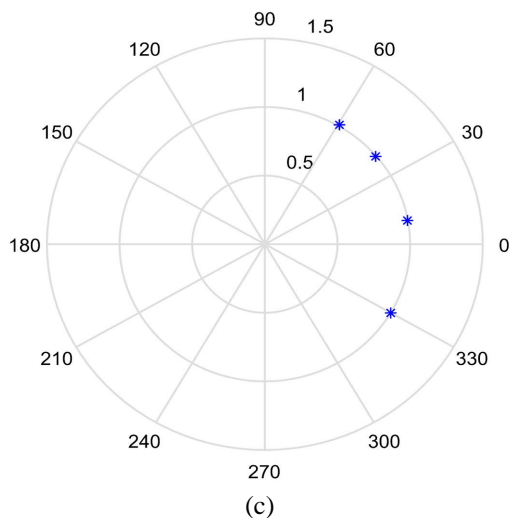


Figure 3. DOA estimated results with $SNR = 20$ dB of three algorithms for the one signal. (a) RM algorithm; (b) RMN algorithm; (c) The proposed algorithm

图 3. $SNR = 20$ dB 时，三种算法对单个信号的 DOA 估计结果。(a) RM 算法；(b) RMN 算法；(c) 所提算法

图 3 给出了信噪比 $SNR = 20$ dB 时，RM 算法、RMN 算法和所提算法对位于 -30° 、 10° 、 40° 、 60° 四个方向信号的 DOA 估计结果。同样从图中可以看出：RM 算法和 RMN 算法都会得到多余的根，而本文所提的算法有几个信号就计算多少个根，不会产生错误的 DOA 估计。因此，本文所提算法具有更高的计算效率。

图 4 则给出了估计的均方根误差 RMSE 随 SNR 的变化曲线，仿真曲线为 500 次蒙特卡罗实验统计结果。从图 3 可以看出：各种算法的 DOA 估计的均方根误差大小为 $RMSE$ (RM 算法) $<$ $RMSE$ (RMN 算法) $<$ $RMSE$ (所提算法) \approx $RMSE$ (文献[9]算法) $<$ $RMSE$ (文献[10]算法)。但是，总体来看，上述五种算法在信噪比较大时，都具有较好的 DOA 估计性能。

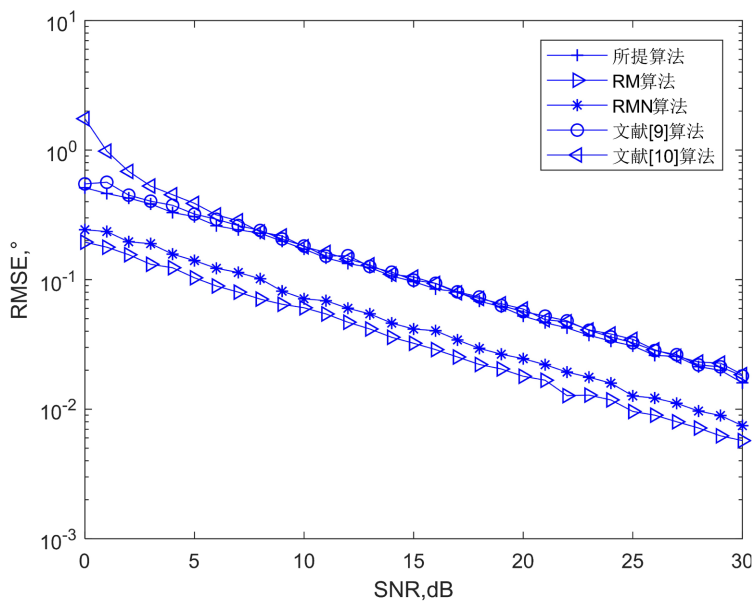


Figure 4. MSEs against SNR from 500 Monte Carlo simulations

图 4. 500 次蒙特卡罗仿真随信噪比变化曲线

5. 结论

为了降低多项式求根类算法的计算量, 本文提出了一种基于信号子空间的多项式求根算法。该算法不产生无关根, 且其所有多项式根都对应于所估计信号的 DOA。通过算法计算量分析, 可以看出: 所提算法的计算量与阵元数无关, 相比现有的多项式求根类算法, 该算法更适用于大型阵列的 DOA 估计。计算机仿真结果表明: 所提算法能够较为精确地估计出信号的 DOA, 且具有较好的角度估计性能。

基金项目

本文工作获得陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2023-JC-YB-553, 2023-JC-YB-491)资助。

参考文献

- [1] Qiu, S., Ma, X.F., Zhang, R.Y., *et al.* (2023) A Dual-Resolution Unitary ESPRIT Method for DOA Estimation Based on Sparse Co-prime MIMO Radar. *Signal Processing*, **202**, Article ID: 108753. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2022.108753>
- [2] Wu, Y.F., Wakin, M.B. and Gerstoft, P. (2023) Gridless DOA Estimation with Multiple Frequencies. *IEEE Transactions Signal Processing*, **71**, 417-432. <https://doi.org/10.1109/TSP.2023.3244091>
- [3] 饶伟, 贾凤勤, 李旦. 有色噪声下不相关和相干混合信号的 DOA 估计[J]. *电子学报*, 2023, 51(3): 622-631.
- [4] Qu, X.H., Lou, Y., Zhao, Y.J., *et al.* (2022) Augmented Tensor MUSIC for DOA Estimation Using Nested Acoustic Vector-Sensor Array. *IEEE Signal Processing Letter*, **29**, 1624-1628. <https://doi.org/10.1109/LSP.2022.3191254>
- [5] Wang, Z.S., Li, Q.S., Zhang, X.L., *et al.* (2022) Toeplitz Cyclic-MUSIC Algorithms for DOA Estimation of the SOCS Correlated Signals. *IEEE Sensors Letter*, **6**, 1-4. <https://doi.org/10.1109/LENS.2022.3213842>
- [6] Liu, A.F., Yang, D.S., Shi, S.G., *et al.* (2019) Augmented Subspace MUSIC Method for DOA Estimation Using Acoustic Vector Sensor Array. *IET Radar, Sonar & Navigation*, **13**, 969-975. <https://doi.org/10.1049/iet-rsn.2018.5440>
- [7] Liu, X.J., Liu, C.F. and Liao, G.S. (2009) Polynomial Coefficient Finding for Root-MUSIC. *Journal of Electronics (China)*, **26**, 543-548. <https://doi.org/10.1007/s11767-009-0064-9>
- [8] Krim, H., Forster, P. and Proakis, J.G. (1992) Operator Approach to Performance Analysis of Root-MUSIC and Root-Min-Norm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **40**, 1687-1696. <https://doi.org/10.1109/78.143441>
- [9] Ren, Q.S. and Willis, A.J. (1997) Fast Root MUSIC Algorithm. *IET Electronics Letters*, **33**, 450-451. <https://doi.org/10.1049/el:19970272>
- [10] Wasylkiwskyj, W. and Kopriva, I. (2009) Second and Fourth Order Statistics-Based Reduced Polynomial Rooting Direction Finding Algorithms. *Signal Processing*, **89**, 1050-1060. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2008.12.004>