

Drought Characteristics Analysis Using Copulas*

Lu Chen^{1,2}, Shenglian Guo¹, Baowei Yan², Tianyuan Li¹

¹State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan
²College of Hydropower and Information Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan
Email: chl8505@126.com

Received: Mar. 8th, 2012; revised: Mar. 28th, 2012; accepted: Apr. 7th, 2012

Abstract: Droughts are of great importance in the planning and management of water resources. This study proposed a new model for analyzing the characteristics of droughts based on copula functions and Standardized Precipitation Index (SPI). First, M years of daily rainfall data were simulated for evaluating drought characteristics. Second, drought characteristics, namely, drought duration, severity, interval time and minimum SPI values, were introduced and determined in this model. Then, several copulas, including symmetric and asymmetric Archimedean and meta-elliptical copulas were applied to construct four-dimensional joint distributions. Drought probabilities and return period were calculated and analyzed based on a four-dimensional copula using the upper Han River basin, China, as a study area. The results show that compared with the current methods, the four-dimensional joint distribution considering more variables can reveal the real characteristics of droughts. The analysis results can provide technique support for the well-known South-to-North Water Diversion Project (SNWDP) in China.

Keywords: Drought Characteristics; Multivariate Distribution; Standardized Precipitation Index; Copula Function

基于 Copula 函数的干旱特征分析*

陈璐^{1,2}, 郭生练¹, 闫宝伟², 李天元¹

¹武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 武汉
²华中科技大学水电与数字化工程学院, 武汉
Email: chl8505@126.com

收稿日期: 2012年3月8日; 修回日期: 2012年3月28日; 录用日期: 2012年4月7日

摘要: 研究干旱事件有利于水资源的规划和管理。本文以标准降水指数 SPI 作为干旱指标, 基于 Copula 函数, 提出了一种新的干旱分析模型。该模型首先生成 M 年的日降雨数据, 首次采用干旱历时、干旱程度、最小 SPI 值和干旱间隔时间来定义干旱事件, 引入四维对称和非对称型 Archimedean 和椭圆 Copula 函数构建多维联合分布; 最后依据联合重现期和条件重现期的计算公式, 分析了干旱事件的重现期, 并以汉江上游为例进行了应用研究。结果表明, 所提方法考虑了多个变量, 与现有方法相比, 能够更全面地反映干旱事件的真实特征; 本文的分析结果将为南水北调中线工程调度决策提供科学依据和技术支持。

关键词: 干旱特征; 多维联合分布; 标准化降水指数; Copula 函数

1. 引言

干旱是我国当前最为严峻的自然灾害和环境问题之一, 分析研究干旱频率, 有助于加强对干旱的预防和应急管理。对于一次干旱事件, 通常采用干旱历时和干旱程度两个变量来描述, 如 Shiau 和 Shen(2001)^[1]、

*基金项目: 国家自然科学基金(51079100, 51190094)。

作者简介: 陈璐(1985-), 女, 山东济南人, 博士研究生, 主要从事水文分析计算方面研究。

Bonaccorso 等(2003)^[2]、Kim 等(2003)^[3]、González 和 Valdés(2003)^[4]、Salas 等(2005)^[5]以及 Cancelliere 和 Salas(2010)^[6], 采用了不同的方法构建了干旱历时和干旱程度的联合分布。然而干旱事件还包括干旱间隔时间等多个相关变量, 两变量的分析结果不能全面刻画干旱事件的特征。因此, 需要结合多个特征变量综合分析干旱特征, 以保证研究结果的科学性和客观性。

目前, Copula 函数以及多变量的联合概率分析已在干旱频率研究中有所应用, 并取得一定进展^[7]。Copula 函数适合于构建任意边缘分布的联合分布, 具有灵活方便和应用范围广等特点, 近年来受到人们的重视^[8]。Shiau(2006)采用 Archimedean Copula 函数建立了干旱历时和干旱程度的联合分布^[9]。Song 和 Singh(2010)采用 Plackett Copula 构造了干旱历时、干旱程度和干旱间隔时间的联合分布, 并分析了重现期^[10]。

降水量是能够有效地反映干旱程度的指标, 基于降水量提出的降雨标准指数(SPI)已广泛的应用于干旱事件的研究中^[11]。本文以标准降水指数 SPI 作为干旱指标, 对干旱事件进行识别; 选择干旱历时、干旱程度、最小 SPI 值和干旱间隔时间作为研究变量, 拟采用椭圆 Copula 和 Archimedean Copula 构造四维联合概率分布, 以汉江上游为例, 分析研究干旱事件的联合重现期和条件重现期, 全面揭示干旱事件的特征。

2. 标准化降水指数

降水分布是一种偏态分布, 常用 Γ 分布来描述。

McKee 等(1993)将降水的 Γ 分布标准正态化, 得出标准降水指数(Standardized Precipitation Index, 简记 SPI)来量化多时间尺度的干旱特征^[12]。SPI 指标不仅考虑了降水服从偏态分布的实际, 而且进行了标准正态处理, 从而使其适合确定不同时间尺度的干旱监测和评价, 因此, 应用比较广泛。SPI 对应的干旱级别如表 1 所示。

3. 干旱事件的定义

Yevjevich(1967)最早应用游程理论对干旱事件进行描述和识别^[13]。Shiau(2006)将游程理论和 SPI 值相结合, 将 SPI 值小于 0 的月份视为干旱期^[9]。本文通过干旱程度、干旱历时、干旱间隔时间和最小 SPI 值来定义干旱事件, 具体如图 1 所示。

干旱历时 D_d 指 SPI 值连续小于 0 的月份数。干旱程度 S_d 为每次干旱事件 SPI 的累计和, 即 $S_d = \sum_{i=1}^D SPI_i$ 。

干旱间隔时间 L_d 指从本次干旱起始时刻至下次干旱开始时刻的间隔时间。最小 SPI 值 I_d 指在一次干旱事件中最小的 SPI 值, 表征了一次干旱事件峰值, 即最早时段的严重程度。

4. 联合分布的建立

假设随机变量 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的边缘分布函数分别为 $F_{X_i}(x) = P_{X_i}(X_i \leq x_i)$, 其中 n 为随机变量的个数, x_i 为随机变量 X_i 的值, 那么, 存在唯一的 Copula 函数使得^[14]:

Table 1. Drought classification based on SPI
表 1. SPI 值对应的干旱级别

干旱级别	极涝	大涝	中涝	正常	中旱	大旱	极旱
SPI 值	2.00 及以上	[1.50, 1.99]	[1.00, 1.49]	[-0.99, 0.99]	[-1, -1.49]	[-1.5, -1.99]	-2.00 及以下

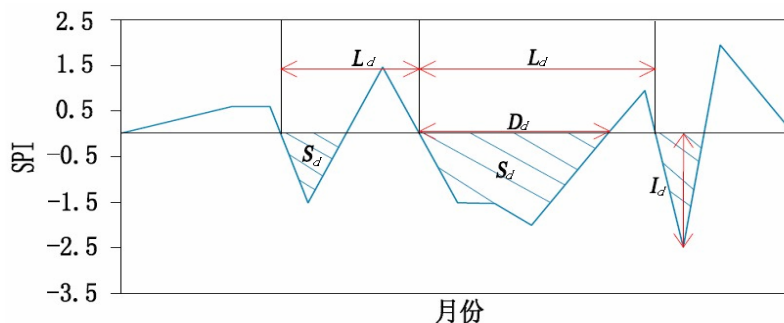


Figure 1. Definition sketch of drought events
图 1. 干旱事件示意图

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_{x_1}(x_1), F_{x_2}(x_2), \dots, F_{x_n}(x_n)) \quad (1)$$

$$= C(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

式中: $F_k(x_k) = u_k$, $k = 1, \dots, n$, u_k 在区间 $[0, 1]$ 上连续。

Archimedean 和椭圆 Copula 是两类重要的 Copula 函数, 在水文领域应用最为广泛。其中, Archimedean Copula 又可分为对称型和非对称型。常用的 Archimedean Copula 包括: Gumbel、Frank 和 Clayton Copula 函数; 常用的椭圆 Copula 函数包括正态和 t -Copula。

本文采用四维对称和非对称型 Archimedean Copula 函数以及椭圆 Copula 函数构造干旱历时、干旱程度、干旱间隔时间和最小 SPI 值的联合分布 H :

$$H(d_d, s_d, i_d, l_d) = C(D_d, S_d, I_d, L_d) \quad (2)$$

根据 AIC 准则选择合适的 Copula 函数, 分析干旱事件的概率。

5. 重现期分析

在水文分析中, 确定某一稀遇事件或特大灾害发生的概率, 具有十分重要的现实意义。工程中常用重现期来度量风险的大小。然而, 联合重现期、条件重现期等重要的概念, 却并没有被很好地理解和应用于干旱的多变量频率分析中^[15]。下面给出干旱事件了单变量重现期、多变量重现期和条件重现期的计算公式。

干旱事件单变量的重现期可通过下式进行计算:

$$T_D = \frac{E(L_d)}{1 - F_{D_d}(d)}; T_S = \frac{E(L_d)}{1 - F_{S_d}(s)}; T_I = \frac{E(L_d)}{1 - F_{I_d}(i)} \quad (3)$$

式中: T_D 、 T_S 和 T_I 分别为干旱历时、干旱程度和最小 SPI 值的重现期; $F_{D_d}(d)$ 、 $F_{S_d}(s)$ 和 $F_{I_d}(i)$ 分别为干旱历时、干旱强度和最小 SPI 值的分布函数。

干旱事件 $E_{x,y}^{\wedge} = \{X > x\} \wedge \{Y > y\}$, 其重现期为 T_{and} , 表征了两变量同时超过某一特定值的情况, T_{and} 的表达式为:

$$T_{\text{and}} = \frac{E(L_d)}{P(X_i \geq x_i, X_j \geq x_j)} \quad (4)$$

$$= \frac{E(L_d)}{1 - F(x_i) - F(x_j) + F(x_i, x_j)}$$

干旱事件 $E_x^{\vee} = \{X > x\} \vee \{Y > y\}$, 其重现期为

T_{or} , 表征了变量 x 或者 y , 或者 x 和 y 同时超过某一值得情况($X > x$, 或者 $Y > y$, 或者 $X > x, Y > y$), T_{or} 的表达式为:

$$T_{\text{or}} = \frac{E(L_d)}{P(X_i \geq x_i \text{ or } X_j \geq x_j)} = \frac{E(L_d)}{1 - F(x_i, x_j)} \quad (5)$$

将两变量的情形推广至三变量, 三变量的联合重现期 T_{and} 和 T_{or} 为:

$$T_{\text{and}} = \frac{E(L_d)}{P(X_i \geq x_i, X_j \geq x_j, X_k \geq x_k)}$$

$$= E(L_d) / \left((1 - F(x_i) - F(x_j) - F(x_k) + F(x_i, x_j) + F(x_i, x_k) + F(x_j, x_k) - F(x_i, x_j, x_k)) \right) \quad (6)$$

$$T_{\text{or}} = \frac{E(L_d)}{P(X_i \geq x_i \text{ or } X_j \geq x_j \text{ or } X_k \geq x_k)}$$

$$= \frac{E(L_d)}{1 - F(F(x_i), F(x_j), F(x_k))} \quad (7)$$

根据单变量和联合重现期的推导方法, 同样可得到条件重现期的公式。Shiau(2006)定义了两变量干旱事件的条件重现期^[9]:

$$T_{x_i|x_j} = \frac{E(L_d)}{(1 - F_{x_j}(x_j)) \left((1 - F_{x_i}(x_i) - F_{x_j}(x_j) + F(x_i, x_j)) \right)} \quad (8)$$

式中: $T_{x_i|x_j}$ 为在给定变量 $X_j \geq x_j$ 时, x_i 的重现期。

6. 应用研究

汉江是长江中下游最大的支流, 发源于秦岭南麓, 干流经陕西、湖北两省, 于武汉市汇入长江, 全长 1570 余 km, 流域面积 15.9 万 km²。汉江流域位于我国南北地理和气候分区的交界区域, 上游还是我国著名的华西秋雨区, 其气候特征既与南北方特征有关, 又具有自己的独特之处。此外, 汉江流域在我国防洪和供水等方面具有十分重要的地位, 丹江口水库是南水北调中线工程的水源地, 江汉平原同时也是我国主要的商品粮生产基地之一。本世纪以来, 汉江流域干旱, 对流域的生态环境、水资源合理配置和供水等各方面带来了巨大的影响。分析汉江流域的干旱特征, 对确保南水北调中线工程的顺利实施, 实现水资

源优化配置均具有重大意义, 因此本章以汉江流域为研究对象。

研究区域主要针对汉江上游, 采用汉江上游略阳、佛坪、石泉、镇安、万源、商州、安康、西峡及汉中共 9 个站 1961~2000 年的日降雨资料参与计算。采用算术平均法计算研究区域的面雨量。

6.1. 降雨模拟

一次干旱事件通常持续数月, 极端的干旱事件也可以持续数年, 而实测数据往往只有几十年。较短的实测样本序列, 不可避免地为评估干旱事件的概率带来误差, 导致不能够完全地了解干旱事件的特点^[16]。

因此, 本研究基于降雨模拟的方法, 生成 500 年的日降雨序列。采用三阶的马尔科夫模型模拟降雨的发生, 应用两参数的 Gamma 分布模拟降雨量^[17]。为了检验降雨模拟模型的效果, 生成与实测长度相等的模拟数据, 计算两组数据的均值和标准差, 并给出两者的相对误差和绝对误差, 计算结果列于表 2。结果表明均值的最大绝对误差为 0.1 mm, 其对应的相对误差为 4.65%。标准差的相对误差小于 10%。可知, 累计月降雨量曲线形状以及累积值基本相同。因此, 模拟数据可以用于干旱的分析。根据生成的日降雨数据, 计算不同时间尺度的 SPI 值, 计算结果如图 2 所示。采用时间尺度为 1 月的 SPI 值参与以下计算。

Table 2. Comparison of statistical variables between historical and synthetic data
表 2. 实测和模拟数据特征值比较

站点	均值				标准差			
	实测	模拟	绝对误差	相对误差(%)	实测	模拟	绝对误差	相对误差(%)
安康	2.20	2.20	0.00	0.00	5.42	5.13	0.29	5.35
佛坪	1.88	1.89	0.01	0.53	4.63	4.53	0.10	2.16
汉中	2.35	2.35	0.00	0.00	5.63	5.38	0.25	4.44
略阳	2.17	2.16	0.01	0.46	5.14	4.76	0.38	7.39
商州	1.88	1.80	0.08	4.26	4.63	4.32	0.31	6.70
石泉	2.42	2.42	0.00	0.00	5.88	5.51	0.37	6.29
万源	3.37	3.31	0.06	1.78	8.09	7.36	0.73	9.02
西峡	2.36	2.35	0.01	0.42	6.02	5.65	0.37	6.15
镇安	2.15	2.05	0.10	4.65	5.05	4.69	0.36	7.13

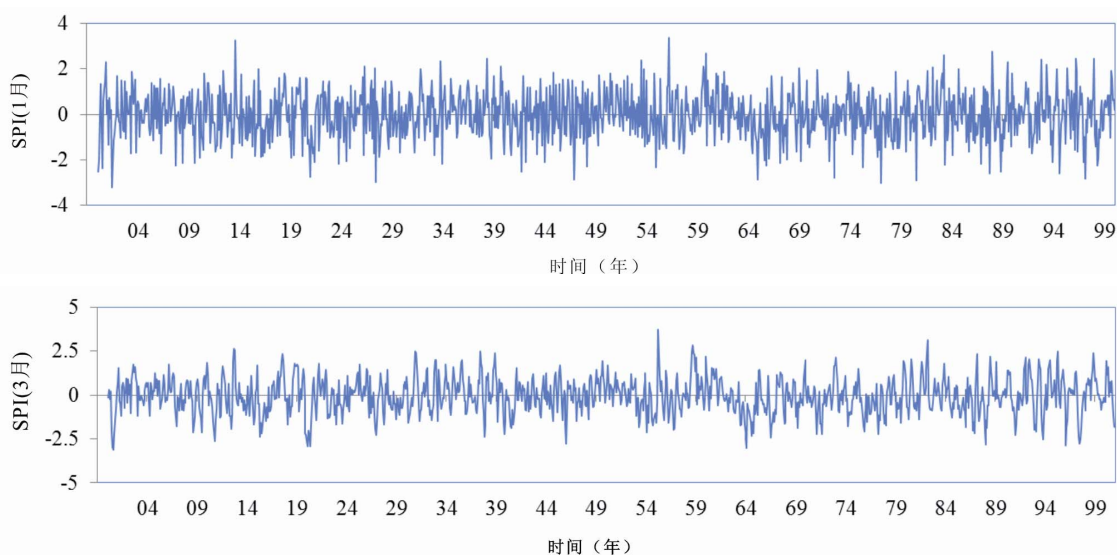


Figure 2. SPI values with different time scales
图 2. 不同时间尺度的 SPI 值

6.2. 相关性分析

采用 Pearson 和 Kendall 相关系数计算四个干旱变量的两两相关性, 结果列于表 3。结果表明, 变量呈现出明显的正相关特性; 其中, 干旱程度和干旱历时、干旱程度和最小 SPI 的相关程度较高。

6.3. 边缘分布的建立

采用指数分布、Gamma 分布、皮尔逊三型分布

(P-III)、GP(Generalized Pareto)分布和广义极值分布来拟合干旱历时、干旱程度、干旱间隔时间和最小 SPI 值, 应用线性矩法估计参数^[18], 计算各分布理论值和实测值的均方根误差(RMSE), 选择最小 RMSE 值对应的分布参与计算。最后, 选用 P-III 分布拟合干旱程度, GP 分布拟合最小 SPI 值, Gamma 分布拟合干旱历时和干旱间隔事件。实测值和理论分布的拟合结果如图 3 所示, 结果表明拟合效果较好。

Table 3. List of Pearson and Kendall correlation coefficients of draught events (SPI < 0)
表 3. 干旱事件变量的 Pearson 和 Kendall 相关系数(SPI < 0)

相关系数	干旱历时	干旱程度	最小 SPI	间隔时间
干旱历时	1.00	0.59	0.34	0.60
干旱程度	0.82	1.00	0.77	0.37
最小 SPI	0.42	0.78	1.00	0.21
间隔时间	0.71	0.59	0.27	1.00

注: 矩阵对角线上方元素为 Kendall 相关系数; 下方元素为 Pearson 线性相关系数。

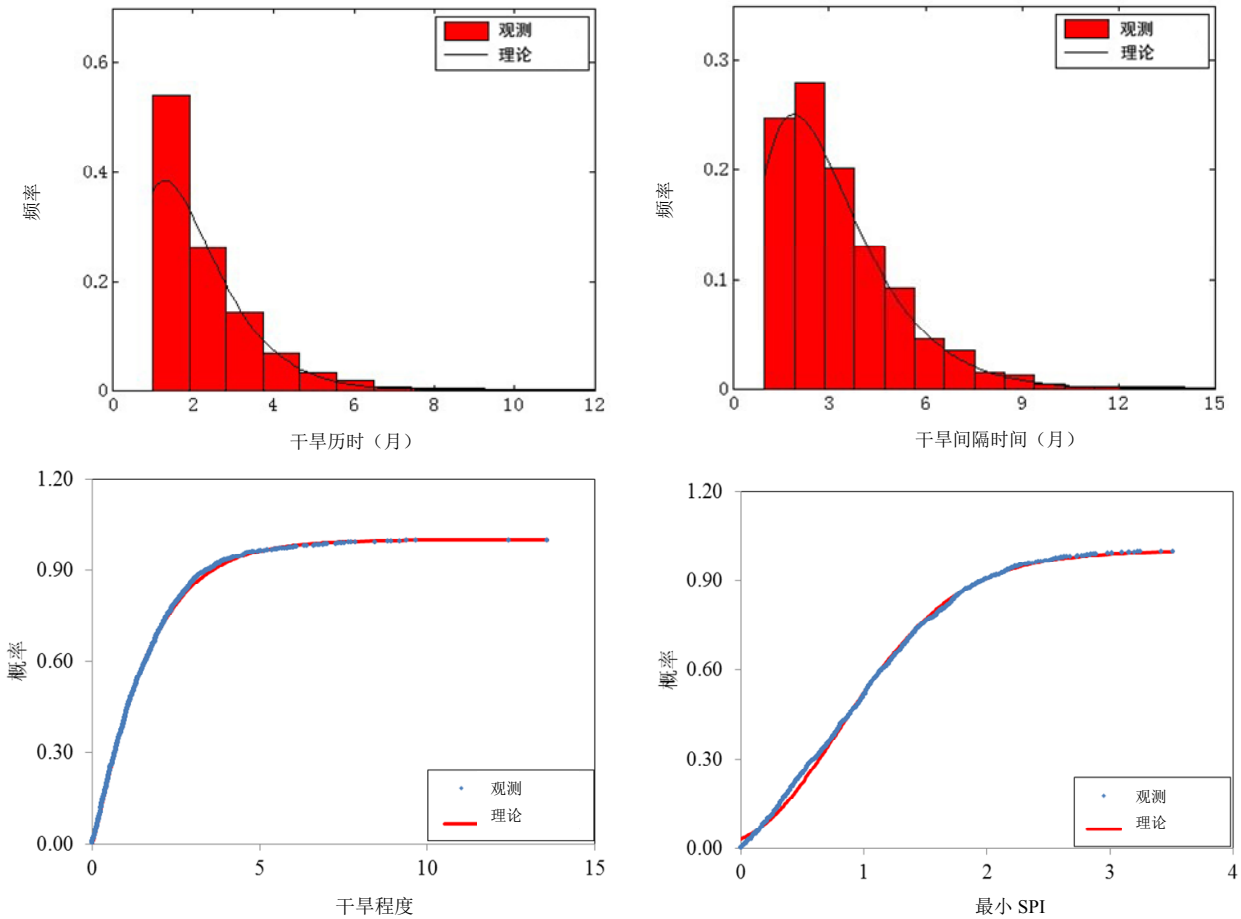


Figure 3. Frequency curves of marginal distribution
图 3. 理论分布和实测频率拟合图

6.4. 联合分布的建立

四维的对称和非对称型 Archimedean Copula 和椭圆 Copula 函数用于模拟干旱变量的相关性结构。采用 Archimedean Copula 簇中的 Gumbel、Frank 和 Clayton Copula, 以及椭圆 Copula 簇中的正态和 t -Copula 建立联合分布函数。应用极大似然法估计 Copula 函数的参数, 结果列于表 4、表 5。计算理论 Copula 函数和经

验 Copula 函数的均方根误差(RMSE)。基于 RMSE 值, 计算 AIC 值, 计算结果列于表 6。结果表明, 非对称型的 Archimedean Copula 函数拟合效果要明显优于对称型; 椭圆 Copula 函数的拟合效果优于 Archimedean Copula。选择 AIC 值最小的正态 Copula 函数参与计算。图 4 给出了正态 Copula 函数经验值和理论值的拟合图, 两者的拟合效果较好。

Table 4. Estimated parameters of symmetric and asymmetric Archimedean Copulas
表 4. 对称及非对称 Archimedean Copula 函数参数估计值

Archimedean copula	对称	非对称		
	θ	θ_1	θ_2	θ_3
Gumbel	1.66	1.40	1.40	2.80
Frank	4.62	3.38	3.38	12.50
Clayton	1.27	0.54	0.55	6.78

Table 5. Estimated parameters of elliptical Copulas
表 5. 椭圆 Copula 函数的参数估计值

Elliptical copula	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	v
正态	0.92	0.73	0.50	0.45	0.30	0.70	
t -copula	0.88	0.59	0.51	0.32	0.26	0.79	18.95

Table 6. RMSE and AIC values of different Copula functions
表 6. 不同 Copula 函数的 RMSE 和 AIC 值

指标	Archimedean Copula						椭圆 Copula	
	Gumbel		Frank		Clayton		正态	t
	A	B	A	B	A	B		
RMSE	0.048	0.028	0.031	0.022	0.052	0.049	0.013	0.022
AIC	-8897	-10,482	-10,179	-11,189	-8662	-8841	-12,721	-11,177

注: A 指对称型 Archimedean Copula; B 指非对称型 Archimedean Copula。

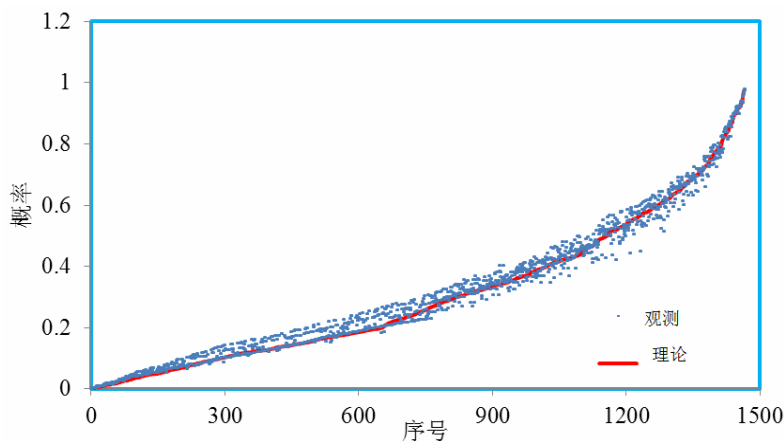


Figure 4. Fitting curves of observed and theoretical joint probabilities
图 4. 经验与理论 Copula 函数拟合图

6.5. 干旱概率分析

表 7 给出了干旱事件

$E = \{D_d \leq d_d, S_d \leq s_d, I_d \leq i_d, L_d \leq l_d\}$ 的联合概率值。以边缘概率分布函数 $F(x)$ 等于 0.7 为例, 对应的干旱历时、干旱程度、最小 SPI 值以及干旱间隔事件值为 1.98, 1.40, 2.49 和 3.76; 该事件 E 的联合概率为 0.46。应用所建模型, 可得到任意干旱事件的概率。联合概率值伴随着边缘分布概率值的增长而增长, 由此可知, 计算结果是合理的。

在给定干旱间隔时间 $L_d \leq l_d$ 的条件下, 事件 $E = \{D_d \leq d_d, S_d \leq s_d, I_d \leq i_d\}$ 的条件概率为:

$$P(D_d \leq d_d, S_d \leq s_d, I_d \leq i_d | L_d \leq l_d) = \frac{P(D_d \leq d_d, S_d \leq s_d, I_d \leq i_d, L_d \leq l_d)}{P(L_d \leq l_d)} \quad (9)$$

基于式(9)计算干旱事件的条件概率, 计算结果列于表 7。当 $F(x)$ 等于 0.99 时, 对应的干旱历时、干旱程度、最小 SPI 值和干旱间隔时间的值分别为 6.84, 2.57, 6.24 和 9.55; 给定 $L_d \leq l_d$ 时, 事件 $E = \{D_d \leq d_d, S_d \leq s_d, I_d \leq i_d\}$ 的条件概率为 0.98。

6.6. 重现期分析

首先, 分析干旱事件的单变量重现期。经计算, 干旱间隔时间的期望等于 3.09。表 8 给出了当重现期 T 等于 5, 10, 20, 50 和 100 时, 计算得到的干旱变量的特征值。其次, 分析干旱事件的联合重现期。联合重现期与边缘分布和联合分布的概率有关。表 8 给出了变量的边缘概率及联合概率, 以及在此基础上根据联合重现期公式计算得到的二维、三维联合重现期 T_{and} 和 T_{or} 。结果表明, 单变量的重现期大于两变量的

Table 7. Results of joint and conditional distributions
表 7. 联合概率和条件概率分析结果

$F(x)$	D_d	S_d	I_d	L_d	联合概率	条件概率
0.1	0.25	0.24	0.65	0.95	0.01	0.14
0.3	0.68	0.57	1.22	1.82	0.10	0.33
0.5	1.21	0.95	1.78	2.67	0.25	0.49
0.7	1.98	1.40	2.49	3.76	0.46	0.66
0.9	3.58	2.03	3.81	5.78	0.78	0.86
0.99	6.84	2.57	6.24	9.55	0.97	0.98

Table 8. Return periods (years) of drought events E
表 8. 干旱事件的重现期分析

T		5	10	20	50	100
$F(x)$		0.38	0.69	0.85	0.94	0.97
D_d		1.44	2.45	3.31	4.34	5.08
S_d		0.88	1.94	2.95	4.27	5.25
I_d		0.72	1.38	1.83	2.21	2.39
$S_d > s_d, I_d > i_d$	$F(x,y)$	0.32	0.63	0.81	0.92	0.96
	T_{and}	5.55	12.24	26.51	72.66	154.81
	T_{or}	4.55	8.45	16.06	38.11	73.85
$D_d > d_d, S_d > s_d$	$F(x,y)$	0.27	0.59	0.78	0.9	0.95
	T_{and}	6.13	15.15	36.39	113.35	265.09
	T_{or}	4.22	7.46	13.79	32.07	61.62
$D_d > d_d, I_d > i_d$	$F(x,y)$	0.21	0.54	0.75	0.89	0.94
	T_{and}	6.85	19.8	55.47	211.55	576.19
	T_{or}	3.94	6.69	12.2	28.35	54.75
$D_d > d_d, S_d > s_d, I_d > i_d$	$F(x,y,z)$	0.21	0.53	0.74	0.88	0.94
	T_{and}	6.95	19.99	55.84	216.57	594.73
	T_{or}	3.92	6.59	11.81	26.81	50.73

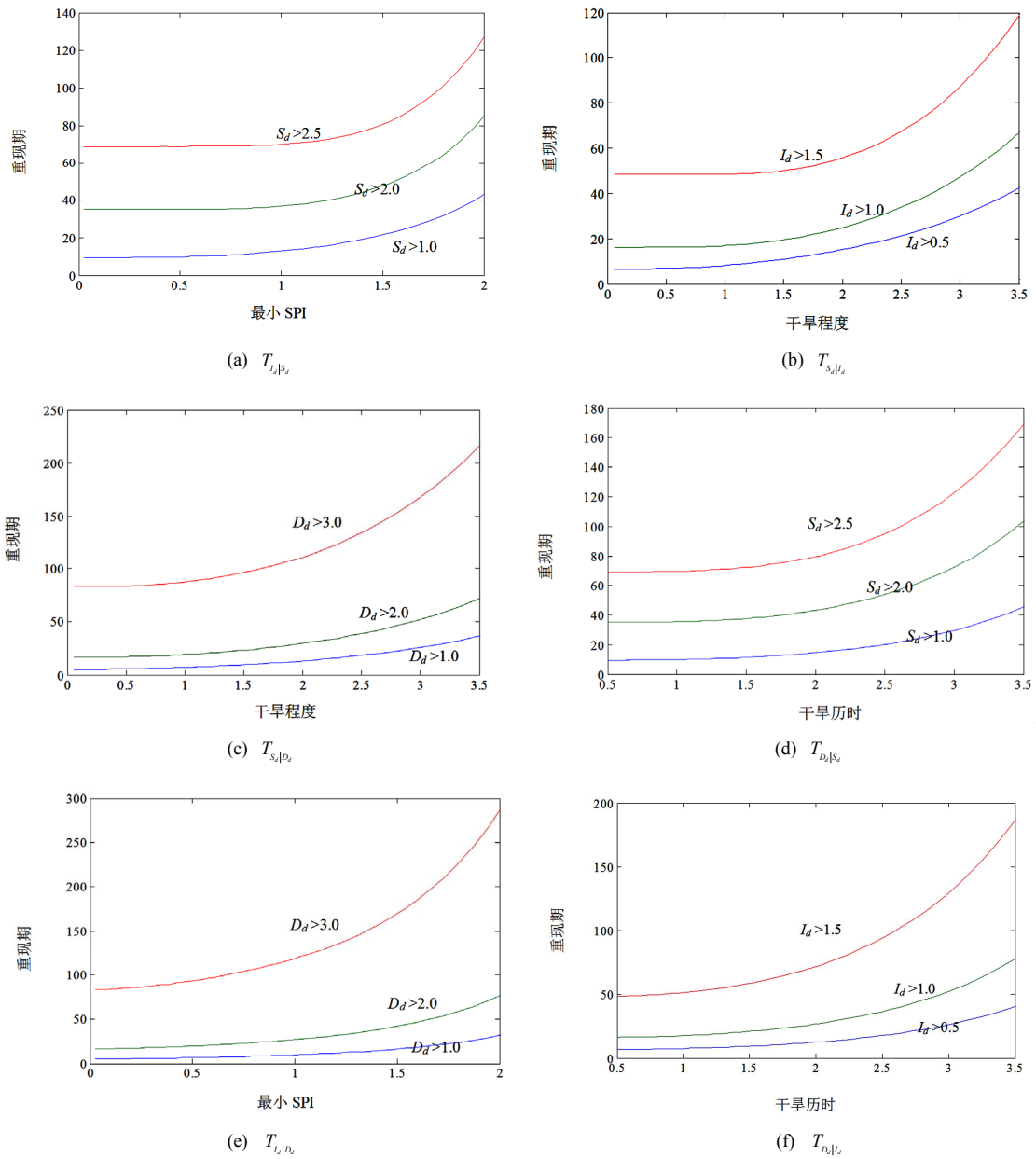


Figure 5. Conditional return periods of drought events
图 5. 干旱事件的条件重现期

联合重现期 T_{or} , 小于联合重现期 T_{and} 。三变量的联合重现期介于联合重现期 T_{or} 和 T_{and} 之间, 大于 T_{and} , 小于 T_{or} 。

采用式(8)计算条件重现期, 干旱历时、干旱程度和最小 SPI 值的条件重现期如图 5 所示。可知, 当干旱变量值增长时, 相应的条件重现期的值也在增加。

7. 结论

以 SPI 作为干旱指标, 采用干旱历时、干旱程度、

最小 SPI 值以及干旱间隔时间定义干旱事件。通过 Archimedean 和椭圆 Copula 函数构造了四个变量的联合分布, 选用 AIC 值最小的 Copula 函数分析干旱事件的概率, 计算了 $SPI < 0$ 的干旱事件联合重现期和条件重现期。汉江上游的分析结果表明, 联合分布考虑了多个变量, 因此能够更全面地反映干旱的真实特征; 正态 Copula 函数可用于分析各级别的干旱事件。汉江上游作为南水北调中线工程的水源地, 干旱缺水将直接影响工程的正常运行, 该研究结果将为南

水北调中线工程调度决策提供科学依据和技术支持。

参考文献 (References)

- [1] SHIAU, J. T., SHEN, H. W. Recurrence analysis of hydrologic droughts of differing severity. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 2001, 127(1): 30-40.
- [2] BONACCORSO, B., CANCELLIERE, A. and ROSSI, G. An analytical formulation of return period of drought severity. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 2003, 17(3): 157-174.
- [3] KIM, T. W., VALDÉS, J. B. and YOO, C. Nonparametric approach for estimating return periods of droughts in arid regions. *Journal of Hydrological Engineering*, 2003, 8(5): 237-246.
- [4] GONZÁLEZ, J., VALDÉS, J. B. Bivariate drought recurrence analysis using tree ring reconstructions. *Journal of Hydrological Engineering*, 2003, 8(5): 247-258.
- [5] SALAS, J. D., FU, C., CANCELLIERE, A., et al. Characterizing the severity and risk of drought in the Poudre River, Colorado. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 2005, 131(5): 383-393.
- [6] CANCELLIERE, A., SALAS, J. D. Drought probabilities and return period for annual stream flow series. *Journal of Hydrology*, 2010, 391(1-2): 77-89.
- [7] 周玉良, 袁潇晨, 金菊良, 等. 基于 Copula 的区域水文干旱频率分析[J]. *地理科学*, 2011, 11: 1383-1388.
ZHOU Yu-liang, YUAN Xiao-chen, JIN Jun-liang, et al. Regional hydrological drought frequency based on copulas. *Scientia Geographica Sinica*, 2011, 11: 1383-1388. (in Chinese)
- [8] 郭生练, 闫宝伟, 肖义, 等. Copula 函数在多变量水文分析计算中的应用及研究进展[J]. *水文*, 2008, 3: 1-7.
GUO Sheng-lian, YAN Bao-wei, XIAO Yi, et al. Multivariate hydrological analysis and estimation. *Journal of China Hydrology*, 2008, 3: 1-7. (in Chinese)
- [9] SHIAU, J. T. Fitting drought duration and severity with two-dimensional copulas. *Water Resources Management*, 2006, 20(5): 795-815.
- [10] SONG, S. B., SINGH, V. P. Frequency analysis of droughts using the Plackett copula and parameter estimation by genetic algorithm. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 2010, 24(5): 783-805.
- [11] MISHRA, A. K., SINGH, V. P. A review of drought concepts. *Journal of Hydrology*, 2010, 391(1-2): 202-216.
- [12] MCKEE, T. B., DOESKEN, N. J. and KLIEST, J. The relationship of drought frequency duration to time scales. *American Meteorological Society, Proceedings of the 8th Conference of Applied Climatology*, Anaheim, 1993: 179-184.
- [13] YEVJEVICH, V. Hydrology paper. Fort Collins: Colorado State University Press, 1967.
- [14] NELSON, R. B. An introduction to copulas, second edition. New York: Springer-Verlag, 2006.
- [15] SALVADORI, G., DE MICHELE, C., KOTTEGODA, N., et al. Extremes in nature: An approach using copulas. Berlin: Springer, 2007.
- [16] MISHRA, A., SINGH, V. P. and DESAI, V. Drought characterization: A probabilistic approach. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 2009, 23(1): 41-55.
- [17] CHEN, J., BRISSETTE, F. P. and LCONTE, R. A daily stochastic weather generator for preserving low-frequency of climate variability. *Journal of Hydrology*, 2010, 388(3-4): 480-490.
- [18] HOSKING, J. R. M., WALLIS, J. R. Regional frequency analysis: An approach based on l-moments. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.