

# Estimation of GEV Distribution Parameters by Higher Probability Weighted Moments\*

Ling Xiao, Songbai Song<sup>#</sup>

College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A&F University, Yangling  
Email: lindasun1988@163.com, <sup>#</sup>ssb6533@nwsuaf.edu.cn

Received: Jul. 2<sup>nd</sup>, 2012; revised: Jul. 17<sup>th</sup>, 2012; accepted: Jul. 29<sup>th</sup>, 2012

**Abstract:** When an annual maximum flow series is displayed in a probability plot for the analysis of flood frequency, the data often exhibit two or more distinct segments. For estimating floods of large return periods, it is probably extrapolated by the trend of large and medium-sized flood values. The principle of higher probability weighted moments (HPWMS) was employed to estimate parameters of generalized extreme value (GEV) distribution. The results show that the higher the order are, the better fitting of the GEV distribution to annual maximum flows in larger segments. The Monte Carlo simulations also show that moderate order of HPWMS may reduce the estimation errors rather than higher order, and conversely, over-higher orders may increase the estimation errors.

**Keywords:** GEV Distribution; Probability Weighted Moments; Parameter Estimation; Monte Carlo Simulation

## 应用高阶概率权重矩法估计广义极值分布参数\*

肖 玲, 宋松柏<sup>#</sup>

西北农林科技大学, 水利与建筑工程学院, 杨凌  
Email: lindasun1988@163.com, <sup>#</sup>ssb6533@nwsuaf.edu.cn

收稿日期: 2012年7月2日; 修回日期: 2012年7月17日; 录用日期: 2012年7月29日

**摘 要:** 在洪水频率分析计算中, 当点绘年最大洪峰流量序列的经验频率时, 经验点据常常出现两段或多段的分散区, 重现期较大的洪水估算一般是根据大中洪水值的趋势进行外推。本文根据高阶概率权重矩法原理和广义极值分布估算参数模型, 进行陕北地区神木水文测站的年最大洪峰流量频率分布参数计算。结果表明: 高阶概率权重矩法能赋予大洪水值更多的权重。蒙特卡洛模拟试验表明: 并非阶数越高越好, 适当提高阶数可以减小误差, 但阶数过高反而会增大误差。

**关键词:** 广义极值分布; 高阶概率权重矩; 参数估计; 蒙特卡洛模拟

### 1. 引言

水文频率分析是水利工程规划设计的重要依据。

\*基金项目: 国家自然科学基金(51179160, 50879070, 50579065); 高等学校博士学科点专项科研基金(20110204110017)。

<sup>#</sup>通讯作者。

作者简介: 肖玲(1987-), 女, 贵州大方, 硕士研究生, 主要从事水量转化与调控研究。

一个测站的年最大洪峰流量序列设计值的估算往往需要选用一个合理的分布函数来进行拟合计算, 然后, 应用该分布函数进行相应重现期的洪水设计值估算。因此, 分布模型选择尤为重要。目前, 国内外使用的单变量频率分布模型主要有指数分布类、Gamma

分布类、极值分布类、Wakeby 分布类和 Logistic 分布类<sup>[1]</sup>。

我国“水利水电工程设计洪水计算规范”一般推荐使用 P-III 型频率曲线, 但是, P-III 型分布曲线在  $C_s < 2C_v$  时, 其下限小于 0, 这显然不符合江河洪水极值不应为负值这一特征<sup>[2]</sup>。当  $C_s \geq 2C_v$  时, P-III 型分布曲线中下段变得平坦, 难以取得较好的拟合效果。另一种方法是应用极值分布理论, 分别采用极值 I 型(Gumbel)、极值 II 型(Fréchet)、极值 III 型(Weibull) 三种极值分布对水文气象极值序列进行拟合计算<sup>[3]</sup>。近年来, 许多学者采用广义极值分布(Generalized extreme value distribution, 简记为 GEV), 广泛地应用于水文气象极端事件研究领域<sup>[4]</sup>。

频率分析统计推断的精度除了取决于样本和选用的分布模型外, 模型参数估计方法对计算结果也具有较大的影响。参数估计常用的方法有矩法(MOM)、极大似然法(ML)、线性矩法(LM)、概率权重矩法(PWM)、权函数法和适线法等。20 世纪 90 年代 Wang Q. J. 博士提出了采用高阶概率权重矩洪水频率分布参数估计方法, 取得了较好的应用效果。目前, 我国尚未引入这一方法进行洪水频率分布参数估计。本文根据 Wang Q. J. 高阶概率权重矩方法, 以陕北地区神木水文测站的年最大洪水序列为例, 研究了高阶概率权重矩在推求 GEV 分布参数中的应用, 并对 GEV 分布参数的高阶与低阶概率权重矩法进行比较与评价, 探索研究高阶概率权重矩在我国洪水频率分布参数估计的普适性, 以期推求洪水频率分布参数估计提供合理的计算方法<sup>[5]</sup>。

## 2. 广义极值(GEV)分布

20 世纪 30 年代, Fisher 和 Tippett 证明极值具有渐进分布特性, 并概括了极值 I 型(Gumbel)、极值 II 型(Fréchet)和极值 III 型(Weibull) 3 种类型的极值分布模型<sup>[6]</sup>。Jenkinson、Coles 根据极值分布理论, 证明当极值的渐进分布存在且为非退化时, 可以将以上三种类型的极值分布合并为一个统一的三参数极值分布函数, 即广义极值分布<sup>[7,8]</sup>。

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为服从 GEV 分布的独立随机变量样本, 其分布函数表达式为:

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[1 - \frac{k}{\alpha}(x - \xi)\right]^{\frac{1}{k}}\right\}; & k \neq 0 \\ \exp\left\{-\exp\left[-\frac{1}{\alpha}(x - \xi)\right]\right\}; & k = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\xi$ 、 $\alpha$  和  $k$  分别为分布的位置、尺度和形状参数。当  $k \neq 0$  时,  $1 - \frac{k}{\alpha}(x - \xi) > 0$ 。当  $k \rightarrow 0$  时为极值 I 型; 当  $k < 0$  时为极值 II 型; 当  $k > 0$  时为极值 III 型。式(1)的逆函数形式为:

$$x(F) = \begin{cases} \xi + \frac{k}{\alpha} \left[1 - (-\ln F)^k\right]; & k \neq 0 \\ \xi - \alpha \ln(-\ln F); & k = 0 \end{cases} \quad (2)$$

## 3. 参数估计方法

### 3.1. 线性矩法

由于小样本参数的极大似然估计量是很不稳定的, Hosking 在 1990 年提出了线性矩法, 并在洪水频率分析中得到广泛的应用<sup>[9]</sup>。

给定样本容量为  $n$  的样本,  $x_{i:n}$  表示  $n$  个样本点中第  $i$  个由小到大排列值, 变量服从  $F(x) = P(X \leq x)$  分布, Hosking(1990)提出  $x_{i:n}$  的期望表示为:

$$E(X_{i:n}) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^1 x(F) F^{i-1} (1-F)^{n-i} dF \quad (3)$$

前四阶样本线性矩定义如下:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= E(X_{1,1}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} E(X_{2,2} - X_{1,2}), \\ \lambda_3 &= \frac{1}{3} E(X_{3,3} - 2X_{2,3} + X_{1,3}) \\ \lambda_4 &= \frac{1}{4} E(X_{4,4} - 3X_{3,4} + 3X_{2,4} - X_{1,4}) \end{aligned} \quad (4)$$

线性矩的偏态系数  $\tau_3$  和峭度  $\tau_4$  为

$$\tau_3 = \lambda_3 / \lambda_2, \quad \tau_4 = \lambda_4 / \lambda_2$$

### 3.2. 高阶概率权重矩法

#### 3.2.1. 高阶概率权重矩定义

Greenwood 等人于 1979 年提出概率权重矩法, 假定随机变量  $x$  的分布函数为  $F(x)$ , 则概率权重矩的定义为<sup>[10]</sup>:

$$M_{p,r,s} = \int_0^1 [x(F)]^p F^r (1-F)^s dF \quad (5)$$

式中:  $p, r, s$  为实数,  $x(F)$  为分布函数的反函数。当  $p=1, s=0$  时, 式(5)变为:

$$\beta_r = M_{1,r,0} = \int_0^1 x(F) F^r dF \quad (6)$$

式中:  $r = 0, 1, 2 \dots$  为概率权重矩的阶数,  $x(F)$  为分布函数的逆函数。从式(6)可以看出, 当概率权重矩的阶数增大时, 则会赋予大值  $x$  较多的权重。

理论上讲, 对于给定的分布函数, 都能求出其概率权重矩的分布参数的解析表达式。给定一长度为  $n$  的升序排列样本  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , 高阶概率权重矩的无偏估计量可通过式(7)来计算:

$$b_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)(i-2)\dots(i-r)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)} x_i \quad (7)$$

### 3.2.2. 广义极值分布的概率权重矩

根据式(5), Wang Q. J.推求了概率权重矩表达式<sup>[5]</sup>。

1) 当  $k \neq 0$  时, GEV 分布的概率权重矩为:

$$(r+1)\beta_r = \xi + \frac{\alpha}{k} \left[ 1 - \frac{\Gamma(k+1)}{(r+1)^k} \right]; k \neq 0 \quad (8)$$

式中:  $\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx$  为 gamma 函数。

2) 当  $k = 0$  时, GEV 分布的概率权重矩为:

$$(r+1)\beta_r = \xi + \alpha [\varepsilon + \ln(k+1)]; k = 0 \quad (9)$$

式中:  $\varepsilon = 0.5772156649 \dots$  为欧拉常数。

### 3.2.3. 广义极值分布参数表达式推求

由式(1)可知, GEV 分布函数中含有  $\xi, \alpha, k$  三个参数, 需要列出三个方程才能求解。令概率权重矩的阶数  $r = \eta, \eta+1, \eta+2$ , 有

1) 当  $k \neq 0$  时, 将  $r = \eta, \eta+1, \eta+2$  分别代入式(8), 有

$$(\eta+1)\beta_\eta = \xi + \frac{\alpha}{k} \left[ 1 - \frac{\Gamma(k+1)}{(\eta+1)^k} \right] \quad (10)$$

$$(\eta+2)\beta_{\eta+1} = \xi + \frac{\alpha}{k} \left[ 1 - \frac{\Gamma(k+1)}{(\eta+2)^k} \right] \quad (11)$$

$$(\eta+3)\beta_{\eta+2} = \xi + \frac{\alpha}{k} \left[ 1 - \frac{\Gamma(k+1)}{(\eta+3)^k} \right] \quad (12)$$

经过数学推导, 有

$$\begin{aligned} & \frac{(\eta+2)\beta_{\eta+1} - (\eta+1)\beta_\eta}{(\eta+3)\beta_{\eta+2} - (\eta+1)\beta_\eta} \\ &= \frac{(\eta+1)^{-k} - (\eta+2)^{-k}}{(\eta+1)^{-k} - (\eta+3)^{-k}}; k \neq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

2) 当  $k = 0$  时, 同理可得:

$$\begin{aligned} & \frac{(\eta+2)\beta_{\eta+1} - (\eta+1)\beta_\eta}{(\eta+3)\beta_{\eta+2} - (\eta+1)\beta_\eta} \\ &= \frac{\ln(\eta+2) - \ln(\eta+1)}{\ln(\eta+3) - \ln(\eta+1)}; k = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

上述式中 GEV 分布的样本概率权重矩  $\beta_\eta, \beta_{\eta+1}, \beta_{\eta+2}$  可用式(7)计算出的无偏估计量  $b_\eta, b_{\eta+1}, b_{\eta+2}$  代替, 采用适当的公式可求出参数  $k, \xi, \alpha$ 。由于没有给出  $k$  的直接表达式, 采用常规的迭代法计算量较大, 因此可采用计算机数值算法来求解。

重写式(13)有:

$$\begin{aligned} & \frac{(\eta+2)\beta_{\eta+1} - (\eta+1)\beta_\eta}{(\eta+3)\beta_{\eta+2} - (\eta+1)\beta_\eta} - \frac{\ln(\eta+2) - \ln(\eta+1)}{\ln(\eta+3) - \ln(\eta+1)} \\ &= \frac{(\eta+1)^{-k} - (\eta+2)^{-k}}{(\eta+1)^{-k} - (\eta+3)^{-k}} - \frac{\ln(\eta+2) - \ln(\eta+1)}{\ln(\eta+3) - \ln(\eta+1)} \end{aligned}$$

令上式右边为

$$z = \frac{(\eta+1)^{-k} - (\eta+2)^{-k}}{(\eta+1)^{-k} - (\eta+3)^{-k}} - \frac{\ln(\eta+2) - \ln(\eta+1)}{\ln(\eta+3) - \ln(\eta+1)} \quad (15)$$

给定  $\eta$  值, 可采用下式估算  $k$  值:

$$k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \quad (16)$$

设  $-0.5 \leq k \leq 0.5 (k \neq 0)$ , 分别给定  $r=1, 2, 3, r=2, 3, 4, r=3, 4, 5, r=4, 5, 6$ , 利用式(15)求出不同阶数对应的  $Z$  值, 并对  $Z$  和  $k$  的关系进行拟合。式(16)中的系数  $a_0, a_1, a_2$  随采用的阶数不同而不同, 计算结果见表 1。

通过式(15)计算出不同阶数对应的  $z$  值后, 结合表 1 中的各系数值, 代入式(16)中求出 GEV 分布的形状参数  $k$ 。将形状参数  $k$  值代入式(10)和式(11)中, 计算 GEV 分布的尺度参数  $\alpha$  和位置参数  $\xi$ 。

**Table 1. Coefficients  $a_0, a_1$  and  $a_2$  for Equation (16) and the absolute error based on different higher probability weighted moments**  
**表 1. 不同高阶概率权重矩下式(16)中系数  $a_0, a_1$  和  $a_2$  的取值及绝对值偏差统计表**

高阶概率权重矩阶数	$a_0$	$a_1$	$a_2$	绝对值偏差
$r = 0, 1, 2$	0.0000	7.8514	2.9388	0.0001
$r = 1, 2, 3$	0.0000	11.9038	2.7765	0.0001
$r = 2, 3, 4$	0.0000	15.9285	2.7266	0.0001
$r = 3, 4, 5$	0.0000	19.9431	2.7045	0.0001
$r = 4, 5, 6$	0.0000	23.9527	2.6927	0.0001

### 4. 实例应用

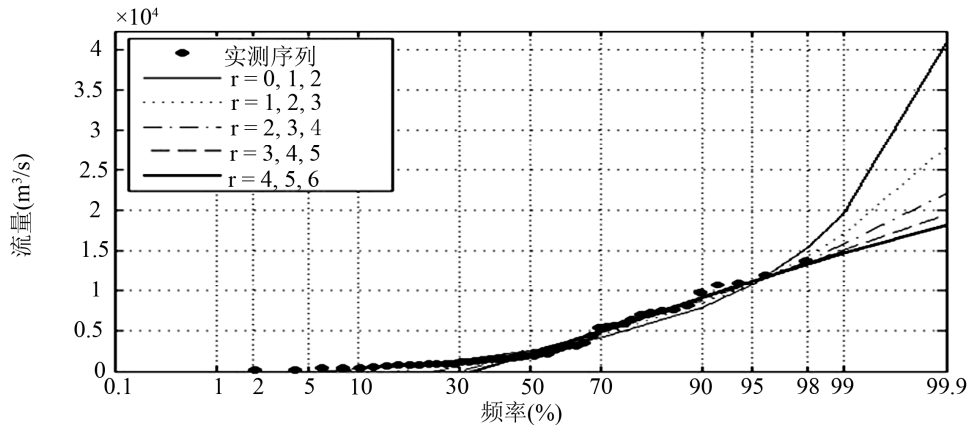
为了验证高阶概率权重矩法在洪水频率分析中的应用, 本文以陕北地区神木水文测站年最大洪峰序列为例, 应用高阶概率权重矩法, 进行 GEV 分布的参数估算研究。

#### 4.1. 基于高阶概率权重矩的 GEV 分布参数估计

选用 GEV 分布函数作为洪水频率分布模型, 利用前文中列出的公式, 用高阶概率权重矩法对不同阶数下 GEV 分布参数( $\xi, \alpha$  和  $k$ )进行估计。结果见表 2。

**Table 2. The estimated GEV distribution parameters of the Shenmu station based on higher probability weighted moments**  
**表 2. 基于高阶概率权重矩的神木测站 GEV 分布参数估计结果统计表**

阶数	$r = 0, 1, 2$	$r = 1, 2, 3$	$r = 2, 3, 4$	$r = 3, 4, 5$	$r = 4, 5, 6$
$\xi$	1792.725	1610.607	1249.462	819.2212	409.8953
神木 $\alpha$	1995.406	2725.943	3502.811	4241.023	4863.034
$k$	-0.2638	-0.0921	0.0425	0.1414	0.2091



**Figure 1. Fitting of the GEV distribution of different higher PWMs to annual maximum flows in the Shenmu station**  
**图 1. 神木站不同高阶概率权重矩下 GEV 分布曲线与年最大洪峰流量频率曲线拟合**

### 4.2. 不同高阶概率权重矩下 GEV 分布与经验点据拟合与分析

点绘出不同测站的年最大洪峰流量经验频率点据, 由表 2 中计算出来的参数, 代入式(1)中, 得到神木测站在不同阶数下 GEV 分布的分布值, 将之与经验点据进行拟合, 结果见图 1。

从图 1 可以看出, 所选的神木水文测站体现了运用高阶概率矩的优势, 随着概率权重矩阶数的提高, 其 GEV 分布曲线与年最大洪峰流量中的大洪水段点据拟合越好, 而与小洪水段点据拟合较差。在水利工程规划设计中, 较多的考虑大中洪水段对水利工程的影响, 说明高阶概率权重矩法具有很大的优势。

### 5. 蒙特卡洛模拟

在实际工作中, 对于已知的洪水资料, 其分布函数是未知的, 且常常异于所给出的已知分布。当选用一个已知分布模型进行计算时, 需要对其适用性进行分析。同样, 使用高阶概率权重矩法计算广义极值分布参数, 需要对高阶与低阶进行分析比较, 最终为分布模型参数计算选出合适的方法<sup>[5,11,12]</sup>。

**Table 3. Bias, SE and RMSE in  $x(F = 0.98)$  estimates from fitting the GEV distribution with Wakeby samples**  
**表 3. 基于 Wakeby 分布样本的广义极值分布在  $x(F = 0.98)$  时估计值的偏差、标准误差和均方根误差统计**

样本分布		WA-1	WA-2	WA-3	WA-4	WA-5
$r = 0, 1, 2$	Bias	0.9635	0.9513	1.0389	0.9443	1.0539
	SE	0.2806	0.2306	0.2440	0.1710	0.1922
	RMSE	1.0035	0.9788	1.0672	0.9596	1.0713
$r = 1, 2, 3$	Bias	0.9693	0.9743	1.0060	0.9849	1.0170
	SE	0.2762	0.2306	0.2435	0.1674	0.1890
	RMSE	1.0079	1.0012	1.0351	0.9990	1.0344
$r = 2, 3, 4$	Bias	0.9585	0.9770	0.9966	0.9886	1.0032
	SE	0.2687	0.2248	0.2490	0.1688	0.1896
	RMSE	0.9954	1.0025	1.0273	1.0029	1.0209
$r = 3, 4, 5$	Bias	0.9562	0.9731	0.9884	0.9820	1.0002
	SE	0.2728	0.2261	0.2456	0.1655	0.1887
	RMSE	0.9944	0.9990	1.0185	0.9959	1.0178
$r = 4, 5, 6$	Bias	0.9531	0.9694	0.9844	0.9766	0.9965
	SE	0.2715	0.2199	0.2404	0.1643	0.1899
	RMSE	0.9910	0.9941	1.0134	0.9904	1.0145

**Table 4. Bias, SE and RMSE in  $x(F = 0.99)$  estimates from fitting the GEV distribution with Wakeby samples**  
**表 4. 基于 Wakeby 分布样本的广义极值分布在  $x(F = 0.99)$  时估计值的偏差、标准误差和均方根误差统计**

样本分布		WA-1	WA-2	WA-3	WA-4	WA-5
$r = 0, 1, 2$	Bias	0.9715	0.9281	1.0739	0.9229	1.0897
	SE	0.3613	0.2824	0.3067	0.2115	0.2397
	RMSE	1.0365	0.9701	1.1169	0.9468	1.1157
$r = 1, 2, 3$	Bias	0.9917	0.9763	1.0184	0.9960	1.0281
	SE	0.3606	0.2973	0.3065	0.2192	0.2339
	RMSE	1.0552	1.0205	1.0636	1.0199	1.0544
$r = 2, 3, 4$	Bias	0.9749	0.9868	1.0039	1.0061	1.0065
	SE	0.3518	0.2959	0.3155	0.2229	0.2345
	RMSE	1.0364	1.0302	1.0524	1.0305	1.0335
$r = 3, 4, 5$	Bias	0.9679	0.9836	0.9923	0.9961	1.0026
	SE	0.3545	0.2948	0.3119	0.2184	0.2371
	RMSE	1.0307	1.0269	1.0402	1.0197	1.0303
$r = 4, 5, 6$	Bias	0.9592	0.9780	0.9871	0.9868	0.9988
	SE	0.3465	0.2858	0.3050	0.2154	0.2392
	RMSE	1.0198	1.0189	1.0332	1.0100	1.0270

蒙特卡洛模拟是对使用不同高阶概率权重矩法估计 GEV 分布参数时对分位数的影响进行分析讨论。利用 Wakeby 分布(5 参数)模型, 模拟  $N = 10,000$  组序列, 每组序列的长度  $n = 30^{[13]}$ 。利用模拟出来的序列计算不同高阶概率权重矩下 GEV 分布参数值, 并分别计算分位数  $x(F = 0.98)$  和  $x(F = 0.99)$  的偏差(Bias)、标准误差(SE)和均方根误差(RMSE), 结果统计如表 3

和表 4 所示。

从表 3 和表 4 可以看出, 基于 5 种 Wakeby 分布模拟的数据, 利用 GEV 分布函数估计出来的不同高阶概率权重矩下分位数  $x(F = 0.98)$  和  $x(F = 0.99)$  的偏差随着阶数的增大总体呈减小趋势, 而标准误差和均方根误差随着阶数的增大总体呈先减小后增大趋势。由此表明, 使用高阶概率权重矩法估算广义极值分布

的参数时, 可以适当的提高阶数, 但并不是阶数越高越好, 而要根据实际情况进行选择。

## 6. 结论

在水文频率分析计算中, 理论频率曲线是一条光滑的曲线, 但是实测点据通常会呈现两段或多段的分散区, 如果强行使用一条理论频率曲线来拟合所有的点据, 会产生复杂的组合频率曲线, 在估计重现期较大的洪水时会出现较大的偏差。因此可以通过赋予大中洪水段更多的权重, 从而得到更具有参考价值的大洪水设计值。

本文根据 Wang Q. J. 高阶概率权重矩法的 GEV 分布参数的计算公式, 通过对陕北地区神木水文测站的年最大洪峰流量资料进行分析, 表明随着概率权重矩阶数的提高, GEV 分布曲线与年最大洪峰流量中的大中洪水段点据拟合越好, 而与小洪水段点据拟合较差。另外, 本文进行了蒙特卡洛模拟(Monte Carlo simulations)分析, 分析结果显示, 使用高阶概率权重矩法估算广义极值分布的参数时, 可以适当的提高阶数, 但当阶数越高时, 其相应的误差也增大, 因此不能盲目的提高阶数。

高阶概率权重矩法与常用的低阶概率权重矩法相比并不复杂, 只要能写出分布函数的概率权重矩公式, 就能使用高阶概率权重矩法估计模型参数。另外, 高阶概率权重矩法在估算重现期较大的洪水时较其它方法更优。

## 参考文献 (References)

[1] 李宏伟. 水文频率参数计算方法与应用研究[D]. 西北农林科

技大学, 2009.

- LI Hongwei. Parameter estimation methods for flood frequency analysis. Northwest A&F University, 2009. (in Chinese)
- [2] 水利部. 水利水电工程设计洪水计算规范 SL44-2006[S]. 北京: 中国水利水电出版社, 2006.  
Ministry of Water Resources. Guidelines of design flood estimation for hydraulic engineering, SL44-2006. Beijing: Shui-dian Press, 2006. (in Chinese)
- [3] 张秀芝. Weibull 分布参数估计方法及其应用[J]. 气象学报, 1996, 54(1): 108-116.  
ZHANG Xiuzhi. Parameter estimation method for Weibull distribution. Journal of Meteorology, 1996, 54(1): 108-116. (in Chinese)
- [4] 陈子桑, 刘曾美, 陆剑飞. 广义极值分布参数估计方法的对比研究[J]. 中山大学学报, 2010, 49(6): 106-109.  
CHEN Zhiyue, LIU Zengmei and LU Jianfei. Comparison of GEV parameter estimation methods. Journal of Sun Yat-sen University, 2010, 49(6): 106-109. (in Chinese)
- [5] WANG, Q. J. Using higher probability weighted moments for flood frequency analysis. Journal of Hydrology, 1997, 194(1): 95-106.
- [6] FISHER, R. A., TIPPETT, L. H. C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1928, 24(2): 180-190.
- [7] JENKINSON, A. F. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. The Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 1955, 81(348): 158-171.
- [8] COLES, S. An introduction to statistical modeling of extreme values. New York: Springer Verlag, 2001: 36-78.
- [9] HOSKING, J. R. M. L-moments: Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological), 1990, 52(1): 105-124.
- [10] GREENWOOD, J. A., LANDWEHR, J. M., MATALAS, N. C. and WALLIS, J. R. Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of distribution expressible in inverse form. Water Resources Research, 1979, 15(5): 1049-1054.
- [11] WANG, Q. J. Using partial probability weighted moments to fit the extreme value distributions to censored samples. Water Resources Research, 1996, 32(6): 1767-1771.
- [12] WANG, Q. J. Unbiased estimation of probability weighted moments and partial probability weighted moments from systematic and historical flood information and their application to estimating the GEV distribution. Journal of Hydrology, 1990, 120(1-4): 115-124.
- [13] LANDWEHR, J. M., MATALAS, N. C. Estimation of parameters and quantiles of Wakeby distributions 2. Unknown lower bounds. Water Resources Research, 1979, 15(6): 1373-1379.