

# 深部开采隔水关键层在不同高跨比下的力学解对比

王秉文, 鲁海峰

安徽理工大学, 地球与环境学院, 安徽 淮南

收稿日期: 2021年8月20日; 录用日期: 2021年9月22日; 发布日期: 2021年9月29日

## 摘 要

在深部开采防治水实践中, 煤层底板不同高跨比的隔水关键层和作用在隔水层的水拉力是决定能否突水的重要因素。将隔水关键层的厚度和跨度比模拟成梁的高跨比, 针对不同高跨比下固定梁的力学特点, 通过弹性力学和材料力学两种对固定梁的解法分别对其平面关键点的应力进行求解, 将两个计算结果与FLAC3D模拟结果进行对比分析, 探究浅梁理论是否适合于关键层应力分析, 并运用到实际隔水关键层的运用中。研究表明: 在高跨比不超过0.2为浅梁的情况下时, 弹性力学解的正应力解误差在11%~20%左右, 材料力学正应力解误差在20%~30%, 相比之下弹性力学较为精确, 浅梁理论中弹性力学解则更适用于关键层; 当高跨比超过0.2时, 弹性力学解误差出现“跳跃”现象, 材料力学解的误差也逐步递增, 隔水关键层不再适用于两者的浅梁理论; 而剪切应力解最大误差不超过11.5%, 符合工程精度。综上所述, 在高跨比不超过0.2情况下建议关键层固定梁的应力分析首选采用弹性力学解的浅梁理论, 研究结果为深部高承压水上安全开采以及矿井突水的监测与临突预测预报等具有重要的理论指导意义。

## 关键词

深部开采, 高跨比, 关键层, 浅梁

# Comparison of Mechanical Solutions of Water-Resistant Key Strata in Deep Mining under Different Height-Span Ratios

Bingwen Wang, Haifeng Lu

School of Earth and Environment, Anhui University of Science and Technology, Huainan Anhui

Received: Aug. 20<sup>th</sup>, 2021; accepted: Sep. 22<sup>nd</sup>, 2021; published: Sep. 29<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

In the practice of water inrush prevention and control in deep mining, the key water-repellent layer with different height-span ratio of coal floor and the water pulling force acting on the water-repellent layer are important factors to determine whether water inrush can be carried out. In this paper, the thickness and span ratio of the key layer of the water barrier are simulated as the height-to-span ratio of the beam. According to the mechanical characteristics of the fixed beam under different height-span ratios, two solutions of elastic mechanics and material mechanics are used to solve the key points of the fixed beam, to solve the stress of the two calculation results and FLAC3D simulation results, to explore whether the shallow beam theory is suitable for the stress analysis of the key layer, and apply it to the application of the actual water-resistant key layer. The results show that when the height span ratio is less than 0.2 for shallow beams, the normal stress error of elastic mechanics solution is about 11%~20%, and the normal stress error of material mechanics solution is 20%~30%. Comparatively, the elastic mechanics solution is more accurate, and the elastic mechanics solution of shallow beam theory is more suitable for key layers. When the height-span ratio is more than 0.2, the error of elastic mechanical solution appears "jump" phenomenon, and the error of material mechanical solution also increases gradually, and the water-proof key layer is no longer suitable for the shallow beam theory of both. The maximum error of shear stress solution is less than 11.5%, which is in line with engineering accuracy. To sum up, it is recommended to adopt the shallow beam theory of elastic mechanics solution for stress analysis of fixed beams in key layers under the condition that the height-span ratio is less than 0.2. The research results have important theoretical guiding significance for deep high-supported water mining safety and mine water inrush monitoring and imminent prediction.

## Keywords

Deep Mining, Depth-Span Ratio, The Key Layer, Light Beam

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

深部高承压含水层上采煤一直是我国向深部工作面不断拓展而出现的一些特殊地质条件下难度较大的采煤开采技术问题[1],在煤炭安全开采中,有效防治采煤突水问题也是一个重要的采矿工程问题,且目前来说一直都未解决[2][3]。目前有很多相关学者提出很多理论,“关键层”理论是由中国矿业大学黎良杰、钱鸣高于早年提出,认为煤层中隔水承载力性能最强的底板隔水层为关键层[4]。对于关键层的力学分析,通常考虑水压力作用下导致的煤层弯曲变形以及裂缝产生,因此煤层底板抵抗水压力的强度是关键。在实际运用中关键层的力学分析很重要,关键层的强度决定着顶底板的破坏形式。关于矿井工作面突水的研究已经达到了一个较为先进的水平,形成了一些比较完善的理论。可是在形成的这些突水理论中都或多或少的存在着条件的限制和相对理想化的成分。目前对关于隔水关键层的浅梁理论运用还缺乏研究,本文将关键层的厚度和跨度比模拟成于梁的高跨比,探究浅梁理论是否适合关键层的应用。目前梁在人们日常工程活动中广泛运用,在建筑的使用过程中作为主要承重和受弯构件的梁高度不断增大,当梁构件高度和跨度之比达到一定界限,即相应的高跨比大于等于 0.2 时,就应考虑剪切变形对挠度产生的影响,以满足精度要求,此时的梁即可认为是深梁构件,就形成高度较大的深梁结构,现阶段深梁

构件由于其巨大的承载能力而得到越来越广泛的应用[5]。梁的受力和变形分析既是力学的基础理论问题,也是工程结构设计中关心的问题。一些学者对静定梁的受力和变形全过程进行过分析[6] [7] [8] [9] [10]。随着工程技术的发展,应考虑剪切变形影响的深梁问题越来越多,如结构界面尺寸相对于跨径来说较大情况、梁的高阶振动、局部高度承载、弹性地基梁的地基沉降问题等问题,运用初等梁理论分析将导致计算结果偏小[11]、计算精度不足等问题。为解决这些问题,各国学者提出了很多深梁理论[12] [13],出现了大量研究成果和工程应用,促进了深梁理论的发展。本文将关键层模拟成固定梁,采用不同高跨比的固定梁进行研究,采用弹性力学中解决超静定梁的应力函数法以及材料力学中关于梁截面的应力计算方法,对比 FLAC3D 的数值解,分析关键层适用于浅梁理论的条件,作为底板突水研究的一个重要方面,可以更好地为突水事故预测提供理论支撑。

## 2. 模型建立

将关键层视为固定梁,研究不同高跨比下的固定梁的平面应力问题。取梁的长度为  $L$ , 横截面积高为  $h$ , 宽为  $b$ , 梁上部承受均布荷载  $q$  的作用, 高跨比  $h/l$  分别取值为 0.1, 0.2, 0.3, 0.4。基于梁左端边界中点为圆心建立  $x, y, z$  坐标轴。材料力学和弹性力学均建立相同的坐标系,其固定梁平面模型图如下图 1 所示:

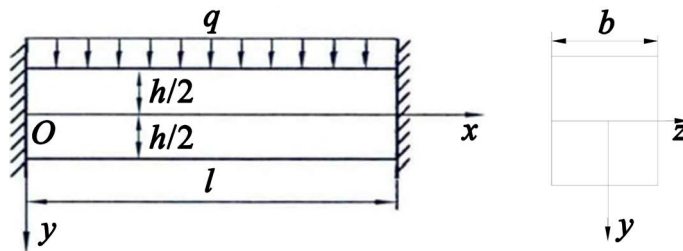


Figure 1. Plane model of fixed beam at both ends  
图 1. 两端固定梁平面模型

根据关键层固定梁特点, 上、下边界条件为:

$$y = -h/2 : \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$$

$$y = h/2 : \sigma_y = -q, \tau_{xy} = 0$$

## 3. 两种算法解析解

### 3.1. 弹性力学解

关于两端固定梁的解, 文献[14]给出的关于超静定梁应力解答为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{I} \left( \frac{1}{2} qx^2 + F_0 x \right) y + \frac{q}{3I} y^3 + 6A_4 y + 2A_5 \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2I} \left( \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} h^2 y + \frac{h^3}{12} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{2I} (qx + F_0) \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{aligned} \right\}$$

其中,  $A_4 = -\frac{1}{72I} ql^2 + \frac{1}{48I} \nu qh^2 - \frac{1}{144} m^2 (2 + \nu) qh^2$ ,  $A_5 = -\frac{1}{4} \nu q$ ,  $F_0 = -\frac{1}{2} ql$ ,  $m = \sqrt{15}/5$ ,  $I = \frac{1}{12} h^3$ ,  $b = 1$ 。

### 3.2. 材料力学解

关于两端固定梁的解, 综合文献[15] [16] [17]给出材料力学关于超定梁应力解答为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M(X)}{I} y \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2b} \left[ 1 - 3\frac{y}{h} + 4\left(\frac{y}{h}\right)^3 \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{3Q(X)}{2bh} \times \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

其中,  $M(x) = \frac{ql^2}{12} + \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2}$ ,  $Q(x) = \frac{1}{2}ql - qx$ ,  $I = \frac{1}{12}h^3$ ,  $b=1$ 。

### 4. 算例分析

为研究不同高跨比下两种解法的应力区别, 将矩形截面梁的长固定为 40m。高度进行变化, 取泊松比  $\nu = 0.25$ 。弹性模量  $E = 20 \text{ Gpa}$ , 均布荷载  $q = 0.5 \text{ Mpa}$ 。将材料力学解、弹性力学的理论用 matlab 计算, 再对比 FLAC3D 数值解。为验证以上两种解析解在深梁下的影响, 将解析解与数值解对比成图 2。为关键层是否适用浅梁理论作指导。

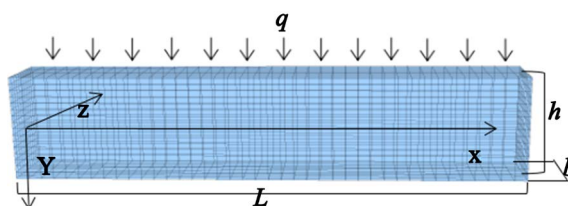


Figure 2. Stress model of simulated beam in water-proof key layer  
图 2. 隔水关键层模拟梁的受力模型

由于弹性力学解和材料力学解的剪切应力表达式是一样的, 所以各高跨比取  $x = 15 \text{ m}$  处节点进行比较。

1) 当  $h/l = 0.1$  时, 取  $h = 4, L = 40$

取边缘  $x = 0$  处节点和  $x = 15 \text{ m}$  处节点为考察点, 通过弹性力学解和材料力学解得到不同高跨比条件下的正应力解和剪应力解见图 3~5。

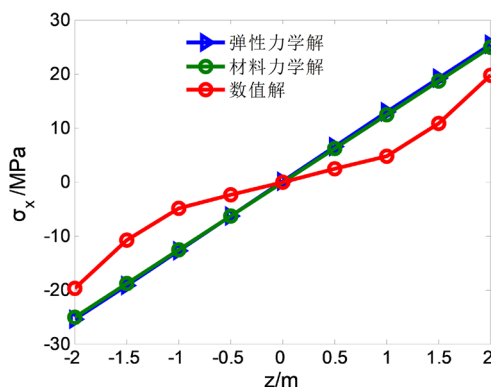


Figure 3. Change with  $z$  when  $x = 0 \text{ m}$   
图 3.  $x = 0 \text{ m}$  时,  $\sigma_x$  随  $z$  的变化

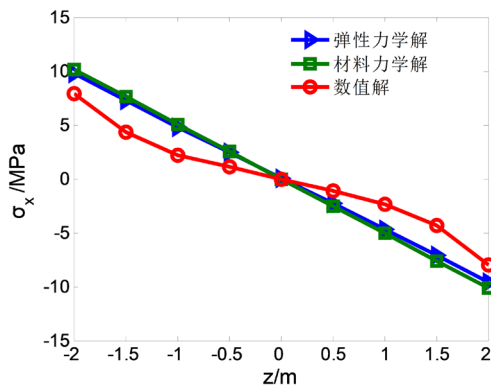


Figure 4. Change with  $z$  when  $x = 15$  m  
 图 4.  $x = 15$  m 时,  $\sigma_x$  随  $z$  的变化

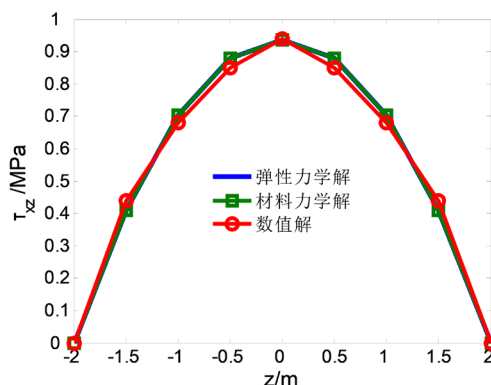


Figure 5. Change with  $z$  when  $x = 15$  m  
 图 5.  $x = 15$  m 时,  $\tau_{xz}$  随  $z$  的变化

分析图 3, 当在支座处  $x = 0$  的时候, 可看出材料力学解和弹性力学解相差不多, 且模型上下应力趋势接近, 较为对称, 理论解有效; FLAC3D 计算的数值解为 19.98 MPa。matlab 计算两种力学解误差如下: 弹性力学解理论值为 23.03 MPa, 误差为 15.2%; 材料力学解理论值为 23.09 MPa, 误差为 15.6%。分析图 4, 在模型  $x = 15$  m 时, 弹性力学解更为接近。FLAC3D 计算的数值解为 8.85 MPa, matlab 计算两种力学解误差如下: 弹性力学解理论值为 9.85 MPa, 误差为 11.3%; 材料力学解理论值为 10.03 MPa, 误差为 13.1%, 综合上面两个位置正应力曲线图, 弹性力学解更加精确些。

分析图 5 得出两种力学解与数值解十分接近, 在  $x = 15$  m 处时, 数值解的最高点, 即最大切应力为 0.94 MPa, 弹性力学解理论值和材料力学解理论值均一样, 最大切应力为 0.93 MPa, 误差为 1.1%, 符合实际工程精度。

2) 当  $h/l = 0.2$  时, 取  $h = 8, L = 40$

取边缘  $x = 0$  处节点和  $x = 15$  m 处节点为考察点, 通过弹性力学解和材料力学解得到不同高跨比条件下的正应力解和剪应力解见图 6~8。

分析图 6, 当在支座处  $x = 0$  的时候, 可看出模型上下应力趋势接近, 且较为对称。其中弹性力学解和材料力学解都较为接近数值解, 说明两种力学解可行; FLAC3D 计算的数值解为 10.45 MPa, matlab 计算两种力学解误差如下: 弹性力学解理论值为 12.59 MPa, 误差为 20.4%; 材料力学解理论值为 7.25 MPa, 误差为 30%。对比图 7, 在模型  $x = 15$  m 时, 可看出模型上下应力趋势接近, 且较为对称。其中弹性力学解和材料力学解都较为接近数值解。FLAC3D 计算的数值解为 3.42 MPa, matlab 计算两种力

学解误差如下：弹性力学解理论值为 4.11 MPa，误差为 20.1%；材料力学解理论值为 2.51 MPa，误差为 26.3%。

分析图 8 得出两种力学解与数值解十分接近，在  $x = 15\text{m}$  处时，数值解的最高点，即最大切应力为 0.49 MPa，两种力学理论解均一样，最大切应力为 0.46 MPa，误差为 6.1%，符合实际工程精度。

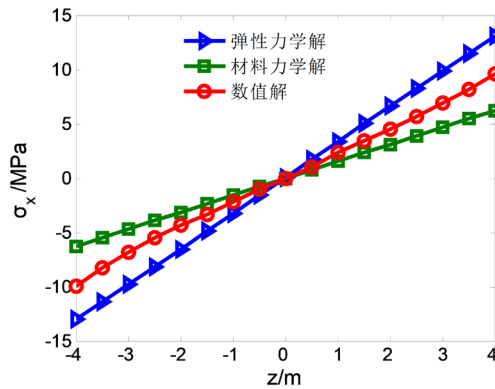


Figure 6. Change with  $z$  when  $x = 0\text{ m}$   
 图 6.  $x = 0\text{ m}$  时,  $\sigma_x$  随  $z$  的变化

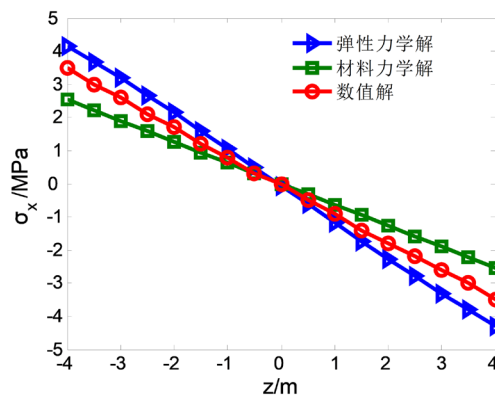


Figure 7. Change with  $z$  when  $x = 15\text{ m}$   
 图 7.  $x = 15\text{ m}$  时,  $\sigma_x$  随  $z$  的变化

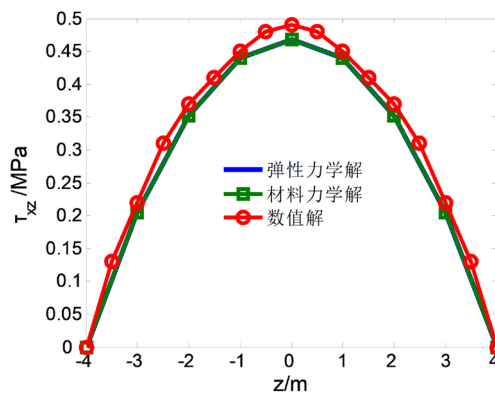


Figure 8. Change with  $z$  when  $x = 15\text{ m}$   
 图 8.  $x = 15\text{ m}$  时,  $\tau_{xz}$  随  $z$  的变化

3) 当  $h/l = 0.3$  时, 取  $h = 12, L = 40$

取边缘  $x = 0$  处节点和  $x = 15\text{ m}$  处节点为考察点, 通过弹性力学解和材料力学解得到不同高跨比条件下的正应力解和剪应力解见图 9~11。

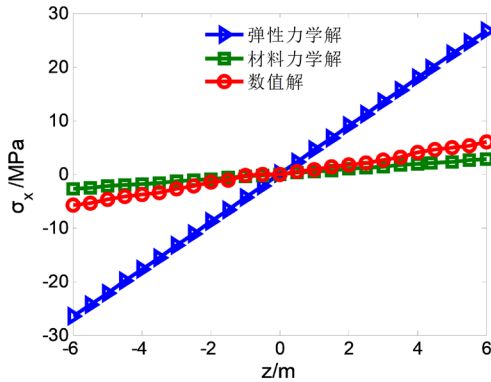


Figure 9. Change with  $z$  when  $x = 0\text{ m}$   
 图 9.  $x = 0\text{ m}$  时,  $\sigma_x$  随  $z$  的变化

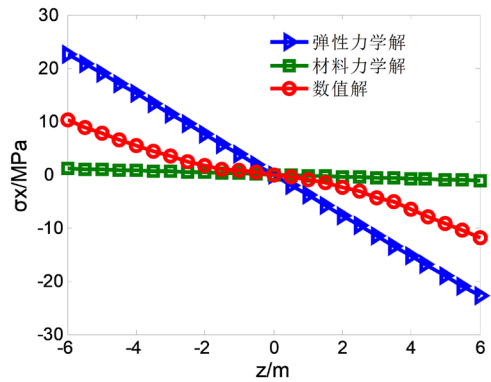


Figure 10. Change with  $z$  when  $x = 15\text{ m}$   
 图 10.  $x = 15\text{ m}$  时,  $\sigma_x$  随  $z$  的变化

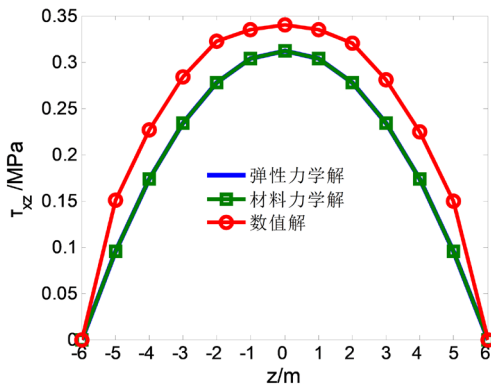


Figure 11. Change with  $z$  when  $x = 15\text{ m}$   
 图 11.  $x = 15\text{ m}$  时,  $\tau_{xz}$  随  $z$  的变化

分析图 9, 当在支座处  $x = 0$  的时候, 可看出模型上下应力趋势接近, 且较为对称, 材料力学解更为接近, 理论解有效。且上下应力大部分呈对称分布; FLAC3D 计算的数值解为 5.99 MPa, matlab 计算两种力学解误差如下: 弹性力学解理论值为 28 MPa, 误差较大; 材料力学解理论值为 3.09 MPa, 误差为



48%。对比图 10, 在模型中间位置即  $x = 15 \text{ m}$  时, 可看出模型上下应力趋势接近, 且较为对称。弹性力学解和材料力学解与数值解开始误差加大。FLAC3D 计算的数值解为  $11.8 \text{ MPa}$ , matlab 计算两种力学解误差如下: 弹性力学解理论值为  $23.1 \text{ MPa}$ , 误差相对较大; 材料力学解理论值为  $2.12 \text{ MPa}$ , 误差为  $82\%$ 。

分析图 11 得出两种力学解与数值解十分接近, 在  $x = 15 \text{ m}$  处时, 数值解的最高点, 即最大切应力为  $0.345 \text{ MPa}$ , 弹性力学解理论值和材料力学解理论值均一样, 最大切应力为  $0.313 \text{ MPa}$ , 误差为  $9.2\%$ , 符合实际工程精度。

4) 当  $h/l = 0.4$  时, 取  $h = 16, L = 40$

取边缘  $x = 0$  处节点和  $x = 15 \text{ m}$  处节点为考察点, 通过弹性力学解和材料力学解得到不同高跨比条件下的正应力解和剪应力解见图 12~14。

分析图 12, 当在支座处  $x = 0$  的时候, 可看出模型上下应力趋势接近, 且较为对称, 材料力学解更为接近数值解, 弹性力学的误差相对较大; FLAC3D 计算的数值解为  $6.18 \text{ MPa}$ , matlab 计算两种力学解误差如下: 弹性力学解理论值为  $58.1 \text{ MPa}$ , 误差越来越大; 材料力学解理论值为  $1.09 \text{ MPa}$ , 误差为  $78.9\%$ 。对比图 13, 在中点处  $x = 15 \text{ m}$  时, 弹性力学解误差相对较大, 材料力学解虽较为接近但也超出了误差范围。FLAC3D 计算的数值解为  $13.85 \text{ MPa}$ 。matlab 计算两种力学解误差如下: 弹性力学解理论值为  $58.56 \text{ MPa}$ , 误差比较大; 材料力学解理论值为  $2.32 \text{ MPa}$ , 误差为  $83.2\%$ 。

分析图 14 得出两种力学解与数值解十分接近, 在  $x = 15 \text{ m}$  处时, 数值解的最高点, 即最大切应力为  $0.26 \text{ MPa}$ , 两种力学理论解均一样, 最大切应力为  $0.23 \text{ MPa}$ , 误差为  $11.5\%$ , 符合实际工程精度。

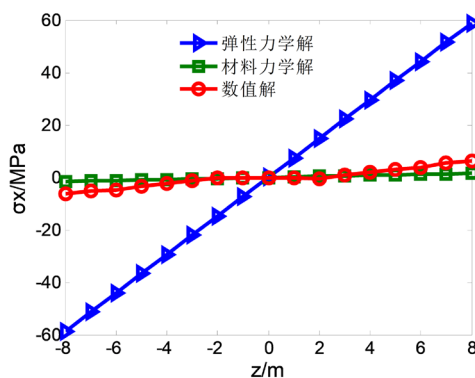


Figure 12. Change with  $z$  when  $x = 0 \text{ m}$

图 12.  $x = 0 \text{ m}$  时,  $\sigma_x$  随  $z$  的变化

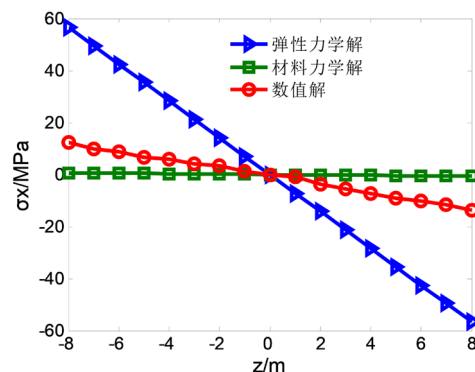


Figure 13. Change with  $z$  when  $x = 15 \text{ m}$

图 13.  $x = 15 \text{ m}$  时,  $\sigma_x$  随  $z$  的变化



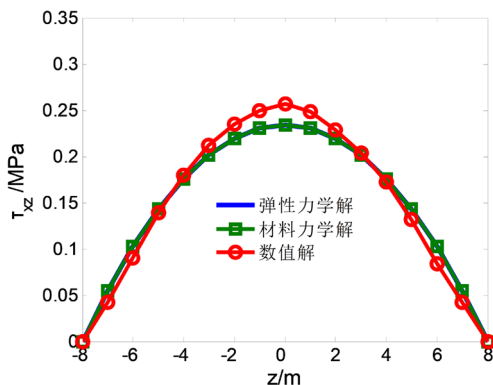


Figure 14. Change with  $z$  when  $x = 15$  m  
 图 14.  $x = 15$  m 时,  $\tau_{xz}$  随  $z$  的变化

取边缘  $x = 0$  处节点和  $x = 15$  m 进行应力分析, 得到不同高跨比条件下的正应力解和剪应力解见表 1、表 2。

Table 1. Comparative analysis of tensile stress of two mechanical solutions under different height-span ratios

表 1. 不同高跨比条件下两种力学解的拉应力对比分析

高跨比	正应力解/Mpa					
	弹性力学解	误差/%	材料力学解	误差/%		
0.1	$X = 0$	23.03	15.2	$X = 0$	23.09	15.6
	$X = 15$	9.85	11.3	$X = 15$	10.03	13.1
0.2	$X = 0$	12.59	20.4	$X = 0$	7.25	30
	$X = 15$	4.11	20.1	$X = 15$	2.51	26.3
0.3	$X = 0$	28	>100	$X = 0$	3.09	48
	$X = 15$	23.1	95.7	$X = 15$	2.12	82
0.4	$X = 0$	58.1	>100	$X = 0$	1.09	87
	$X = 15$	58.56	>100	$X = 15$	2.32	90.7

Table 2. Comparative analysis of elastic and material mechanical shear stress solutions under different height-span ratios

表 2. 不同高跨比条件下弹性力学解与材料力学解剪应力对比分析

高跨比	剪应力解/Mpa		
	弹性(材料)力学解	误差/%	
0.1	$X = 15$	0.93	1.1
0.2	$X = 15$	0.46	6.1
0.3	$X = 15$	0.313	9.2
0.4	$X = 15$	0.23	11.5

从表 1 正应力对比分析可以看出, 高跨比为 0.1 时, 弹性力学解的最大误差为 15.2%, 材料力学解最大误差为 15.6%, 弹性力学略微精确。当达到临界值 0.2 时, 材料力学解最大误差达到 30%, 与弹性力学解的误差在 10% 左右。当高跨比超过 0.2 时, 弹性力学解误差出现陡增, 材料力学解误差也在逐渐增大, 浅梁理论不在适用。

从表 2 剪应力对比分析, 由于两者公式相同, 故解析解值一样。在高跨比 0.1~0.4 中。剪切应力解与数值解的最大误差不超过 11.5%, 符合精度要求。

通过对比不同高跨比下两力学解的应力和数值分析, 发现当跨比不超过 0.2 时, 弹性力学解较为精确, 高跨比超过 0.2 时, 两者浅梁理论不在适用关键层应力分析运用。

## 5. 结论

1) 数值计算表明, 当  $h/l \leq 0.2$  时, 弹性力学解和数值解相差不大, 在实际误差范围内。虽然在理论分析中材料力学对于杆件受力分析的方法在工程误差范围内, 但弹性力学解略微精确, 建议首选采用弹性力学解对隔水关键层进行受力分析。超过 0.2 时, 两者浅梁理论不在适用隔水关键层。

2) 当将水压力近似看场均布荷载施加在关键层的时候, 可以近似看出两端固定力学模型; 由于均布荷载下固定梁的特点, 下部受拉应力影响, 而岩石抗拉强度一般较小, 底板容易因开采扰动引起的应力重分布导致突水发生, 故关键层的端部最底部的位置是防治底板突水的关键部位。而在  $x = 15 \text{ m}$  处, 靠近中层位置, 弹性力学解浅梁解误差在 11.3% 相比材料力学解 13.1% 更为精确。在端点  $X = 0$  处两者误差相差不多, 为 0.4%。

3) 综合考虑  $\sigma_x$  和  $\tau_{xy}$  随着  $x$ 、 $z$  的变化以及两种算法的精确程度, 当高跨比不超过 0.2 时, 弹性力学解应对浅梁分析更为贴切工程实际, 且计算较为精确, 在实际工程运用中, 对于关键层的位移以及受力的内部应力变化有较好的理论支撑, 可为底板突水的预测预报情况起到较好的指导作用。

## 基金项目

安徽省教育厅 2019 年高校自然科学研究重大项目(KJ2019ZD11); 国家自然科学基金面上项目(No. 41977253)。

## 参考文献

- [1] 徐智敏. 深部开采底板破坏及高承拉突水模式、前兆与防治[D]: [博士学位论文]. 徐州: 中国矿业大学, 2010.
- [2] 杨天鸿, 唐春安, 谭志宏, 朱万成, 冯启言. 岩体破坏突水模型研究现状及突水预测预报研究发展趋势[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(2): 268-277.
- [3] 武强, 崔芳鹏, 赵苏启, 刘守强, 曾一凡, 谷亚威. 矿井水害类型划分及主要特征分析[J]. 煤炭学报, 2013, 38(4): 561-565.
- [4] 钱鸣高, 缪协兴, 许家林. 岩层控制中的关键层理论研究[J]. 煤炭学报, 1996(3): 2-7.
- [5] 刘广全, 孙科. 钢筋混凝土深梁研究综述[J]. 科技信息(科学教研), 2008(3): 88+107.
- [6] Strutt, J.W. (1877) Theory of Sound. Macmillan Publications Co., Inc., London.
- [7] Timoshenko, S.P. (1921) On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibration of Prismatic Bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **41**, 744-746. <https://doi.org/10.1080/14786442108636264>
- [8] Timoshenko, S.P. (1922) On the Transverse Vibration of Bars of Uniform Cross-Section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **43**, 125-131 <https://doi.org/10.1080/14786442208633855>
- [9] Han, S.M., Benaroya, H. and Wei, T. (1999) Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories. *Journal of Sound and Vibration*, **225**, 935-988. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2257>
- [10] 曲昭霞, 赵永刚, 秦慧峰. 非线性本构关系下两端固定梁的弯曲变形[J]. 甘肃科学学报, 2020, 32(1): 1-4.
- [11] Lo, C.C. and Guffa, S.D. (1978) Bending of a Nonlinear Rectangular Beam in Large Deflection. *Journal of Applied Mechanics*, **45**, 213-225. <https://doi.org/10.1115/1.3424238>
- [12] 陈英昕, 吴思远, 李斯, 王正中, 吴守军. 考虑翘曲及挤压影响的深孔闸门主梁正应力解析解[J]. 水利水运工程学报, 2019(4): 116-123.
- [13] 张鹤志, 马哲霖, 黄海林, 金浩, 彭玮. 不同位移边界条件下钢筋混凝土深梁拓扑优化[J]. 工程设计学报, 2019,

26(6): 691-699.

- [14] 夏桂云, 曾庆元. 深梁理论的研究现状与工程应用[C]//中国力学学会力学史与方法论专业委员会. 第七届全国力学史与方法论学术研讨会力学与实践专刊. 中国力学学会力学史与方法论专业委员会: 中国力学学会, 2015: 18-32.
- [15] 詹春晓. 含固支端梁的理论分析[D]: [博士学位论文]. 合肥: 合肥工业大学, 2017.
- [16] 吴思远, 王正中, 曹炜林, 张雪才. 深孔钢闸门组合截面主梁应力计算方法[J]. 北京工业大学学报, 2018, 44(1): 97-103.
- [17] 徐芝纶. 弹性力学简明教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.