

Optimum Design Method for Logarithmic Crowned Tapered Rollers

Zhenzhi He, Minghui Shao, Guo Ye

School of Mechanical & Electrical Engineering, Jiangsu Normal University, Xuzhou Jiangsu
Email: zzhezz@jsnu.edu.cn

Received: Mar. 8th, 2016; accepted: Mar. 19th, 2016; published: Mar. 29th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Based on the objective of elongating the fatigue life of roller bearings, an optimum design method is presented for the logarithmic crowned tapered rollers in this paper. The analysis model for contact stress distribution between crowned tapered roller and raceway, together with the computational model of bearing fatigue life, is provided as the basic of crowning design. The design parameter of logarithmic crown profile is determined after analyzing the effect of crowning parameter on stress distribution and bearing's fatigue life under the given conditions. By introducing the fatigue life of bearing as the objective function in the crowning design, the optimal logarithmic crowning parameter can be obtained quantitatively. Moreover, the upper and lower deviation values of the crowning parameter are obtained by referring to the allowable values of the fatigue life and the contact length coefficient, providing the reference for engineering design in application.

Keywords

Tapered Roller, Logarithmic Crown, Optimum Design, Fatigue Life

圆锥滚子对数修形的优化设计方法研究

何贞志, 邵明辉, 叶 果

江苏师范大学机电工程学院, 江苏 徐州
Email: zzhezz@jsnu.edu.cn

收稿日期: 2016年3月8日; 录用日期: 2016年3月19日; 发布日期: 2016年3月29日

摘要

以提高轴承的疲劳寿命为优化目标,提出了一种圆锥滚子对数修形的优化设计方法。给出了修形圆锥滚子-滚道间接触应力分布的分析模型及轴承疲劳寿命的计算模型,分析了特定工况下修形参数对接触应力及轴承疲劳寿命的影响,确定了对数修形设计的参数;以轴承疲劳寿命作为修形设计的目标函数,经过定量分析,得到了最佳对数修形参数;设定疲劳寿命和接触长度因子的许用值,并据此得到了修形参数的上、下偏差值,为实际的工程应用提供了依据。

关键词

圆锥滚子,对数修形,优化设计,疲劳寿命

1. 引言

在滚子轴承设计中,滚子的修形设计直接影响轴承的使用性能及寿命。滚子修形设计主要包括两个方面:修形形状设计和修形量设计。国内外学者对滚子的修形设计进行了大量的研究[1]-[5],指出对数修形在改善滚子-滚道接触副的应力分布、提高轴承疲劳寿命方面具有优越的性能,是滚子修形的最佳轮廓。

早在1939年,为了消除滚子两端的应力集中现象,Lundberg提出了滚子的对数修形曲线,但是该曲线在滚子端部并不连续。针对Lundberg修形曲线的不足,Johns等[6]提供了改进的对数修形曲线,然而该曲线降低了修形量,导致滚子端部仍会出现边缘效应;马家驹等[7]给出了工程应用中的对数修形设计方法,提高了对数修形曲线工程应用的可操作性,可是该方法没有定量分析最优参数值的设计依据及设计效果;Kamamoto等[8]在得到接触次表面应力的基础上,以滚子材料破坏的均匀分布为目标得到了获取最大承载能力的滚子修形经验公式;Fujiwara等[3][4]考虑滚子偏斜情况,在方程中引入三个设计系数,并通过数值方法进行了优化,为工程应用提供了有益的设计依据;李云峰等[9]对交叉圆柱滚子的修形进行了研究,引入滚子对数轮廓的凸度量放大倍数,分析了偏载情况下滚子修形的最优凸度量,然而文中使用的对数修形曲线为Lundberg修形曲线;陈晓阳等[10]通过建立滚子滚道接触的力学模型,以减小最大接触应力为目标,以滚子修形量为设计参数,得到了偏斜工况下提高轴承抗偏斜能力的滚子修形设计方法;毛月新等[11]以接触应力分布最佳为目标,以凸度量为设计对象,给出了偏载工况下的滚子修形设计方法。

在滚子的实际生产中,得到精确的最佳对数修形十分困难,必然会存在一定的误差,且在实际加工中也需要提供滚子尺寸的公差值。Fujiwara等[12]为了适应工程应用和生产实际的需要,提出了滚子对数修形的公差设计方法然而现有的一些滚子修形设计方法中却没有给出所需的尺寸公差参考值。

为了对现阶段的滚子修形设计提供理论依据和参考,本文针对圆锥滚子的对数修形,以轴承的疲劳寿命为优化目标,通过定量分析研究对数修形的优化设计方法,并给出滚子修形公差的设计方法。

使用的对数修形滚子母线的一般表达式为:

$$z = f_1 \ln \left[1 - f_2 \left(2x/l_r \right)^2 \right]^{-1} \quad (-0.5l_r \leq x \leq 0.5l_r)$$

其中 f_1 、 f_2 为修形参数, l_r 为滚子有效长度。

2. 疲劳寿命分析模型

滚动轴承寿命是最大正交剪切应力及其发生深度、应力体积的函数,为了计算轴承的疲劳寿命,需

要进行以下两个方面的数值分析：表面接触应力分布的计算和次表面应力分布的计算。

2.1. 表面接触应力分布

根据结构分析中的影响系数法[1] [5] [13]-[16]，预先设定大于实际接触区域的矩形区域 Ω ，并划分为 n 个矩形单元。设各单元格上的应力 P_j ($j=1, \dots, n$) 均匀分布，可得到应力与变形 δ 关系的线性代数方程组：

$$\frac{2}{\pi E'} \sum_{j=1}^n F_{ij} P_j = \delta - z_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (1)$$

其中 E' 为等效弹性模量； z_i 为单元 i 的几何中心处的表面函数值。 F_{ij} 为影响系数，是单元 j 上的单位应力所引起的单元 i 中心的变形，由下式给出：

$$F_{ij} = \iint_{\Omega_j} \frac{dxdy}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} \quad (2)$$

根据力平衡条件及边界条件，有：

$$\sum_{j=1}^n P_j A_j = Q, \quad \text{其中} \begin{cases} P_j \geq 0 & (x_j, y_j) \in \Omega \\ P_j < 0 & (x_j, y_j) \notin \Omega \end{cases} \quad (3)$$

其中， A_j 为单元 j 的面积。联立式(1)~式(3)可得各网格上的应力 P_j ，由此得到整个接触区域 Ω 上的应力分布和接触变形。

2.2. 次表面应力分布

对于纯滚动状态下的圆锥滚子与滚道的接触应力分析，忽略切向力的作用，可将滚子与滚道的接触模型简化为弹性半空间体受法向载荷的作用。根据接触力学理论，弹性半空间体内一点 (x, y, z) 在范围为 Ω 的分布法向正应力 p 作用下的应力场可以表示为[8]：

$$\begin{cases} \sigma_x = \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta)}{2\pi R^2 r^2} \left\{ \frac{(1-2\nu)R[\bar{x}^2 - \bar{y}^2]}{R+z} + \frac{(1-2\nu)z\bar{y}^2}{R} - \frac{3zr^2\bar{x}^2}{R^3} \right\} d\xi d\eta \\ \sigma_y = \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta)}{2\pi R^2 r^2} \left\{ \frac{(1-2\nu)R[\bar{y}^2 - \bar{x}^2]}{R+z} + \frac{(1-2\nu)z\bar{x}^2}{R} - \frac{3zr^2\bar{y}^2}{R^3} \right\} d\xi d\eta \\ \sigma_z = -\iint_{\Omega} \frac{3p(\xi, \eta)}{2\pi R^5} z^3 d\xi d\eta \\ \tau_{xy} = \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta)\bar{x}\bar{y}}{2\pi R^2 r^2} \left\{ \frac{2(1-2\nu)R}{R+z} - \frac{(1-2\nu)z}{R} - \frac{3zr^2}{R^3} \right\} d\xi d\eta \\ \tau_{yz} = -\iint_{\Omega} \frac{3p(\xi, \eta)\bar{y}z^2}{2\pi R^5} d\xi d\eta \\ \tau_{zx} = -\iint_{\Omega} \frac{3p(\xi, \eta)\bar{x}z^2}{2\pi R^5} d\xi d\eta \end{cases} \quad (4)$$

其中， $\bar{x} = x - \xi$ ， $\bar{y} = y - \eta$ ， $r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$ ， $R = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + z^2}$ 。

Mises 应力为：

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (5)$$

2.3. 疲劳寿命计算

根据 Lundberg-Palmgren 寿命理论, 疲劳寿命可表示为最大正交剪切应力及其深度、接触长度的函数:

$$L = \bar{A} \left(\frac{1}{\tau_0} \right)^{c/e} \left(\frac{1}{a} \right)^{c/e} (z_0)^{\frac{h-1}{e}} \quad (6)$$

其中 \bar{A} 为材料综合常量, τ_0 为次表面下循环最大剪切应力幅值, a 为接触区半长, z_0 为最大剪切应力的深度, c 、 h 为材料常数, $c = 31/3$, $h = 7/3$, e 为 Weibull 斜率, 对于球轴承 $e = 10/9$, 对于滚子轴承 $e = 9/8$ 。

对滚动轴承而言, 设滚子的滚动方向为 y 向, 深度方向为 z 向, 忽略表面的摩擦力作用, 则可知滚子与滚道接触处的最大正交剪切应力为 $2\tau_{yz\max}$ 。因此, 滚子轴承的疲劳寿命可写为:

$$L = \bar{A} \left(\frac{1}{2\tau_{yz\max}} \right)^{c/e} \left(\frac{1}{a} \right)^{1/e} (z_0)^{\frac{h-1}{e}} \quad (7)$$

为了便于分析, 取相同载荷下直母线圆锥滚子轴承的寿命为参考值, 研究修形圆锥滚子轴承的相对寿命 \bar{L} , 即:

$$\bar{L} = \frac{L}{L_{ref}} = \left(\frac{\tau_{yzref}}{\tau_{yz\max}} \right)^{c/e} \left(\frac{a_{ref}}{a} \right)^{1/e} \left(\frac{z_0}{z_{0ref}} \right)^{\frac{h-1}{e}} \quad (8)$$

其中, 下标 ref 代表参考值, 即为直母线圆锥滚子轴承计算结果。

3. 对数修形优化设计方法

在不同的应用场合, 轴承所承受的载荷是不同的, 即使轴承的外加载荷一定, 每个滚子承受的载荷也是变化的, 然而在一套轴承中滚动体母线形状应该保持一致。因此在滚子修形设计时需要引入设计载荷值, 一般按受载最大的滚动体进行设计。

无内部游隙的圆锥滚子轴承在径向载荷 F_r 的作用下, 最大滚动体载荷 Q_m 近似为[17] [18]:

$$Q_m = \frac{4.08F_r}{Z \cos \alpha_o} \quad (9)$$

其中, Z 为滚子个数, α_o 为轴承接触角。

对于采用对数修形滚子的通用轴承来说, 径向载荷设计值可取为 $F_r = 0.2C_r$ 。

3.1. 修形设计参数的选择

以圆锥滚子轴承 32310 为例, 主要参数见表 1。

由式(9)可得, 当取 $F_r = 0.2C_r$ 时, 本例中滚子修形的设计载荷值为 $Q_d = 9315 \text{ N}$ 。

根据 Johns 等[6]给出的对数修形优化方法, 可以得到设计载荷下对数修形参数的参考值为:

$$f_1 = \frac{2Q}{\pi E' l_r}, \quad f_2 = 1 - 0.3033 \frac{2b}{l_r} \quad (10)$$

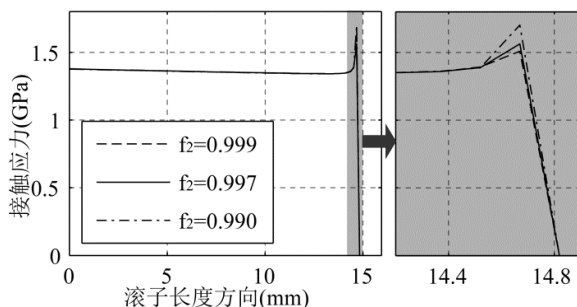
其中, b 为滚子 - 滚道接触区域半宽, 根据经典的 Hertz 接触理论计算[17] [18]。

则可得本例中修形参数参考值 $f_1 = 0.88 \mu\text{m}$, $f_2 = 0.997$ 。下面首先对设计载荷下, 固定 $f_1 = 0.88 \mu\text{m}$, 不同 f_2 对接触应力分布的影响进行探讨。当分别取滚动体载荷为 $0.1Q_d$ 、 Q_d 、 $10Q_d$ 时, 由式(10)可得 f_2 分别为 0.999、0.997、0.990。根据接触应力分布的数值计算方法可得三种 f_2 情况下的滚子 - 滚道接触应力分布, 如图 1 所示, 图中仅绘制了滚子一半长度上的接触应力分布情况。

Table 1. Main parameters of tapered roller bearing with type of 32310

表 1. 圆锥滚子轴承 32310 的主要参数

参数名称	符号	数值
滚子大端直径	D_L	15.706 mm
滚子有效长度	l_r	29.5 mm
滚子半锥角	β	2°
外圈滚道平均直径	d_o	94.3 mm
外圈滚道半锥角	α_o	$12^\circ 57' 10''$
滚子个数	Z	16
等效弹性模量	E'	2.275×10^{11} Pa
额定动载荷	C_r	178 kN

Figure 1. The contact stress distributions under different f_2 when Q is 9315 N图 1. 不同 f_2 情况下的接触应力分布 ($Q = 9315$ N)

可以看出, 相同载荷下, 滚子全长 98% 的区域(滚子中部)内的接触应力基本相同, 仅 2% 的区域(滚子端部)的应力出现差异, 应力最大相差 11.3%, 因此可见 f_2 对接触应力的影响可忽略; 同时使用 Johns 等给出的对数修形曲线, 在滚子端部依然存在较明显的应力集中现象, 因此需要对 f_1 优化设计。

同样地, 根据式(4)可以得到相同载荷下直母线圆锥滚子轴承和三种 f_2 情况下的对数修形圆锥滚子轴承的剪切应力在不同深度处的分布情况。图 2 给出了最大剪切应力所在深度 z_0 截面的剪切应力沿滚动方向的变化, 可以看出, 假设滚动体沿 y 轴的正方向滚动, 则接触表面下 y_z 平面内的切应力将从负值变为正值, 其切应力的最大变化量为 $2\tau_{yz, \max}$ 。

根据 L-P 寿命理论, 利用式(8)可以得到其相对寿命 \bar{L} , 结果如表 2 所示。表 2 表明: 在相同的外载荷下, 直母线圆锥滚子轴承的最大剪切应力及其所在的深度均大于对数修形圆锥滚子轴承的情况, 而疲劳寿命远小于对数修形圆锥滚子轴承; 对不同 f_2 值的对数修形圆锥滚子轴承, 最大剪切应力有微小的差异, 而最大切应力的深度值一致; 三种 f_2 值情况下的对数修形圆锥滚子轴承的相对寿命差别较小, 最大相差 4.9%。因此, 可以忽略 f_2 对疲劳寿命的影响。

综上, 本文忽略参数 f_2 的影响, 仅选择 f_1 作为修形设计参数。在后续的修形设计分析中, 取 f_2 的值为 0.997, 即径向载荷为 $0.2C_r$ 时对应的 f_2 值。

3.2. 最佳修形参数设计

在重载工况下, 希望尽可能地延长轴承的使用时间, 提高轴承的疲劳寿命。因此以设计载荷下直母线圆锥滚子轴承的寿命为参考值, 以轴承的相对疲劳寿命 \bar{L} 为修形参数优化的目标函数。根据材料强度

Table 2. The computational results of relative life
表 2. 相对寿命计算结果

外载荷 Q (N)	滚子类型	f_2	最大切应力 $2\tau_{yz}$ (MPa)	最大切应力深度 z_0 (μm)	接触半长 a (mm)	相对寿命 \bar{L}
9315	直母线	-	942.31	84.19	14.75	1
	对数修形	0.993	705.82	74.79	14.75	12.3
		0.997	708.09	74.79	14.75	12.0
		0.999	711.19	74.79	14.75	11.7

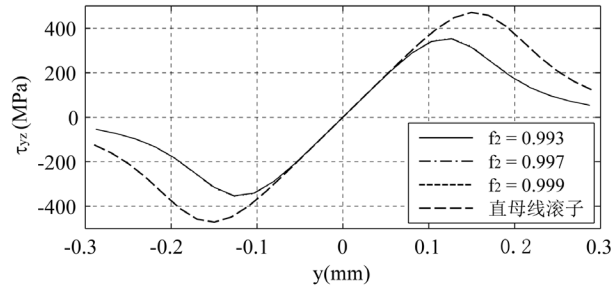


Figure 2. The variation of shearing stresses τ_{yz} under different f_2 along with the rolling direction when Q is 9315 N
图 2. 剪切应力 τ_{yz} 沿滚动方向的变化 ($Q = 9315$ N)

失效的畸变能密度准则，轴承零件所受的最大 Mises 应力 σ_M 应小于轴承材料的许用应力 $[\sigma]$ 。综上，可以得到最佳对数修形参数 f_1 的优化模型为：

$$\begin{cases} \max(\bar{L}(f_1)) \\ \max(\sigma_M) \leq [\sigma] \end{cases} \quad (11)$$

显然轴承的相对疲劳寿命 \bar{L} 和 Mises 应力 σ_M 均是对数修形参数 f_1 的函数，在给定的设计载荷 Q_{Hd} 下，根据滚子与滚道接触应力及次表面应力的数值计算方法，结合 L-P 寿命理论，可得 \bar{L} 与 f_1 之间的关系如图 3 所示。

根据相对疲劳寿命与 f_1 的关系可得最佳修形参数值，设为 f_{10} ，如图 3 所示。

本例中，设计载荷 $Q_{Hd} = 9315$ N，设轴承材料的许用应力 $[\sigma] = 4000$ MPa，则可得最佳对数修形参数 f_{10} 为 $0.935 \mu\text{m}$ 。可以看出，以轴承的疲劳寿命为目标得到的最佳修形参数 f_1 大于根据 Johns-Gohar 给出的计算公式(10)计算的值，即增大了滚子的修形量。

3.3. 最佳修形参数的公差设计

对滚子轴承而言，人们期望滚子轴承接触副的接触应力均匀分布、提高轴承的疲劳寿命，同时希望可以充分利用滚子材料，即达到接触副材料疲劳寿命的均匀分布。

由图 3 可以看出，轴承的相对疲劳寿命 \bar{L} 是 f_1 的函数，且随着 f_1 的增加 \bar{L} 先增大后减小。为了满足轴承疲劳寿命的要求，定义 \bar{L} 的许用值 \hat{L} ，则滚子的对数修形应满足 $\bar{L} \geq \hat{L}$ 。由图 3 可知，对于给定的 \hat{L} 至少存在两个 f_1 值满足 $\bar{L} = \hat{L}$ ，设为 f_{1L} 、 f_{1H} ，且 $f_{1L} < f_{1H}$ 。因此可以得到满足轴承疲劳寿命要求时的修形参数公差范围为 $[f_{1L}, f_{1H}]$ 。

另一方面，载荷一定时，随着修形参数 f_1 的增加，滚子的修形量增加，滚子和滚道的接触趋于点接触的性质。例如在设计载荷作用下，当 $f_1 = 4.00 \mu\text{m}$ 时对数修形滚子轴向截面 ($y = 0$ 截面) 接触应力分布如图 4 所示，其中在 x 方向仅取半区域进行分析。设 P_0 为 $y = 0$ 截面上滚子中部的接触应力， $l_1/2$ 为 $y = 0$ 截

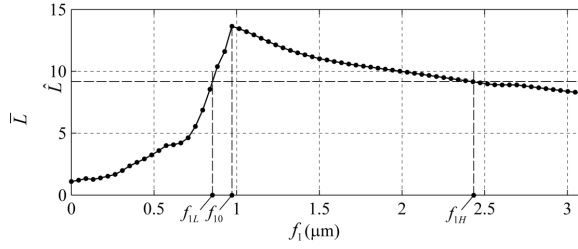


Figure 3. The relationship between the relative fatigue life \bar{L} and the parameter f_1
图 3. 相对疲劳寿命 \bar{L} 与 f_1 的关系

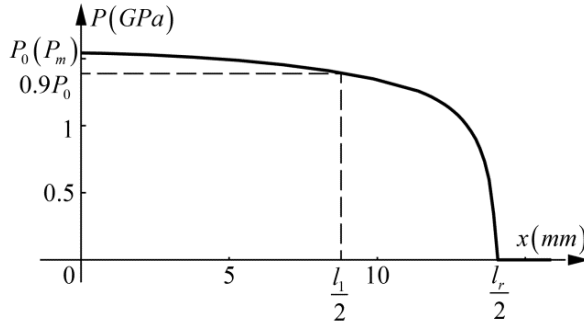


Figure 4. The contact stress distribution of logarithmic crowned roller when Q is 9315 N and f_1 is 4.40 μm
图 4. 对数修形滚子接触应力分布($Q = 9315 \text{ N}, f_1 = 4.40 \mu\text{m}$)

面上接触应力下降到 $0.9P_0$ 时的位置对应的 x 坐标值。

为了表示滚子材料的利用率，定义接触长度因子 $\gamma_L = l_1/l_r$ 。可以得出，为了保证滚子材料的充分利用， γ_L 应接近 1。显然， γ_L 是对数修形参数 f_1 的函数。给定载荷情况下，根据接触应力的数值计算方法可得它们之间的关系如图 5 所示。可以看出，随着 f_1 的不断增大， γ_L 逐渐减小，即材料利用率降低。因此为了满足滚子材料充分利用的要求，定义 γ_L 的许用值 $\hat{\gamma}_L$ ，则滚子的对数修形应满足 $\gamma_L \geq \hat{\gamma}_L$ 。令 $\gamma_L = \hat{\gamma}_L$ 时对应的对数修形参数为 f_{1h} ，则为了满足滚子材料充分利用的要求应有 $f_1 < f_{1h}$ 。

综上，为了同时满足轴承疲劳寿命和滚子材料充分利用的要求，滚子的对数修形应满足如下关系：

$$\bar{L} \geq \hat{L}, \quad \gamma_L \geq \hat{\gamma}_L \tag{12}$$

可得滚子对数修形参数的公差范围为：

$$f_1 \subseteq ([f_{1L}, f_{1H}] \cap [0, f_{1h}]), \text{ 设为 } [f_{12}, f_{11}]。$$

设定滚子的疲劳寿命不低于 $0.5\bar{L}_{\max}$ ， \bar{L}_{\max} 为最大疲劳寿命值，应力值大于 $0.9P_0$ 的滚子长度不小于滚子有效长度的 95.5%，即 $\hat{\gamma}_L = 0.955$ 。则可得本例中 $f_{12} = 0.783 \mu\text{m}$ ， $f_{11} = 1.413 \mu\text{m}$ ，即对数修形参数 f_1 的范围为 $[0.783 \mu\text{m}, 1.413 \mu\text{m}]$ 。

因此，本例中最佳修形参数对应的滚子母线表面轮廓及其公差带如图 6 所示。

3.4. 修形设计的一般过程

根据上面的滚子修形的设计方法，可以将滚子对数修形的设计过程归纳如下：

- 1) 根据轴承额定动载荷及预期工作载荷，确定受载最大的滚子载荷，即确定滚子修形设计中的设计载荷值；
- 2) 在设计载荷下，根据接触应力分布的数值计算方法得到不同对数修形参数 f_1 情况下的应力分布标

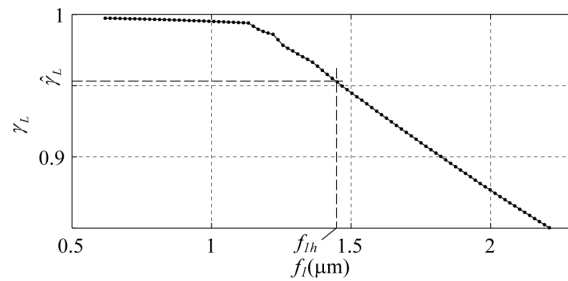


Figure 5. The variation of γ_L along with the logarithmic crowned parameter f_1

图 5. γ_L 随对数修形参数 f_1 的变化

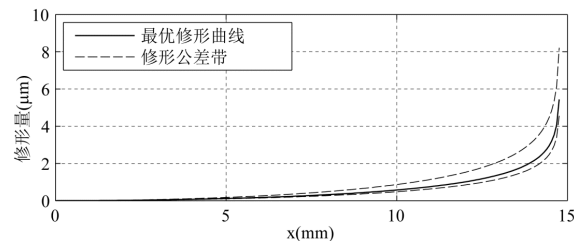


Figure 6. The optimum crowning profile and its tolerance zone under heavy load condition

图 6. 重载工况下最佳修形曲线轮廓及其公差带

准差 σ_p 、应力分布系数 γ_p 和接触长度系数 γ_L ；

3) 以应力分布标准差 σ_p 为优化设计的目标，取 σ_p 最小时对应的 f_1 为最佳修形参数；

4) 分别设定应力分布系数 γ_p 和接触长度系数 γ_L 的许用值 $\hat{\gamma}_p$ 、 $\hat{\gamma}_L$ ，根据 γ_p 和 γ_L 与 f_1 的函数关系确定 f_1 的上、下偏差。

4. 结论

本文以接触应力均匀分布为目标，对圆锥滚子的对数修形设计方法展开研究，有如下结论：1) 对数修形参数 f_2 对接触应力分布的影响较小，在修形设计中可忽略；2) 通过引入应力分布标准差 σ_p 为目标函数，建立了对数修形参数定量设计的准则；3) 以应力分布系数 γ_p 、接触长度系数 γ_L 为参考，定量分析了修形参数的上、下偏差值 f_{1L} 和 f_{1P} ；4) 本文给出的最佳修形曲线及其公差带为工程实际中滚子修形设计提供了参考。

致 谢

本文由国家自然科学基金-青年科学基金项目(51505201)和江苏师范大学校科研基金项目(14XLR023)共同资助。同时，华中科技大学机械科学与工程学院杨曙年教授和陈於学教授对本文的思路提供了指导和帮助，在此一并感谢。

基金项目

国家自然科学基金——青年科学基金项目(51505201)；江苏师范大学校科研基金项目(14XLR023)。

参考文献 (References)

- [1] 马家驹. 滚子凸度设计[J]. 轴承, 1992(1): 11-15.

- [2] Ju, S.H., Horng, T.L. and Cha, K.C. (2000) Comparisons of Contact Pressures of Crowned Rollers. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part J-Journal of Engineering Tribology*, **214**, 147-156. <http://dx.doi.org/10.1243/1350650001543061>
- [3] Fujiwara, H. and Kawase, T. (2006) Logarithmic Profiles of Rollers in Roller Bearings and Optimization of the Profiles. *Proceedings of the JSME Part C*, **72**, 3022-3029. <http://dx.doi.org/10.1299/kikaic.72.3022>
- [4] Fujiwara, H., Kobayashi, T., Kawase, T., et al. (2010) Optimized Logarithmic Roller Crowning Design of Cylindrical Roller Bearings and Its Experimental Demonstration. *Tribology Transactions*, **53**, 909-916. <http://dx.doi.org/10.1080/10402004.2010.510619>
- [5] 王爱林, 王庆九, 汪久根. 对数修形圆锥滚子的接触分析[J]. 机械科学与技术, 2012, 31(5): 836-841.
- [6] Johns, P.M. and Gohar, R. (1981) Roller Bearings under Radial and Eccentric Loads. *Tribology International*, **14**, 131-136. [http://dx.doi.org/10.1016/0301-679X\(81\)90058-X](http://dx.doi.org/10.1016/0301-679X(81)90058-X)
- [7] 马家驹, 徐文, 刘双表, 等. 对数滚子的工程设计[J]. 轴承, 1997(6): 2-5.
- [8] Kamamoto, S., Fujimoto, K. and Yamamoto, T. (2001) Research on Crowning Profile to Obtain the Maximum Load Carrying Capacity for Roller Bearings. *Koyo Engineering Journal*, **159**, 44-51.
- [9] 李云峰, 程亚兵. 交叉圆柱滚子转盘轴承的滚子偏载分析及修形[J]. 机械工程学报, 2015, 51(1): 161-166.
- [10] 陈晓阳, 周越, 沈雪瑾, 等. 偏歪斜滚子摩擦副的接触应力分析及凸度设计[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2015, 43(6): 77-83.
- [11] 毛月新, 沈雪瑾, 陈晓阳, 等. 偏载滚子轴承的接触应力分布计算及其滚子凸度设计[J]. 中国机械工程, 2009, 20(16): 1918-1922.
- [12] Fujiwara, H. and Yamauchi, K. (2010) Tolerance Design of Logarithmic Roller Profiles in Cylindrical Roller Bearings. *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*, **4**, 728-738. <http://dx.doi.org/10.1299/jamdsm.4.728>
- [13] 陈家庆, 蒋立培, 张宝生. 弹性接触问题的计算机辅助分析[J]. 机械科学与技术, 2003, 22(3): 427-430.
- [14] 李思成, 陈晓阳, 陈爱华, 等. 重载下调心滚子轴承接触应力分析及凸形设计[J]. 轴承, 2010(4): 1-6.
- [15] Ahmadi, N., Keer, L.M. and Mura, T. (1983) Non-Hertzian Contact Stress Analysis for an Elastic Half Space-Normal and Sliding Contact. *International Journal of Solids and Structures*, **19**, 357-373. [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(83\)90032-X](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(83)90032-X)
- [16] 李思成, 陈晓阳, 马纯清, 等. 变曲率圆弧球面滚子轴承力学性能分析[J]. 中国机械工程, 2010, 21(21): 2545-2550.
- [17] Harris, T.A. and Kotzalas, M.N. (2001) *Rolling Bearing Analysis*. Wiley, New York.
- [18] 万长森. 滚动轴承分析方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 1987.