

Modulation of the Shape Optimization of Ovenware

Xiang Xu, Qiaohong Chen, Tao Ding

School of Science, Hubei University of Technology, Wuhan
Email: dingtaostar@126.com

Received: Oct. 17th, 2013; revised: Oct. 30th, 2013; accepted: Nov. 5th, 2013

Copyright © 2013 Xiang Xu et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: When baking in a rectangular pan, heat is concentrated in the four corners and the product gets overcooked at the corners. For this, Single Rod Heat Conduction Model is set up. In Single Rod Heat Conduction Model, cakes are regarded as numerous single rods through which heat transfer from the edge to the center under the assumption that heat fluxes have no influence on each other. To simplify the model, we just analyze symmetrical regular polygon. The heat transfer law is used to calculate temperature at a certain point and then the heat flux from various directions is synthesized at the point. After composing and analyzing, we find that the greater the marginal angle is, the smaller the total heat flow is. Moreover, the heat flux leads to a sharp increase of the temperature at the point. That is the explanation for heat concentration in the four corners which results in overcooked cake.

Keywords: Thermal Conductivity; Regular Polygon; Effective Utilization of Area; Uniform Heating Rate

烤盘形状优化问题建模分析

徐翔, 陈桥红, 丁涛

湖北工业大学理学院, 武汉
Email: dingtaostar@126.com

收稿日期: 2013年10月17日; 修回日期: 2013年10月30日; 录用日期: 2013年11月5日

摘要: 在探讨使用矩形烤盘烘烤蛋糕容易使蛋糕边角烤糊的原因时, 本文建立了“单芯棒”传导模型。烘烤中的蛋糕被视为由众多单一“棒”组成, 温度的传导看作是通过这一个个“棒”从烤盘边缘向蛋糕中心传导, 并假设温度在棒中传导时互不影响。为了简化模型便于分析, 本文着重探讨了烤盘是正多边形时温度的传导情况。对蛋糕确定点温度分析时, 考虑该点四周热流的影响, 对该点四周热流进行合成, 进而分析该点一定时间内热量积聚情况。在分析后, 我们发现边缘角度越小, 在靠近边角处的总热量流越大。当时间一定时, 总热流越大, 会使该点在相同的时间内获得的热量较大, 较小的蛋糕边角, 热量积聚, 使得在烘烤蛋糕时相比远离边角的地方吸收较多的热量, 这是蛋糕被过度烘烤的主要原因。

关键词: 热传导; 正多边形; 面积有效利用率; 均匀加热率

1. 引言

烤盘的形状影响烘焙过程中温度在蛋糕内的传播。当烤盘是矩形时, 热量容易集中在烤盘的四个边角。但是, 当烤盘是圆形时, 温度则均匀分布在烤盘内部。使用矩形烤盘烘烤蛋糕, 蛋糕的四个角落

通常会被过度烘烤, 但是它可以使烤箱的利用率较高。反之, 圆形烤盘虽然使热量均匀分布, 但不能有效利用烤箱空间, 造成资源的浪费。

在本文中, 需要建立模型来分析不同形状的烤盘内的热量的分布并使用该模型来对为什么热集中在

矩形平底锅的边角的问题予以解释。同时，将对烤盘内温度均匀分布与最大化的利用烤箱两个目标予以折中，具体问题具体分析，在本文中对上述两个目标付权重 p 和 $(1 - p)$ ，为量化这两个目标，本文定义了面积有效利用率(一个正多边形面积与正多边形最小边界矩形面积之比)和均匀加热率(正多边形的内切圆面积与正多边形面积之比)两个变量^[1]。

假设蛋糕某点四周的热流互不影响，蛋糕被视为由众多单一“棒”组成，温度通过这一个个“棒”从边缘向中心传播。烘烤蛋糕时，假定烤箱和烤盘的温度恒定为 200°C ，为简化模型，本文着重探讨正多边形的烤盘，利用正多边形的对称性，只需距离边角最近的两烤盘边缘对确定点温度的作用效果。由于在角平分线上，热流的合成更具代表性，本文将重心放在正多边形角平分线上温度的分析，合成图如图1所示。

热流通过正常的方向传导到确定点是 $Q(r)$ 。法向量夹角是 ϕ 。然后，在这个点的热流是：

$$Q = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} Q(r/\cos\phi) \sin(\theta + \phi) d\phi \quad (1)$$

在温度传导过程中， $\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta s \Delta t$ 。对(1)式

分析： $Q(r)$ 随着 r 的增大而减小， $Q(r/\cos\phi)$ 随着 ϕ 的增加而减小。当边缘角 θ 增加，边缘距离 r 保持不变时，总热流量 Q 变化很小。所以一定时间内靠近边角地方的温度太高，蛋糕不会被烤得过度。

为进一步验证分析结果，用 ANSYS 软件分析，设置边界温度为 190 度，对正方形、矩形、正六边形、正八多边形、圆、圆角矩形进行分析，分析结果如图 2~图 7 所示。

根据 ANSYS 分析图，可以直观的看出在靠近正

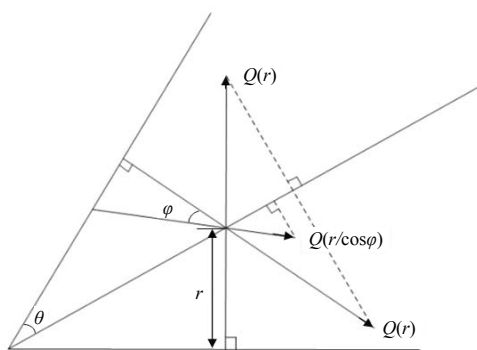


Figure 1. Heat flux combining
图1. 热流合成图

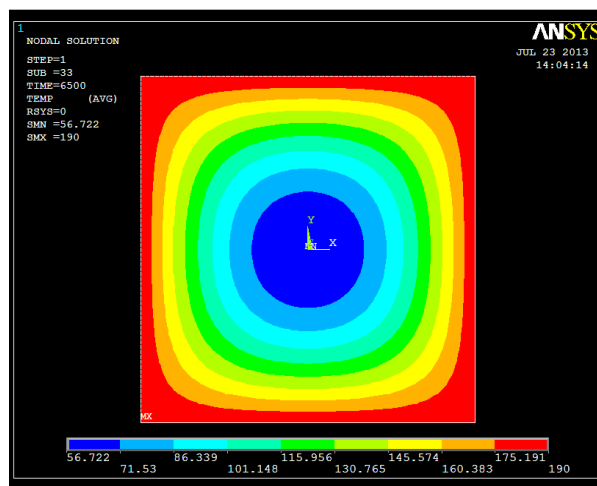


Figure 2. Temperature analysis of ovenware (Square)
图 2. 正方形烤盘温度分析图

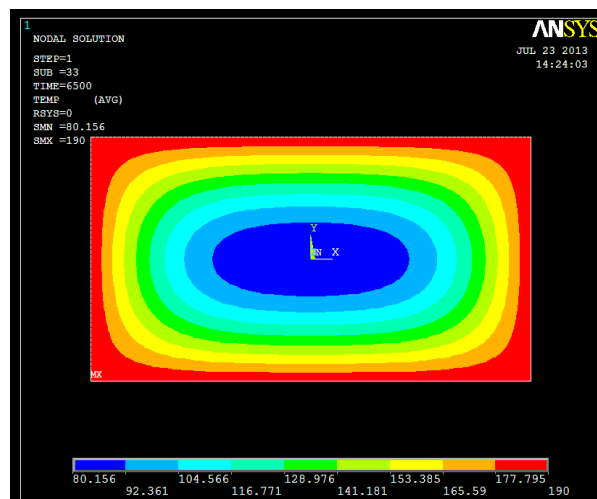


Figure 3. Temperature analysis of ovenware (Rectangle)
图 3. 矩形烤盘温度分析图

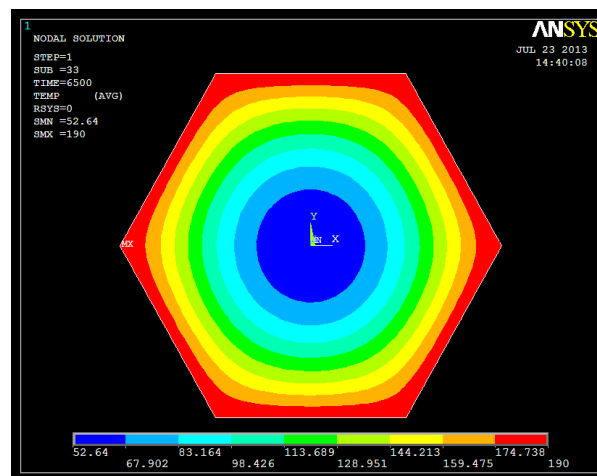


Figure 4. Temperature analysis of ovenware (Hexagon)
图 4. 六边形烤盘温度分析图

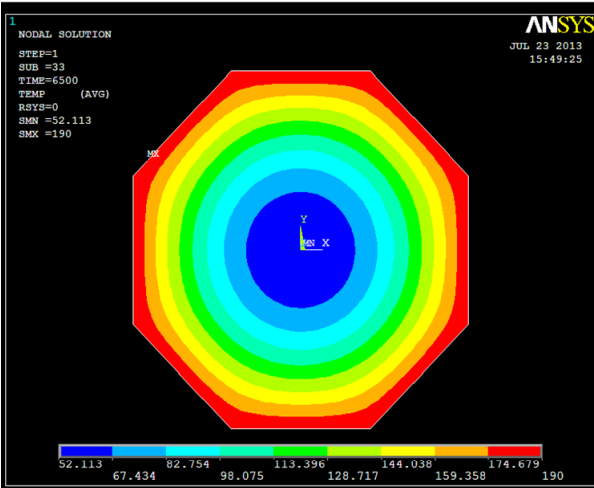


Figure 5. Temperature analysis of ovenware (Octagon)
图 5. 八边形烤盘温度分析图

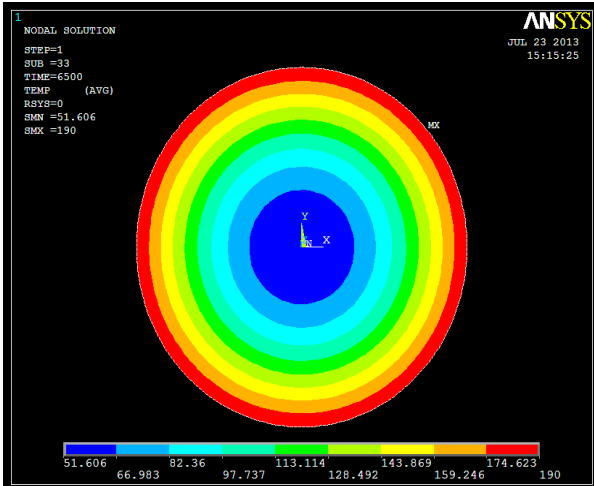


Figure 6. Temperature analysis of ovenware (Roundness)
图 6. 圆形烤盘温度分析图

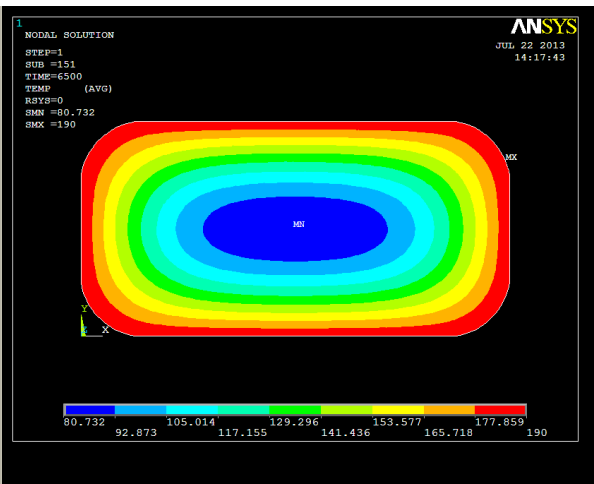


Figure 7. Temperature analysis of ovenware (Rounded Rectangle)
图 7. 圆角矩形烤盘温度分析图

多边形的边角处温度较高并且温度层的厚度不均匀，边角处的温度层较厚，因此在相同时间内会积聚较多的热量，与“单芯棒”模型得出的结论一致。为更加准确的分析温度在烤盘内的分布，以矩形为例，以烤盘中心为原点，在中心到边角的连线上采取不同点的温度，用 MATLAB 分析数据，绘得距离中心不同距离的温度分布图如图 8 所示。

分析图 8，发现在靠近烤盘边角一段距离内温度较高，且变化缓慢，即在此范围内相同时间温度积累量要大于远离边角的的地方，这进一步论证了模型的结论。

2. 设计优化烤盘

在分析时，忽视烘烤时烤盘之间的空隙。便于比较不同多边形烤盘的均匀受热情况以及其对烤箱有效利用率，在探讨不同多边形烤盘时，均在相同面积下进行，继而有效使用面积是一个常数，如果我们可以最小化被烤糊的蛋糕边角面积，同时使一次放入烤箱的烤盘数量最大，便可以达到目标。

现如今，烤箱大都是矩形，依据不同长宽比的烤箱相应的选择烤盘。在已知烤箱长宽比的情况下，选择相同的宽长比的矩形烤盘可以有效利用烤箱。但由于矩形烤盘的边角为 90 度，使得在烘烤蛋糕时，边角容易被过度烘烤，使蛋糕的质量下降。在设计上同时考虑，烘烤蛋糕时均匀受热问题。在上文中我们分析出正多边形的边数越多，边角越大，边角处的热量分布越均匀，即圆形烤盘的受热最为均匀。

为找出最优烤盘，本文定义了正多边形面积有效利用率^[2](正多边形的面积与正多边形最小外围矩形面积的比值区)，以及均匀加热率(正多边形内切圆面积与正多边形面积的比值)，来量化分析^[3]。

假设正多边形的面积为 A，对正四边形、正六边形、正八边形以及圆分析如表 1 所示。

为达到目标(蛋糕均匀受热且烤箱利用率较大)，我们优化组合——均匀受热率 η_1 和烤箱有效利用面积 η_2 ，分别赋予权重 P 和 (1 - P)，得出目标函数：

$$\begin{aligned} \max Z &= P\eta_2 + (1-P)\eta_1 = P\frac{A}{S} + (1-P)\frac{S}{A} \\ &= P\frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{2\sqrt{\cos \frac{\pi}{n}}} + (1-P)\frac{\pi}{n \tan \frac{\pi}{n}} \end{aligned} \quad (2)$$

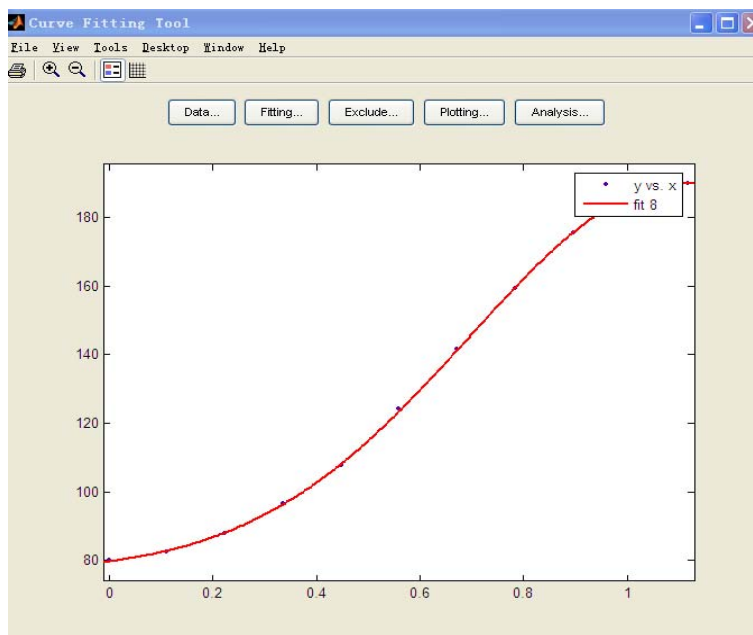


Figure 8. Distribution of temperature
图 8. 温度分布图

Table 1. Regular polygon Analysis
表 1. 正多边形分析表

| | 四边形 | 正六边形 | 正八边形 | 圆 |
|----------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| 内切圆半径 | $0.5\sqrt{A}$ | $0.5373\sqrt{A}$ | $0.5493\sqrt{A}$ | $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ |
| 内切圆面积 | 0.7894A | 0.9069A | 0.9481A | A |
| 外接圆半径 | $0.7071\sqrt{A}$ | $0.6024\sqrt{A}$ | $0.5946\sqrt{A}$ | $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ |
| 外接圆面积 | $1.5708\sqrt{A}$ | $1.2092\sqrt{A}$ | $1.1107\sqrt{A}$ | A |
| 最小外接矩形长度 | $1.4142\sqrt{A}$ | $1.2408\sqrt{A}$ | $1.1892\sqrt{A}$ | 2A |
| 最小外接矩形宽度 | \sqrt{A} | $1.0747\sqrt{A}$ | $1.0982\sqrt{A}$ | 2A |
| 最小外接矩形面积 | $1.4142A\sqrt{A}$ | $1.3334A\sqrt{A}$ | $1.3065A\sqrt{A}$ | $4A^2$ |
| 均匀受热率 | 0.7854 | 0.9069 | 0.9481 | 1 |
| 烤箱有效利用率 | 0.6336 | 0.8270 | 0.9003 | $\frac{1}{4A}$ |

其中，正多边形区域为 A；正多边形的内切圆半径

$$r_n = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{n \tan \frac{\pi}{n}}}; \text{ 内切圆面积 } S_1 = \frac{\pi A}{n \tan \frac{\pi}{n}}; \text{ 外接圆半径}$$

$$R = \frac{\sqrt{2A}}{\sqrt{n \sin \frac{2\pi}{n}}}; \text{ 外接圆面积 } S_2 = \frac{2\pi A}{n \sin \frac{2\pi}{n}}; \text{ 矩形边界}$$

$$\text{的最小长度 } b = \frac{\sqrt{2A}}{\sqrt{n \sin \frac{2\pi}{n}}}; \text{ 宽度 } a = 2 \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{n \tan \frac{\pi}{n}}}; \text{ 限定}$$

$$\text{矩形的最小面积 } S = \frac{2A}{n \sin \frac{\pi}{n}} \sqrt{\cos \frac{\pi}{n}}; \text{ 均匀受热率}$$

$$\eta_1 = \frac{S_1}{A}; \text{ 烤箱的面积有效利用率 } \eta_2 = \frac{A}{S}.$$

如果 $P < 0.5$ ，用户更加关注烤箱的利用；如果 $P \geq 0.5$ ，用户则关注于热分布的均匀性。

通过分析目标函数和正多边形边数与 η_1 以及 η_2 的关系图(如图 9)，可以发现，选择简单多边形，Z 的

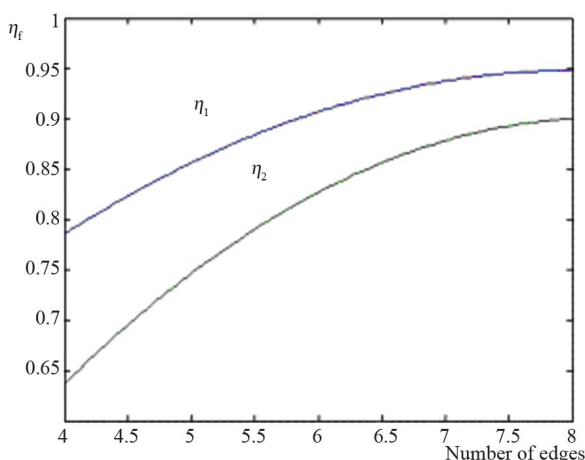


Figure 9. Relations of Sizes number of Regular polygon and η_1/η_2
图 9. 正多边形边数与 η_1 以及 η_2 的关系

最大值很难达到。所以试着结合两种类型的多边形。如果使用一个圆形烤盘，热量将均匀地分布在整个烤盘，但烤箱利用率很低。然而，矩形烤盘则是相反的。结合目标，本文将两种图形的优势结合，找出一个过渡图形——圆角矩形。

用 ANSYS 分析圆角矩形的温度分布，并绘制出对角线上距离中心不同距离的温度曲线图，如图 10 和图 11 所示。

圆角矩形烤盘的温度分布与正多边形相比，温度层的最外层厚度较为均匀，并且在距离边角的一度距离内，温度均匀变化，这使得圆角矩形边角处的蛋糕不会像正多边形烤盘边角处一样容易积聚热量，造成蛋糕易被烤糊。

应对不同的烤箱，烤盘的长宽比会相应变化。将烤盘边角圆弧化，可以使烤箱的利用率增大同时可以避免在烘烤蛋糕时边角被烤糊的情况。这只是一个较为理想的烤盘形状，在美观性上达不到精致生活人士的要求，但是可以使其从中受到启示，在选择烤盘时，避免选择边角较小的烤盘。权重 p 反映烘烤者对两个目标的重视程度，对商家而言，使蛋糕质量达到顾客可接受水平，同时使烤箱的利用率最大，进而使利润最大。而对于烘焙爱好者而言，烘焙糕点的质量尤为重要，故权重的选择因烘烤者的目标而异。

3. 结论

把蛋糕视为由众多“单棒”组成，温度在蛋糕内的传导过程被视为在细棒内部传热，进而本模型可以

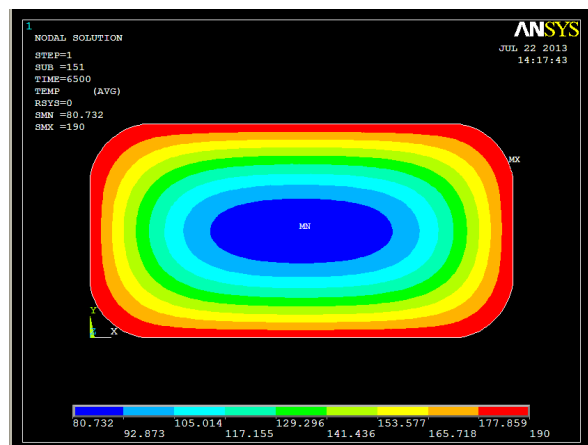


Figure 10. Temperature distribution of rounded rectangle
图 10. 圆角矩形温度分布

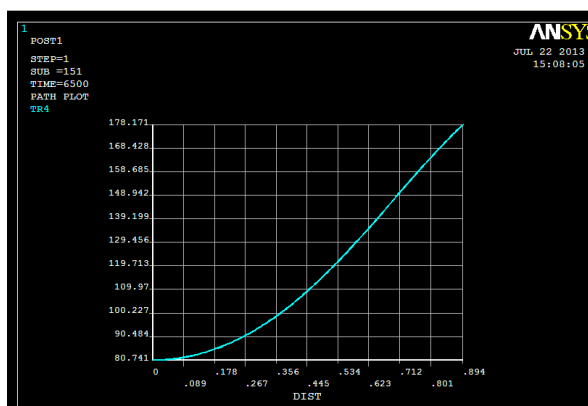


Figure 11. Temperature curve of rounded rectangle
图 11. 圆角矩形温度曲线

直观的分析出蛋糕的边角容易被烤糊的原因。本文使用有效面积利用率以及均匀加热率，通过这两个量能反应出不同形状的烤盘的传热效果，将烤盘使用者追求的目标量化，同时赋予的权重能反应使用者的偏重。

在解决烤盘优化这一问题上，可以提供一个分析解决方案，却没有给出定量分析的通式，这是本文章有待继续研究改进的地方，再者圆角矩形烤盘的四周圆的曲率还没有找到最优的组合，有待进一步探究。

参考文献 (References)

- [1] 叶启晓 (1997) 微分、微分方程建模、数学建模竞赛资源材料(第二版). 湖南大学出版社, 长沙, 231-243.
- [2] 张荆州 (2009) 先进的热传递. 北京科学出版社, 北京, 140-157.
- [3] 杨史敏, 道温泉 (2006) 传热学(第八版). 北京高等教育出版社, 北京, 115-298.