

Dynamic Modeling and Characteristic Analysis of Pedestrian Evacuation under the Influence of Attraction Source

Baihe Zhao, Zhongfei Geng, Xingli Li*

School of Applied Science, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan Shanxi
Email: lixingli80@163.com

Received: Jul. 6th, 2020; accepted: Jul. 20th, 2020; published: Jul. 27th, 2020

Abstract

A cellular automaton model based on mobile income matrix is proposed to simulate the dynamic behavior of pedestrian evacuation in a channel by considering the attraction source effect, in which the concept of core area and edge area of attraction source are introduced to quantitatively reflect the different incomes of the pedestrians in different locations. Numerical simulations are carried out to analyze how the location distribution and the size of the attraction source influence the crowd movement characteristics in a narrow channel. The macroscopic behavior of pedestrian evacuation is discussed by using space-time evolution pattern. The results show that the occurrence of attraction sources will influence the evacuation of pedestrian to a certain extent. At the low density, the attraction source has little impact on the evacuation efficiency. With the increase of the pedestrian density, the larger the influence range of the attraction source is, the longer the evacuation time will be. And the evacuation time is the longest when the attraction source is located at the entrance of the channel and near the wall in the center of the channel. The results can provide theoretical guidance for the evacuation strategies of crowded pedestrian when some attractive events appear.

Keywords

Cellular Automaton, Attraction Source, Influence Range, Evacuation Efficiency

吸引源影响下行人疏散动力学建模及特性分析

赵柏禾, 耿中飞, 李兴莉*

太原科技大学, 应用科学学院, 山西 太原
Email: lixingli80@163.com

*通讯作者。

收稿日期：2020年7月6日；录用日期：2020年7月20日；发布日期：2020年7月27日

摘要

为了研究通道中存在吸引源时行人的疏散动力学行为，本文通过不同位置的行人收益不同来描述吸引源核心区域与正常区域的行人移动特征，建立了一个基于移动收益矩阵的元胞自动机模型。数值模拟分析了吸引源的位置分布、影响范围大小等因素对通道中的行人前进方式的影响。同时利用时空演化斑图对行人疏散过程中的宏观行为特性进行了讨论。结果表明：在一定程度上通道中存在吸引源时对行人的疏散有一定的影响。行人密度较小时，吸引源对疏散效率的影响较小，随着行人密度的增加，吸引源影响范围越大，行人疏散时间越长；且吸引源位于通道入口处及通道中心靠近墙壁位置时，疏散时间最长。本文研究结果对发生吸引事件的行人密集场所疏散策略的制定可提供理论指导。

关键词

元胞自动机，吸引源，影响范围，疏散效率

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着城市规模不断扩大，城市人口迅速增长，人们的社会经济活动、文化交流活动也日趋频繁，在各类大型公共场所的群体活动规模和频次日益增加。在举行节假日集会和大型公共文化活动时，各个重要交通枢纽行人高度聚集，因密集人群的相互拥挤和交织诱发的踩踏事故时有发生，不仅给社会带来巨大经济损失，而且对人们的生命造成威胁。据不完全统计，近十年来，全世界平均每年有超过 2000 人是在大规模群体聚集活动中死亡。

目前，行人流动力学模型主要分为两类：第一类是建立于传统流体力学理论基础上的宏观模型[1]，该类模型能够直观上把握行人流的整体特性，却难以刻画行人流的局部特性。第二类是考虑个体行为的微观模型(如社会力模型[2] [3] [4]、格子气模型[5] [6] [7]和元胞自动机模型[8] [9] [10]等)，它以行人在人群中的个体特征作为分析对象，此类模型仿真度较高，且易发现产生复杂行为的机理。因此，构建合理的微观模型已成为行人流领域乃至双向流领域中最简单、最常见的方法，被许多学者广泛研究。比如：Takimoto 等人[5]发现对双向行人流间设置分割线可有效提高流量，导致临界密度增大。Fukamachi 等人[6]考虑行人的侧身效应对双向行人流的影响，结果表明侧身行为能够有效地缓解阻塞的发生。随着双向行人流研究的深入，许多学者还针对不同环境下行人行为方式及行人运动特征等情况进行了研究。如郑美容[11]、岳昊[12]等基于元胞自动机对双向行人交通流人员疏散行为进行了模拟研究，为疏散策略的选择提供了一些参考数据。

事实上，在双向行人流中经常会出现商家开业庆祝活动、街头卖艺、市民吵架等行为，我们将其称为吸引源，行人会根据自身兴趣选择性地靠近吸引源区域，吸引源所在的范围称为吸引源核心区域，周围人群可以通过吸引事件本身的影响力获得吸引源存在的范围，我们称为吸引源边缘区域。在正常情况下，受潜意识影响，双向行人流会出现分层现象，左、右行人会在各自的空间运动，类似于两个独立的

单向流，从而导致双向行人不易发生拥堵；当有吸引事件发生后，原有的动态平衡将被打破，距离吸引源较近的行人会在兴趣的驱使下逐渐靠近吸引源，这部分行人或许会穿过分界线，与正常行走的行人产生碰撞，造成行人流对冲，从而容易产生拥堵甚至发生踩踏事件。

迄今为止，国内外关于吸引源影响下的行人疏散特性研究[13]主要集中在行人行走方向的不同以及心理因素等问题[14]对疏散效率的影响，比如：行人在疏散过程中路线选择的不同[15]以及行人密度增大时出现的排队问题[16]对疏散效率产生的影响；紧急情况下行人不确定的合作行为[17] [18]或者偶然发生的行人暴力行为[19]等对行人疏散效率都有一定的影响；在双向流中行人发生团队移动现象[20] [21]以及在视野受到限制的情况下[22]行人的疏散效果等。

本文的研究区别于国内外对吸引源影响下行人不同特征的讨论，主要以吸引源自身特征为主，研究吸引源位于通道中心位置、通道中靠近上方墙壁位置、通道中靠近入口位置时对行人疏散效率的不同影响，在此基础上，逐渐增大吸引源的影响范围，观察行人的运动特征以及疏散效率与吸引源的位置和影响范围大小的关系。此结果为吸引源的研究提供进一步的理论指导。

2. 模型

2.1. 基本模型

模型建立在 $(L+2) \times (W+2)$ 的二维离散元胞网格系统，如图 1 所示， L 和 W 分别表示通道的长度和宽度，假设在一个狭窄通道内出现街头卖艺、市民吵架等具有吸引效应的事件时，疏散空间上、下两侧为墙壁，左、右两侧为出口，采用封闭边界条件，即开始仿真后不再有新的行人进入疏散空间。不同方向的行人被一条虚拟的分割线隔离开，行人可以越过分割线，红色、黄色和黑色带箭头的实心圆分别代表向左、向右移动和进入吸引源边缘区域的行人，黑色实心矩形代表进入吸引源核心区域的行人，黄色实心圆代表吸引源。根据吸引源的影响范围，这里将整个空间划分为吸引源核心区域 πR_c^2 、吸引源边缘区域 $\pi(R_e^2 - R_c^2)$ 和正常区域 $LW - \pi R_e^2$ ，其中吸引源核心区域半径为 R_c ，吸引源边缘区域半径为 R_e 。

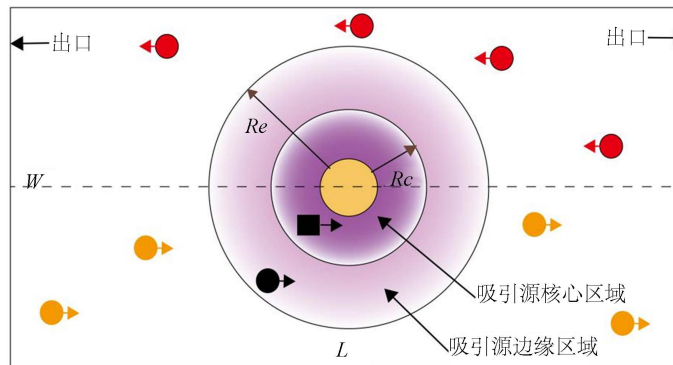


Figure 1. Sketch of model
图 1. 模型示意图

为了简化模型，将吸引源核心区域定义为二维正态分布：

$$f(x, y) = e^{-\frac{(x-m)^2 + (y-n)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

其中 (m, n) 为吸引源的位置坐标， σ^2 为正态分布方差，取 2σ 为吸引源核心区域半径，即 $R_c = 2\sigma$ ；吸引源边缘区域定义为以 R_e 为半径的圆。

2.2. 收益值计算

本文在动态参数模型的基础上,引入默认方向收益、出口收益、墙壁收益、吸引源核心区域收益和吸引源边缘区域收益,建立了一个基于行人移动收益矩阵的扩展元胞自动机模型。行人移动邻域采用 Moore 型邻域,在每个时间步长内,行人可以选择向四周八个位置移动或者原地等待,如图 2(a)所示如 d2、d8 表示向前、向后移动, d4、d6 表示向左、向右移动;每个邻域内的移动收益组合成行人移动收益矩阵,如图 2(b)所示。行人移动收益矩阵定义为:

$$A_{ij} = (1 - n_{ij}) \left[\lambda F_{ij} + \lambda^2 G_{ij} + (1 - \lambda) (D_{ij} + E_{ij} + L_{ij}) \right] \quad (2)$$

其中 (i, j) 为行人的移动邻域, D_{ij} 、 E_{ij} 、 F_{ij} 、 G_{ij} 、 L_{ij} 分别为默认方向收益、出口收益、吸引源边缘区域收益、吸引源核心区域收益和上下边界收益, λ 表示区域控制参数, $\lambda = 0$ 表示行人在正常区域, $\lambda = 2$ 表示行人进入吸引源影响区域。当行人位于吸引源边缘区域时,行人受到的吸引源收益逐渐增大,行人按照吸引源边缘区域收益和核心区域收益移动;行人在正常区域内时按照默认方向收益移动;行人位于出口邻域内时,行人按照出口收益移动;行人在上下边界附近时按照上下边界收益移动。 η_{ij} 表示元胞 (i, j) 是否被墙壁或者其他行人所占据, $n_{ij} = 1$ 时表示该元胞被占据, $n_{ij} = 0$ 时表示该元胞为空。

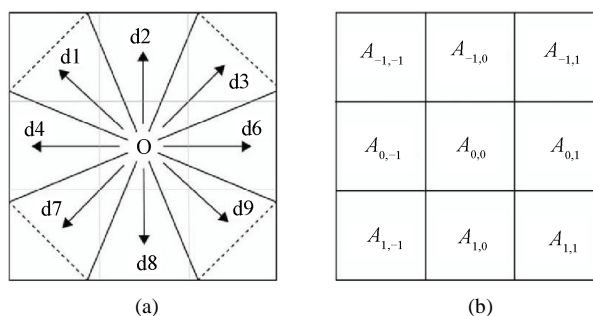


Figure 2. (a) Pedestrian mobility; (b) Pedestrian movement revenue matrix

图 2. (a) 行人移动邻域; (b) 行动移动收益矩阵

2.2.1. 出口收益

当行人位于出口附近时,该元胞对行人的吸引力为正无穷大,行人尽可能地通过出口离开疏散空间,出口收益 E_{ij} 定义为:

$$E_{ij} = \begin{cases} +\infty & (\text{元胞}(i, j)\text{为出口}) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (3)$$

2.2.2. 吸引源收益

当行人进入吸引源边缘区域时,使用吸引源边缘区域收益和吸引源核心区域收益决定行人行走方向。当通道内有吸引源事件发生后,处于吸引源边缘区域附近的行人首先根据吸引源边缘区域收益决定行人继续进入吸引源或是离开吸引源沿默认方向行走。为了更准确地描述行人靠近吸引源时的方向选择,引入吸引源核心区域收益,即行人与吸引源中心位置的距离等于吸引源核心区域范围大小时,选择停止前进驻足观看或者转变方向继续沿默认方向前进。当行人继续进入吸引源核心区域时,则该行人的移动收益矩阵中增加吸引源核心区域收益,以此来决定行人的下一步行走方向。

2.2.3. 默认方向收益

当行人位于正常区域时，按照默认方向收益移动。默认方向收益 D_{ij} 定义为：

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{与移动规则符合的元胞}) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (4)$$

这里将行人分为两类，如表 1：第一类行人表示未看到吸引源的行人，按照默认移动方向运动；第二类行人表示看过吸引源但没有兴趣并准备离开的行人，继续沿之前默认方向移动，即位于上半部分的行人朝左移动，位于下半部分的行人朝右移动。

Table 1. Pedestrians category

表 1. 行人类别

行人分类	描述	D_{ij} 取值									
第一类行人 按照初始方向移动	上方行人朝左移动	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	1	0	0	1	0	0	1	0	0
		1	0	0							
		1	0	0							
	1	0	0								
	下方行人朝右移动	<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	0	1	0	0	1	0	0	1
		0	0	1							
0		0	1								
0	0	1									
第二类行人 沿之前默认方向移动	上半部分朝左移动	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	1	0	0	1	0	0	1	0	0
		1	0	0							
		1	0	0							
	1	0	0								
下半部分朝右移动	<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	0	1	0	0	1	0	0	1	
0	0	1									
0	0	1									
0	0	1									

2.2.4. 上下边界收益

当行人位于上下边界附近时，该边界元胞对行人的吸引力为负无穷大，行人会躲避上下边界附近，转换方向行走。上下边界收益 L_{ij} 定义为：

$$L_{ij} = \begin{cases} -\infty & (\text{元胞}(i, j)\text{为上下边界}) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (5)$$

2.3. 疏散规则

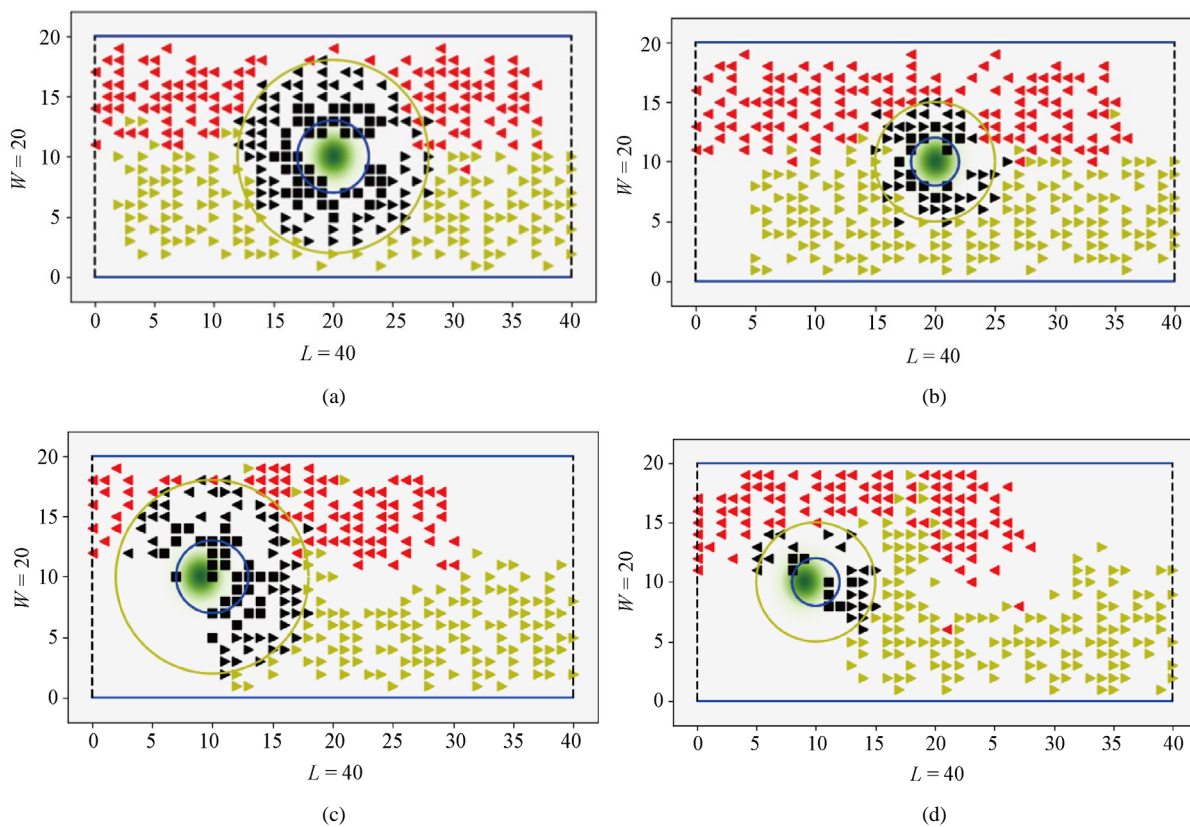
模型更新采用随机序列串行机理，行人移动规则如下：

- 1) 初始化仿真环境，行人随机均匀分布在疏散空间内，同时在通道内不同位置设置吸引源。
- 2) 计算每个行人的移动收益矩阵，行人按照最大收益值对应的方向移动。如果最大收益值对应的方向存在墙壁或其他行人，则按照第二大收益值对应的方向移动。如果行人移动收益矩阵中同时存在多个最大值，随机选取一个方向进行移动。
- 3) 更新所有行人位置。
- 4) 当行人到达出口时，移除该行人。
- 5) 重复以上步骤直到所有行人离开空间。

3. 模拟结果与讨论

初始时刻，行人以一定的密度 $\rho = N/(L \times W)$ 随机地分布在通道中，消除初始位置的随机性对结果的影响，疏散时间 T 定义为系统内所有行人离开通道时的时间总步数，均为 20 个样本平均的结果。如无特殊说明，相关参数取值为： $L = 40$ 、 $W = 20$ ，研究不同位置的吸引源以及吸引源影响范围的大小对行人疏散效率的影响，忽略行人之间吸引源信息传播的影响。本文规定 Case 1 代表吸引源在通道中心处、Case 2 代表吸引源在通道中靠近左边出口处、Case 3 代表吸引源在通道中靠近上方墙壁处。

图 3 给出了低密度时，吸引源位置不同的情况下行人疏散过程中的时空演化斑图，随着系统演化的进行，当行人遇到吸引源时，移动收益矩阵中增加了吸引源收益从而改变行人运动方向逐渐形成拥堵。Case 1、Case 2、Case 3 三种情况下，吸引源影响范围越大，行人疏散过程中产生的对流现象越多，拥堵情况越明显，Case 2、Case 3 在疏散后期更容易造成拥堵。此外，Case 3 行人越容易在吸引源核心区域形成拥堵，造成疏散效率的降低。



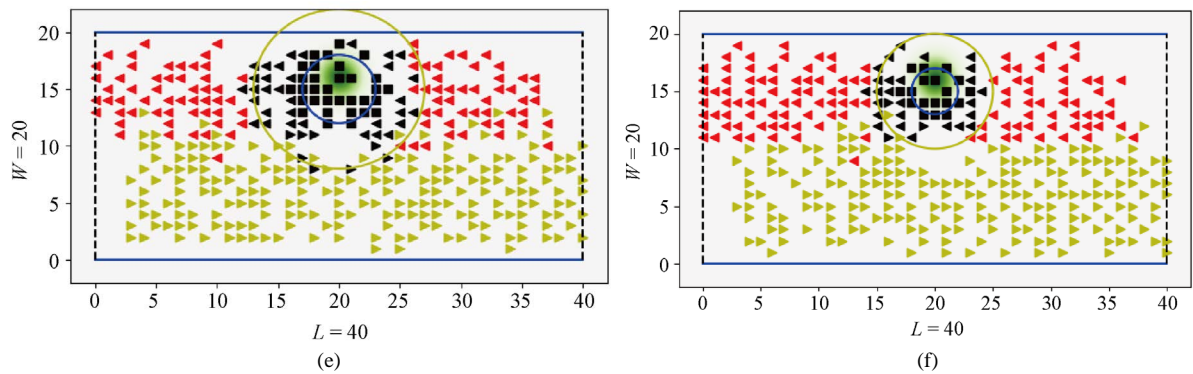
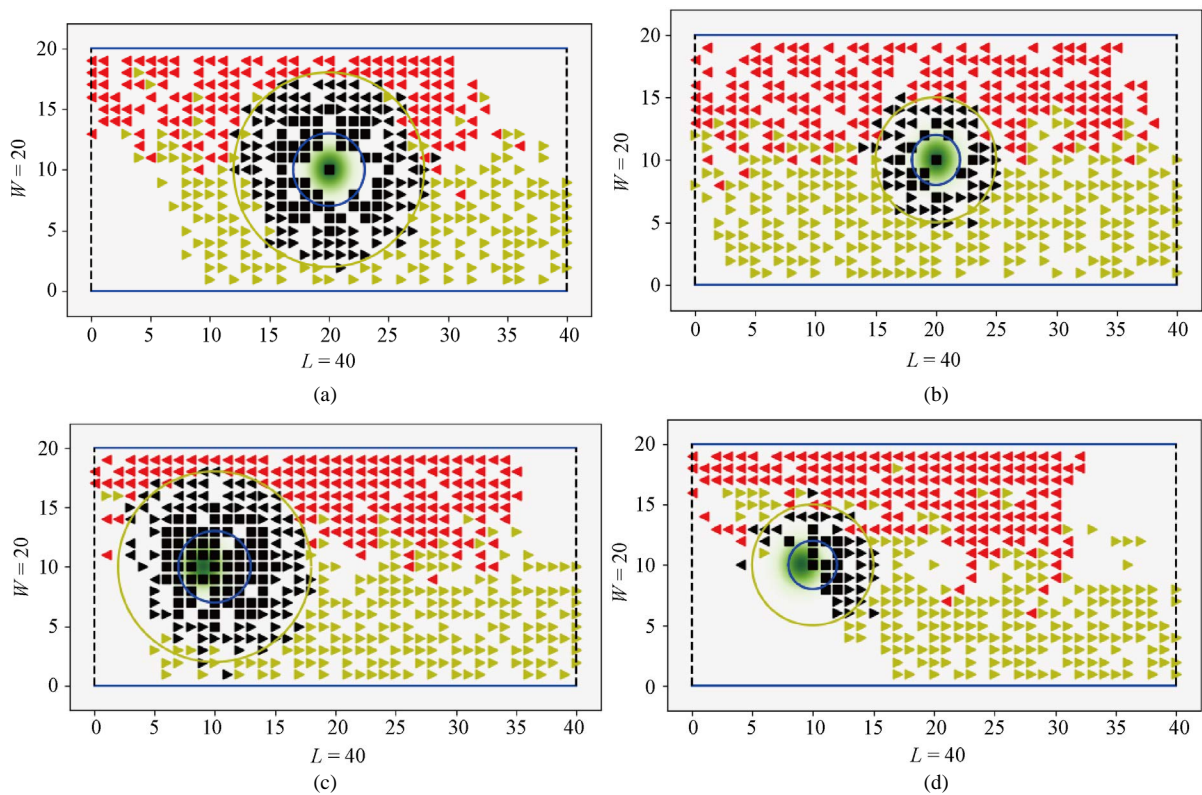


Figure 3. The space-time evolution patterns obtained at $\rho = 0.5$ for different position distributions and radius of attraction source. (a) Case 1 $R_c = 7$; (b) Case 1 $R_c = 5$; (c) Case 2 $R_c = 7$; (d) Case 2 $R_c = 5$; (e) Case 3 $R_c = 7$; (f) Case 3 $R_c = 5$

图 3. $\rho = 0.5$ 的时空演化斑图。(a) Case 1 $R_c = 7$; (b) Case 1 $R_c = 5$; (c) Case 2 $R_c = 7$; (d) Case 2 $R_c = 5$; (e) Case 3 $R_c = 7$; (f) Case 3 $R_c = 5$

图 4 给出了高密度时,吸引源位置不同的情况下行人疏散过程中的时空演化斑图。如图所示:Case 1、Case 2、Case 3 三种情况下,行人之间产生的对流行为比低密度情况显著增多,导致疏散效率明显降低,Case 2 行人的拥堵现象较早发生于 Case 3 的情况。而且因为行人密度较大,吸引源核心区域更容易发生行人拥堵情况。

图 5 给出了 Case 1、Case 2、Case 3 三种情况,吸引源影响范围不同情况下的疏散时间 T 与 ρ 的关系。由 Case 1 的密度曲线知,在不同密度区间,不同的吸引源影响范围对疏散时间的影响不同。当 $\rho \leq 0.3$ 时,



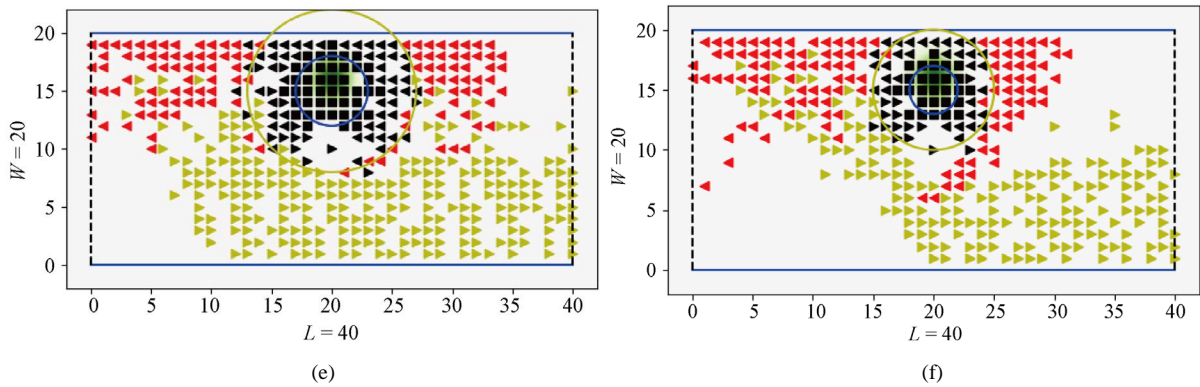


Figure 4. The space-time evolution patterns obtained at $\rho = 0.5$ for different position distributions and radius of attraction source. (a) Case 1 $R_c = 7$; (b) Case 1 $R_c = 5$; (c) Case 2 $R_c = 7$; (d) Case 2 $R_c = 5$; (e) Case 3 $R_c = 7$; (f) Case 3 $R_c = 5$

图 4. $\rho = 0.9$ 的时空演化斑图。(a) Case 1 $R_c = 7$; (b) Case 1 $R_c = 5$; (c) Case 2 $R_c = 7$; (d) Case 2 $R_c = 5$; (e) Case 3 $R_c = 7$; (f) Case 3 $R_c = 5$

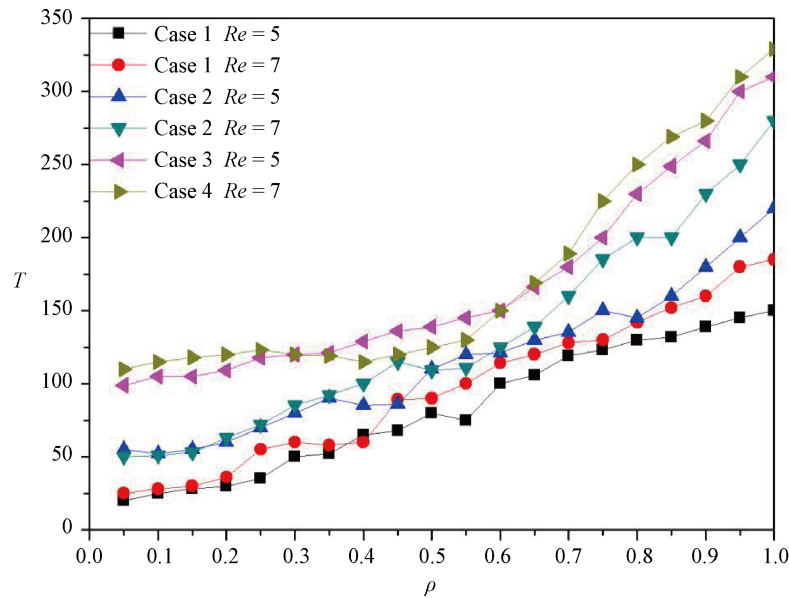


Figure 5. Relationship between evacuation time T and density ρ under attraction radius $R_c = 5, 7$ of three conditions

图 5. 吸引源边缘半径 $R_c = 5, 7$ 下三种情况的疏散时间 T 与密度 ρ 的关系图

疏散时间相差不大，低密度情况下，行人较为稀疏，可以顺利通过吸引源，发生拥堵的可能性较小。随着行人密度逐渐增大，当 $\rho \geq 0.3$ 时，不同密度区间，吸引源影响范围不同，疏散时间亦不相同。当 $0.3 \leq \rho \leq 0.5$ 时，随着吸引源影响范围的逐渐增大，行人越难以通过吸引源，疏散时间明显持续增加。当 $R_c = 7$ 时，疏散时间最长。 $\rho \geq 0.5$ 后，不同吸引源影响范围下的疏散时间发生显著变化，影响范围越大，疏散时间越长。

由 Case 2、Case 3 的密度曲线知，当 $\rho \leq 0.3$ ，所需疏散时间随密度增大而增加，在低密度下，行人之间发生拥堵可能性较小，行人大部分可以顺利通过吸引源。 $0.3 \leq \rho \leq 0.6$ 时，疏散时间随密度变化不明显，当 $\rho \geq 0.6$ 时，随着吸引源影响范围的增大，疏散时间有明显增加，在高密度情况下，吸引源位置处

在通道中靠近左边出口处以及通道中靠近上方墙壁处时更容易形成拥堵。

4. 结论

本文在元胞自动机模型的基础上, 考虑通道中存在吸引源时对行人疏散效率的影响, 建立了包含吸引源存在的元胞自动机模型。数值模拟了吸引源位置、吸引源影响范围等因素对行人疏散效率的影响。结果表明: 1) 吸引源中心位于通道中靠近上方墙壁处以及靠近左边出口处时, 行人较难以通过吸引源导致疏散效率降低; 2) 吸引源影响范围越大, 更容易造成行人的拥堵以及行人对流现象的发生。因此建议吸引源尽量位于通道中间位置, 且吸引源影响范围不宜过大, 从而提高通道整体的疏散效率。

致 谢

本论文获山西省自然科学基金(201901D111255)、山西省留学回国人员科技活动择优资助项目(2017004)资助。

参考文献

- [1] Jiang, Y.Q., Zhou, S.G. and Tian, F.B. (2015) A Higher-Order Macroscopic Model for Bi-Direction Pedestrian Flow. *Physica A*, **425**, 69-78. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.11.048>
- [2] Ma, L., Chen, B., Wang, X., Zhu, Z., Wang, R. and Qiu, X. (2019) The Analysis on the Desired Speed in Social Force Model Using a Data Driven Approach. *Physica A*, **525**, 894-911. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.087>
- [3] Ma, P., Jiang, Y., Zhu, J. and Chen, B. (2019) The Effect of Escape Signs on the Pedestrians Evacuation. *Physica A*, **534**, Article ID: 121133. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.121133>
- [4] Zhang, D., Zhu, H., Hostikka, S. and Qiu, S. (2019) Pedestrian Dynamics in a Heterogeneous Bidirectional Flow: Overtaking Behaviour and Lane Formation. *Physica A*, **525**, 72-84. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.032>
- [5] Takimoto, K., Tajima, Y. and Nagatani, T. (2002) Effect of Partition Line on Jamming Transition in Pedestrian Counter Flow. *Physica A*, **308**, 460-470. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)00550-2](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)00550-2)
- [6] Fukamachi, M. and Nagatani, T. (2007) Sidle Effect on Pedestrian Counter Flow. *Physica A*, **377**, 269-278. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.11.035>
- [7] Qiu, G., Song, R., He, S. and Yin, W. (2018) The Pedestrian Flow Characteristics of Y-Shaped Channel. *Physica A*, **508**, 199-212. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.05.015>
- [8] Li, X., Guo, F., Kuang, H., Geng, Z. and Fan, Y. (2019) An Extended Cost Potential Field Cellular Automaton Model for Pedestrian Evacuation Considering the Restriction of Visual Field. *Physica A*, **515**, 47-56. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.09.145>
- [9] Tang, T.Q., Xie, C.Z. and Chen, L. (2019) Modeling and Simulating the Pedestrian Flow in a Training School Classroom during the Pickup Period. *Physica A*, **528**, Article ID: 121281. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.121281>
- [10] Zheng, L., Peng, X., Wang, L. and Sun, D. (2019) Simulation of Pedestrian Evacuation Considering Emergency Spread and Pedestrian Panic. *Physica A*, **522**, 167-181. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.01.128>
- [11] 郑美容. 基于元胞自动机的人员疏散行为模拟研究[J]. 陕西理工学院学报(自科版), 2016, 32(2): 39-44.
- [12] 岳昊, 邵春福, 姚智胜. 基于元胞自动机的行人疏散流仿真研究[J]. 物理学报, 2009, 58(7): 4523-4530.
- [13] Li, X., Geng, Z., Kuang, H., *et al.* (2019) Effect of Dangerous Source on Evacuation Dynamics in Pedestrian Counter Flow. *Physica A*, **533**, Article ID: 122047. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122047>
- [14] Li, X., Guo, F., Kuang, H., *et al.* (2017) Effect of Psychological Tension on Pedestrian Counter Flow via an Extended Cost Potential Field Cellular Automaton Model. *Physica A*, **487**, 47-57. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.05.070>
- [15] Hoogendoorn, S.P., van Wageningen-Kessels, F., Daamen, W., *et al.* (2015) Continuum Theory for Pedestrian Traffic Flow: Local Route Choice Modelling and Its Implications. *Transportation Research Part*, **59**, 183-197. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2015.05.003>
- [16] Hu, J., You, L., Zhang, H., *et al.* (2018) Study on Queueing Behavior in Pedestrian Evacuation by Extended Cellular Automata Model. *Physica A*, **489**, 112-127. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.07.004>
- [17] Cheng, Y. and Zheng, X. (2019) Effect of Uncertainty on Cooperative Behaviors during an Emergency Evacuation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **66**, 216-225.

<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.06.022>

- [18] Martinez-Gil, F., Lozano, M. and Fernandez, F. (2017) Emergent Behaviors and Scalability for Multi-Agent Reinforcement Learning-Based Pedestrian Models. *Simulation Modelling Practice and Theory*, **74**, 117-133. <https://doi.org/10.1016/j.simpat.2017.03.003>
- [19] Epstein, J.M. (2002) Modeling Civil Violence: An Agent-Based Computational Approach. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **99**, 7243-7250. <https://doi.org/10.1073/pnas.092080199>
- [20] Wang, Z., Song, B., Qin, Y., *et al.* (2012) Team-Moving Effect in Bi-Direction Pedestrian Flow. *Physica A*, **391**, 3119-3128. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.12.066>
- [21] Lämmel, G. and Flötteröd, G. (2015) A CA Model for Bidirectional Pedestrian Streams. *Procedia Computer Science*, **52**, 950-955. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.05.171>
- [22] Wang, P. and Cao, S. (2019) Simulation of Pedestrian Evacuation Strategies under Limited Visibility. *Physics Letters A*, **383**, 825-832. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2018.12.017>