

# 基于移动质量弹簧系统的桥式起重机动力学特性研究

周成, 胡雷, 温辉

上海理工大学, 上海

收稿日期: 2021年12月2日; 录用日期: 2022年1月19日; 发布日期: 2022年1月26日

---

## 摘要

本文以单梁桥式起重机为研究对象, 建立了移动质量弹簧系统运动微分方程, 并在有限元中针对主梁进行了模态分析, 采用位移耦合法对移动质量弹簧系统进行建模, 数值结果表明: 小车在主梁上移动时, 理论阶与有限元解十分相近, 在简支边界条件下, 小车位于主梁边界位置时, 系统的固有频率有所降低, 主梁跨中响应曲线与小车的移动速度, 承载质量和钢丝绳刚度都有着密切关系。

## 关键词

桥式起重机, 质量弹簧系统, 有限元

---

# Dynamic Characteristics of Bridge Crane Based on Moving Mass Spring System

Cheng Zhou, Lei Hu, Hui Wen

University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Dec. 2<sup>nd</sup>, 2021; accepted: Jan. 19<sup>th</sup>, 2022; published: Jan. 26<sup>th</sup>, 2022

---

## Abstract

In this paper, the single girder bridge crane is taken as the research object. The movement differential equation of the moving mass spring system is established, and the modal analysis of the main beam is carried out in the finite element method. The moving mass spring system is modeled by the displacement coupling method. The numerical results show that: when the trolley moves on the main beam, the theoretical order is very close to the finite element solution. Under the simply supported boundary condition, when the trolley is at the boundary position of the main beam, the natural frequency of the system is reduced. The response curve of the mid-span of the main beam

is closely related to the moving speed of the trolley, the bearing mass and the stiffness of the wire rope.

## Keywords

Bridge Crane, Mass Spring System, The Finite Element

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

桥式起重机操作方便、搬运范围广、结构简单,被广泛应用与工业装配、港口物流、农业装备等。当小车承载重物在主梁上行驶时,车桥接触点的位置在时刻变化,其形函数矩阵在不断改变,因此这个车桥耦合系统是一个时变系统。在以往桥式起重机的结构设计中,大部分研究员都注重起重机主梁的静态特性研究,从材料力学角度出发对主梁结构进行强度校核以及结构设计,并用有限元静力学分析结果作为辅助验证手段,部分工程师对主梁的模态分析也做了深入的研究。赵俊杰等人[1]在不同工况下起升和制动过程建立了动力学微分方程,并采用 Matlab 进行求解;赵文涛等人[2]利用有限元软件分析了小车位于主梁跨中和悬臂端时的模态特性;李心爽等人[3]研究了移动质量与主梁耦合系统对固有频率的影响。但很少有学者研究小车承载重物在主梁上移动时的动态特性。

本文采用有限元分析方法,把主梁化为欧拉梁模型,将小车、钢丝绳及重物作为在梁上移动的弹簧质量系统,考虑不同的质量、小车移速、钢丝绳刚度的影响,计算分析桥梁的振动特性。

## 2. 移动质量弹簧系统基本理论

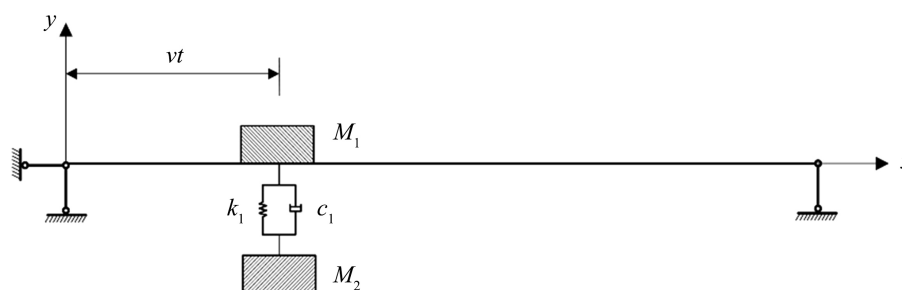


Figure 1. Moving mass spring system

图 1. 移动质量弹簧系统

移动质量弹簧系统如图 1 所示,将主梁当作两端简支的欧拉梁模型,其动力平衡方程为:

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \delta(x-vt)P(x,t) \quad (1)$$

式中,  $EI$  和  $m$  分别为梁的弯曲刚度和单位长度质量,  $y(x,t)$  表示梁在距离  $x$  处  $t$  时刻的挠度,  $v$  为质量弹簧系统在梁上的移动速度,  $\delta$  为 Dirac 函数,  $P(x,t)$  为梁所受到的作用力,假设  $u_1$  为小车的竖向位移,  $u_2$  为重物的竖向位移,  $P(x,t)$  可表示为:

$$P(x,t) = M_1g + M_2g - M_1 \frac{d^2y(x,t)}{dt^2} + k_1 [u_2(t) - y(x,t)]_{x=vt} + c_1 \left[ \frac{du_2(t)}{dt} - \frac{dy(x,t)}{dt} \right]_{x=vt} \quad (2)$$

式中,  $M_1$  和  $M_2$  为小车和重物的质量,  $k_1$  和  $c_1$  为钢丝绳的刚度和阻尼。

由于小车和主梁始终接触不分离, 因此有耦合条件:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= y(x,t)|_{x=vt} \\ \frac{du_1(t)}{dt} &= \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy(x,t)}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dy(x,t)}{dt} = v \frac{dy(x,t)}{dx} + \frac{dy(x,t)}{dt} \\ \frac{d^2u_1(t)}{dt^2} &= \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( v \frac{dy(x,t)}{dx} + \frac{dy(x,t)}{dt} \right) = v^2 \frac{d^2y(x,t)}{dx^2} + 2v \frac{d^2y(x,t)}{dxdt} + \frac{d^2y(x,t)}{dt^2} \end{aligned} \quad (3)$$

根据振型分解法, 简支梁振动时的动位移  $y(x,t)$  可表示为:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \eta_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{L} \eta_i(t) \quad (4)$$

将(4)式代入(1)式, 乘以形函数  $\phi_n(x)$ , 并沿主梁长度  $L$  积分, 可得第  $n$  阶模态的振动方程为:

$$\ddot{\eta}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{\eta}_n(t) = \frac{2}{mL} \int_0^L \delta(x-vt) P(x,t) \phi_n(x) dx \quad (5)$$

$$\omega_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (6)$$

其中  $\omega_n$  为简支梁第  $n$  阶固有角频率,  $\xi_n$  为第  $n$  阶模态阻尼比, 再将(3)式和(4)式代入(2)式得:

$$\begin{aligned} P(x,t) &= M_1g + M_2g - M_1 \left( v^2 \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i''(x) \eta_i(t) + 2v \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i'(x) \dot{\eta}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \ddot{\eta}_i(t) \right) \\ &+ k_1 \left[ u_2(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \eta_i(t) \right] + c_1 \left[ \frac{du_2(t)}{dt} - v \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i'(x) \eta_i(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \dot{\eta}_i(t) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

将(6)式代入(5)式得:

$$\begin{aligned} &\ddot{\eta}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{\eta}_n(t) \\ &= \frac{2}{mL} \left\{ M_1g + M_2g - M_1 \left( v^2 \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i''(x) \eta_i(t) + 2v \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i'(x) \dot{\eta}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \ddot{\eta}_i(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + k_1 \left[ u_2(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \eta_i(t) \right] + c_1 \left[ \frac{du_2(t)}{dt} - v \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i'(x) \eta_i(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \dot{\eta}_i(t) \right] \right\} \phi_n(t) \end{aligned} \quad (8)$$

重物  $M_2$  的动力平衡方程为:

$$M_2 \ddot{u}_2(t) + k_1 \left[ u_2(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \eta_i(t) \right] + c_1 \left[ \dot{u}_2 - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \dot{\eta}_i(t) \right] = 0 \quad (9)$$

取前  $N$  阶, 联立(7)式和(8)式并写成矩阵的形式:

$$[M] \{\ddot{\eta}(t)\} + [C] \{\dot{\eta}(t)\} + [K] \{\eta(t)\} = \{F(t)\} \quad (10)$$

运用四阶龙格库塔求解(10)式微分方程就可得到小车在主梁上运动的时程曲线。

### 3. 有限元模型

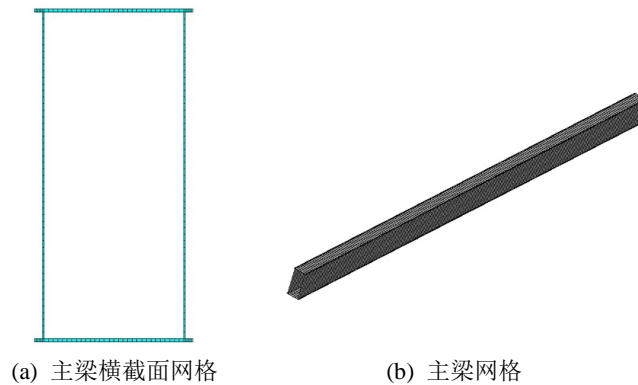
#### 3.1. 主梁网格划分

某单梁桥式起重机箱型主梁结构网格划分如图2所示,钢质主梁横截面为箱型结构,跨度 $l$ 为15 m,额定起重量为5 t,主梁结构的横截面数据如表1所示。

**Table 1.** Cross section parameters of main beam

**表 1.** 主梁横截面参数

腹板高度 h/m	腹板宽度 b/m	上下腹板厚度 t/m	左右腹板厚度 t/m	腹板间距 t/m
1.4	0.68	0.012	0.006	0.6



**Figure 2.** Grid division of box girder structure  
**图 2.** 箱型主梁结构网格划分

根据横截面参数,可计算出主梁截面惯性矩[4]:

$$I = \int_A z^2 dA = 1.088 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

通过式(6)可计算出简支梁的前三阶理论固有频率为 5.049 Hz、20.197 Hz、45.443 Hz。

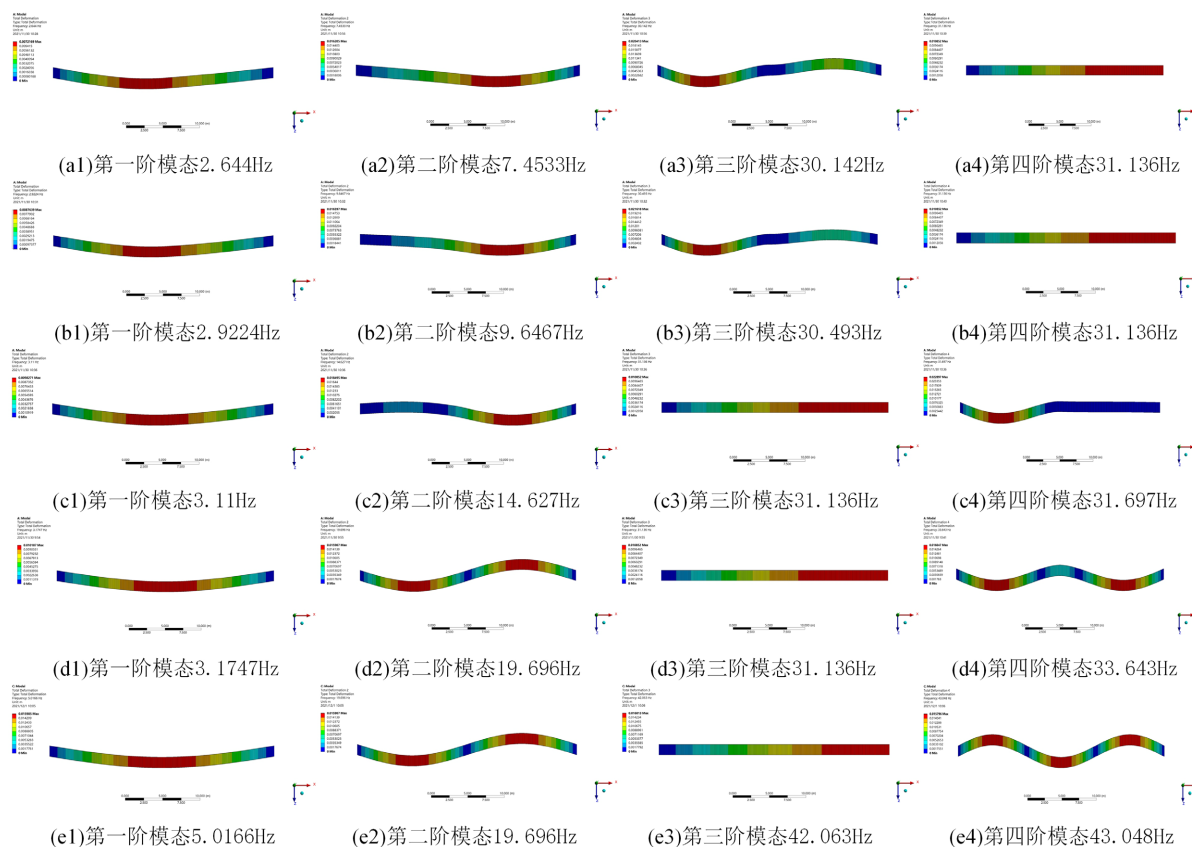
#### 3.2. 主梁模态分析

本文采用有限元软件先对主梁进行模态分析。主梁采用 beam188 单元主梁采用 beam188 单元[5],弹性模量为 2E11Pa,密度为 7850 kg/m<sup>3</sup>,边界为两端简支,当小车满载位于主梁不同位置时,计算了前四阶固有频率和振型,前四阶固有频率如表2所示,前六阶振型如图所示。

**Table 2.** Modal natural frequency of main beam of single beam bridge crane

**表 2.** 单梁桥式起重机主梁模态固有频率

小车位置	一阶频率/Hz	二阶频率/Hz	三阶频率/Hz	四阶频率/Hz
左端极限位置	2.644	7.4533	30.142	31.136
左端 1/6 位置	2.9244	9.6467	30.493	31.136
左端 1/3 位置	3.11	14.627	31.136	31.697
跨中位置	3.1747	19.696	31.136	33.643
无小车	5.0166	19.696	42.063	43.048



**Figure 3.** Modal shape of main beam ((a) the trolley is located at the extreme position of the left end; (b) the trolley is located at 1/6 of the left end; (c) the trolley is located at 1/3 of the left end; (d) trolley in mid-span position; (e) no trolley)

**图 3.** 主梁模态振型((a) 小车位于左端极限位置; (b) 小车位于左端 1/6 位置; (c) 小车位于左端 1/3 位置; (d) 小车位于跨中位置; (e) 无小车)

由图 3 可知, 单梁桥式起重机在简支边界条件下, 前四阶固有频率及振型有所变化, 中间弯曲振型始终为第一阶模态, 一阶固有频率随小车靠中小幅上升了 0.53 Hz (20%)。右侧弯曲振型所对应的模态随小车往中移动变化较大, 固有频率增加了 12.24 Hz (96%), 而左侧弯曲模态相对右侧弯曲模态其固有频率变化较小, 只增加了 1.56 Hz (5.16%)。当小车移动到跨中位置时, 左侧弯曲和右侧弯曲模态消失, 合并成为 S 形弯曲模态, 二阶固有频率明显上升。小车位于任何位置, 轴向拉伸所对应的模态固有频率始终不变。若只考虑主梁自身模态, 其各界固有频率比有小车时略有升高, 与理论固有频率非常接近, 因此, 当小车承载重物越靠近边界时, 其前四阶固有频率越小, 与文献[6]中的结果趋势相近, 在设计主梁结构以及额定承载时, 需考虑小车在边界时的承载能力。

### 3.3. 移动质量弹簧系统有限元分析

由于小车在主梁上运动时, 小车始终与主梁不分离, 因此本文采用位移耦合方法来分析主梁在移动质量弹簧系统下的振动[7]。主梁仍然采用 beam188, 具体参数如表 2 所示。小车和重物都采用 Mass21 单元, 用 Combin14 模拟钢丝绳, 本文采用循环求解的方式, 根据小车的移动速度施加水平节点位移, 并将小车质量单元与梁单元在竖直方向做节点耦合, 使小车经过主梁上的每个节点, 从而实现小车的移动。将小车在左端时的静力学解作为初始条件(零初始速度、有初始位移), 运用 NewMark 方法对该动力学模型进行求解。

图 4 为钢丝绳刚度为  $3 \times 10^6$  N/m，阻尼  $1 \times 10^4$  kg/s，小车在满载状态下以 3 m/s 运动时主梁跨中响应曲线理论与有限元的对比图，从图中可以看出，有限元解与理论解十分相近，验证了有限元模型的正确性。

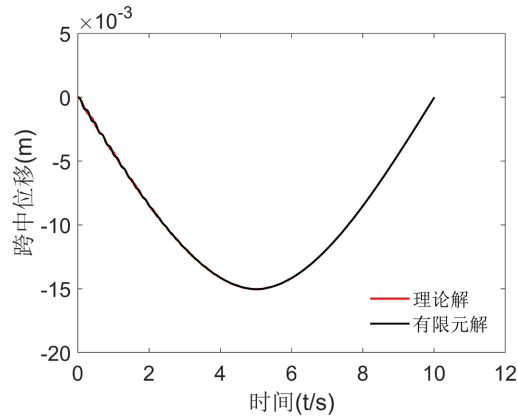


Figure 4. Theoretical solution and finite element solution  
图 4. 理论解与有限元解

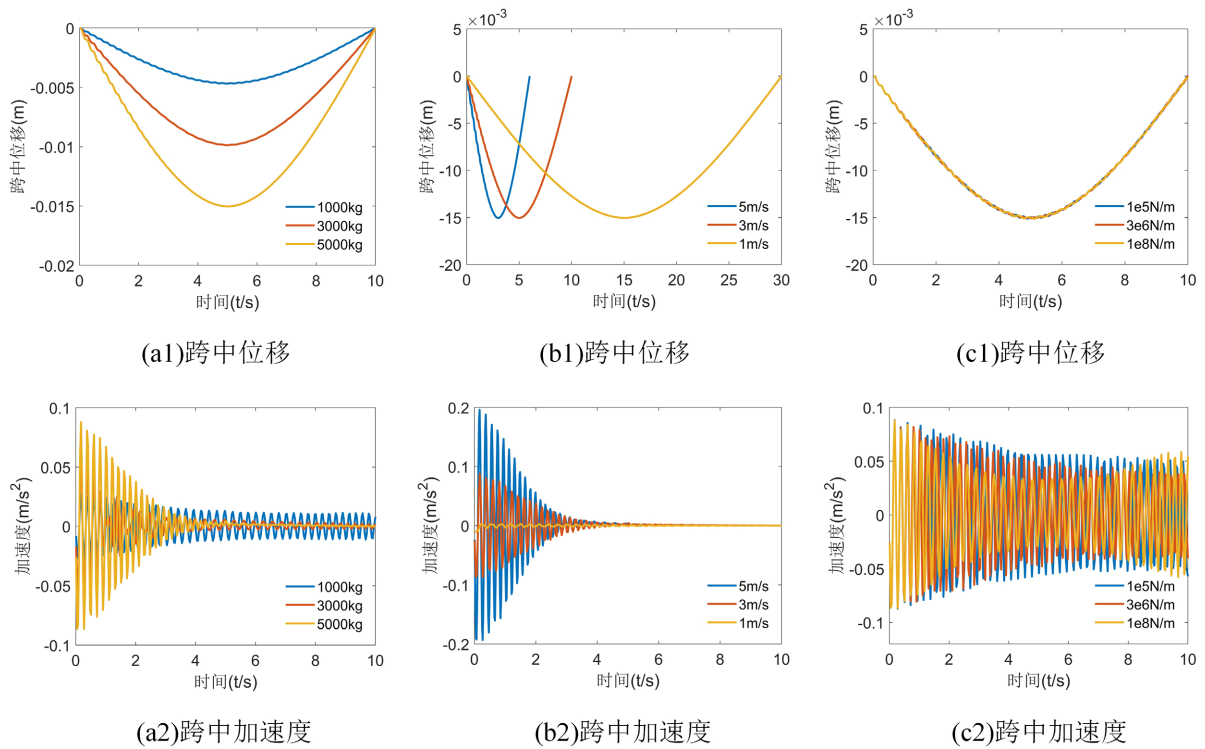


Figure 5. Midspan displacement and acceleration of main girder under different conditions ((a) different load mass; (b) different moving speed of trolley; (c) different stiffness of wire rope)  
图 5. 不同条件下主梁跨中位移和加速度((a) 不同承载质量; (b) 小车不同移动速度; (c) 钢丝绳不同刚度)

图 5 展示了小车承载不同重量，小车不同移速以及钢丝绳不同刚度对主梁跨中位移的影响。结果表明，小车承载质量对主梁结构响应影响较大，在前半段位移中，质量越大，跨中位移以及加速度幅值都越大，后半段由于受到阻尼影响，质量越大振幅的衰减速度也较大。小车在主梁上的移动速度对结构位

移响应很小, 但是对加速度响应影响很大, 速度增大会使跨中加速度响应幅值显著增大。钢丝吊绳的刚度对结构位移响应和加速度响应影响十分微小, 因此可以忽略刚度对起重机的影响。

#### 4. 结论

本文以单臂桥式起重机为研究对象, 分别运用理论与有限元计算了主梁的模态以及振动响应, 得出以下结论:

1) 在两端简支的边界条件下, 小车靠近边界时, 系统的模态固有频率越高, 随着小车向中移动, 系统两边弯曲的振型会消失。

2) 小车承载重物在主梁上移动的过程中, 承载质量和速度对结构响应影响大, 钢丝吊绳刚度的影响极小, 因此在简化模型时可以忽略弹簧刚度对系统带来的影响。

#### 参考文献

- [1] 赵俊杰. 起重机提升系统和主梁扭振动力学研究及其多目标优化[D]: [博士学位论文]. 长沙: 中南大学, 2013.
- [2] 赵文涛, 余峰, 吴畏, 等. 基于 ANSYS 的门机金属结构系统动态特性分析[J]. 机械, 2018, 45(4): 27-31.
- [3] 李心爽, 梁岗. 移动质量作用下桥式起重机主梁振动分析[J]. 起重运输机械, 2016(4): 59-63.
- [4] 王新敏. ANSYS 结构动力分析与应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2014: 168-183
- [5] 王胜斌, 吴肖波, 唐国喜, 柴小鹏. 双工字钢-混凝土板组合梁桥车桥耦合振动研究[J]. 世界桥梁, 2019, 47(3): 38-43.
- [6] 苏文利. 基于 ANSYS 的双梁桥式起重机主梁振动特性研究[J]. 机电产品开发与创新, 2020, 33(6): 31-33.
- [7] 钱尼君, 乔芳, 王成军, 李勇, 李志农. 基于 Workbench 六面体网格的桥式起重机受载主梁有限元分析[J]. 矿山机械, 2021, 49(11): 57-61.