

# 齿轮轴装配体的有限元摩擦接触分析

李瑞阁, 于 嫣

上海理工大学, 上海

收稿日期: 2022年12月28日; 录用日期: 2023年1月23日; 发布日期: 2023年1月30日

## 摘 要

文章基于有限元分析法对啮合齿轮轴装配体进行摩擦接触的准静态力学分析。使用有限元理论的求解器进行范式应力的计算求解, 同时基于轮齿接触相关理论及轮齿摩擦关系, 探究常摩擦因数下的应力仿真结果及其对齿轮副的接触特性的影响; 考虑到网格划分会影响分析结果的精度, 探究不同网格大小对齿轮轴等效应力的影响。从得到的等效应力分布云图可以看出, 齿轮最容易发生破坏的部位是在接触区域和相应的齿根处, 且网格细化次数越多, 应力分析结果越准确。

## 关键词

有限元分析, 齿轮轴装配体, 摩擦接触, 范式应力

# Finite Element Friction Contact Analysis of Gear Shaft Assembly

Ruige Li, Yan Yu

University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Dec. 28<sup>th</sup>, 2022; accepted: Jan. 23<sup>rd</sup>, 2023; published: Jan. 30<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

In this paper, the finite element method is used to analyze the quasi-static mechanics of the friction contact of the meshing gear shaft assembly. The solver of finite element theory is used to calculate the normal form stress, and the stress simulation results under constant friction factor and their effects on the contact characteristics of gear pairs are explored based on the relevant theory of gear tooth contact and the gear tooth friction relationship; Considering that mesh generation will affect the accuracy of the analysis results, we explore the influence of different mesh sizes on the gear shaft equivalent force. From the obtained equivalent stress distribution cloud diagram, it

can be seen that the most vulnerable parts of the gear are in the contact area and the corresponding tooth root, and the more mesh refinement times, the more accurate the stress analysis results.

## Keywords

Finite Element Analysis, Shaft Gear Assembly, Frictional Contact, Von Mises Stress

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

齿轮轴是变速器上的一个关键构件, 它担负着传递动力和扭矩、调解转速的作用。其中轴上的渐开线直齿圆柱齿轮是工程中传递载荷应用最为广泛的机械零件[1], 齿轮具有传递功率大、传动比准确、安全可靠的性能优点[2]。齿轮之间的接触属于线接触, 这使得齿面的接触区域的接触应力很大, 甚至会产生应力集中的现象, 可导致齿轮断裂, 存在安全隐患。同时在不断的接触、分离的作用下, 齿轮在不断啮合的过程中会很容易产生齿面接触点蚀和齿根弯曲疲劳折断的现象。对于此问题国内外有不少学者对齿轮轴的啮合过程中力的分布做了大量研究。如: 南华大学的宋友明等人针对齿轮泵中受力复杂的齿轮一体轴进行有限元分析, 分析结果表明: 在施加转矩的情况下, 齿轮轴中最容易发生破坏的部位是在与输入转矩相联接的键槽附近[3]。翁剑成等人以拖拉机变速箱中的齿轮为例, 借助传统有限元方法研究了给定转速下齿轮啮合处的接触应力, 同时也将结果与赫兹接触计算的理论结果进行对比[4]。侯志勇等人开发了用于渐开线圆柱齿轮啮合接触的软件, 该软件先进行三维建模然后计算接触过程中圆柱齿面接触应力的值, 同时将其应力分析结果进行可视化, 还探究了改善接触应力的方法——齿廓修形[5]。很多文献中对齿轮的力学分析都假定其在理想的状态下, 忽略了一些可能具有影响的因素, 实际上机械零件的接触必然伴随摩擦。国内外学者也曾经探讨过摩擦力对接触应力的影响, 最早的应用研究起源于 1963 年的 Dowson 等人认为摩擦力对接触没有影响, 提出在研究中不用考虑摩擦力。但是随着后人更近一步的对摩擦力学问题做更深入分析和理论研究, 得到的结论并非如此。太原理工大学的高创宽研究了带摩擦齿轮的转速、功率、材质、齿数、模数及内部润滑剂等因素对齿轮的应力分布的影响, 并给出了这些因素共同影响的两个临界点 S1 和 S2 [6]。刘辉探求不同摩擦系数对齿面接触力变化的基本规律影响[7]。随着对摩擦的研究越来越深入以及在生产生活中的经验, 人们逐渐得知轮齿齿面摩擦会使齿轮传动系统产生噪音和振动, 降低其使用寿命, 严重情况下会破坏整个生产系统。但目前相对精确的轴齿轮接触应力方面的研究很少, 齿轮轴的应力分析情况与齿轮和轴的形状、尺寸和材料也是密切相关的, 这也是齿轮轴分析没有准确结论的原因之一。

本文主要基于有限元法对齿轮轴装配体接触进行准静态分析, 经过有限元前处理的划分网格、施加载荷和约束, 依据轮齿接触相关理论及轮齿摩擦关系, 对常摩擦因数为 0.15 的齿轮轴装配体进行应力仿真分析, 探究摩擦对齿轮副的接触影响, 得到接触装配体的等效力分布云图。同时考虑到网格划分会影响分析结果的精度, 所以探究了不同网格大小对齿面接触应力的影响; 结果表明, 随着网格的不断细化, 网格的大小会影响分析结果的精度。且在不考虑齿轮材质和齿面粗糙度时, 摩擦力使得齿轮最容易发生破坏的部位表现在接触区域和相应的齿根处, 考虑摩擦会使接触分析的结果更准确。

## 2. 齿轮轴啮合装配体的三维建模

在三维软件中对齿轮、轴、以及齿轮与轴连接的键进行建模, 将其组装成相互啮合的齿轮轴装配体, 并进行齿轮与齿轮之间的啮合装配, 使其能够传递动力, 图 1 是齿轮模型的截面图, 齿轮数据如表 1 所示, 整个的装配效果如图 2 所示。

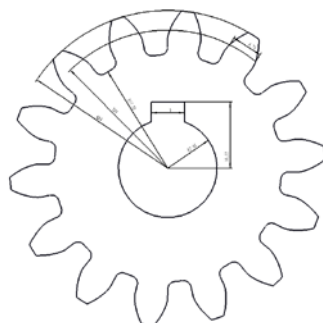


Figure 1. Tooth section

图 1. 齿轮截面图

Table 1. Gear geometry parameter

表 1. 齿轮几何参数

名称	主动轮	从动轮
模数	3	3
齿数	14	14
齿宽	25	25
法相压力角	20	20
齿顶高系数	1	1
顶隙系数	0.25	0.25

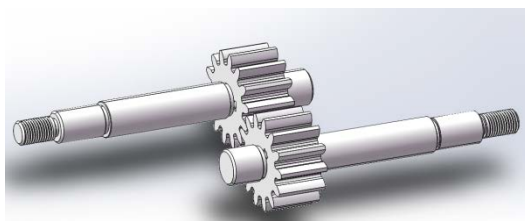


Figure 2. Gear shaft assembly drawing

图 2. 齿轮轴装配图

## 3. 齿轮摩擦接触

### 3.1. 摩擦理论

摩擦是一种极其复杂的物理现象, 主要取决于接触物体的材料、表面粗糙度、温度、摩擦前后物体的相对速度等各种参数关系的影响。摩擦力与运动距离不呈线性关系, 具有一定的随机性。

考虑相互接触物体存在滑动摩擦时, 根据库伦摩擦可知, 作用在接触面上的外力只能是压力不能是拉力, 将压力分解为法向压力和剪切力。接触面之间存在与剪切方向相反的摩擦力, 摩擦力大小与剪切

力有关, 与接触面积无关。随着剪力的增加, 摩擦力也随之增加。任何进一步的剪切强化都会使两个接触点向力作用方向滑动。当剪切力大于静摩擦力时, 接触面开始蠕动也称之为滑移, 滑移时摩擦力公式:

$$f = \mu N \quad (1)$$

式中的  $\mu$  为滑动摩擦系数,  $N$  为正压力。

当剪切力大于静摩擦力时, 两个接触面开始滑动。在剪切力大于静态剪切力之前, 摩擦元件还允许两个接触面之间存在较小的相对位移。如果滑动, 应规定接触界面处的最大允许剪应力, 并应设置恒定的最大值和限制剪应力, 以防止计算的剪应力超过过度接触压力下的材料屈服强度, 即:

$$Max = 0.577\sigma_y \quad (2)$$

在对齿轮进行摩擦接触分析时, 根据齿轮受摩擦力作用下的力学模型, 对其进行力的分解, 推断考虑摩擦时的齿面接触应力。齿轮处在啮合状态时, 同时承受法向力  $F_n$  和齿间摩擦力  $F_f$ , 将其二力延长至与轮齿的中线交接处 C、D, 对其进行力的分解, 在力的分解图 3 中, 法向力的正弦分量与摩擦力的余弦分量都在轮齿的中线上, 且方向相反, 其影响力很小, 可忽略不计。

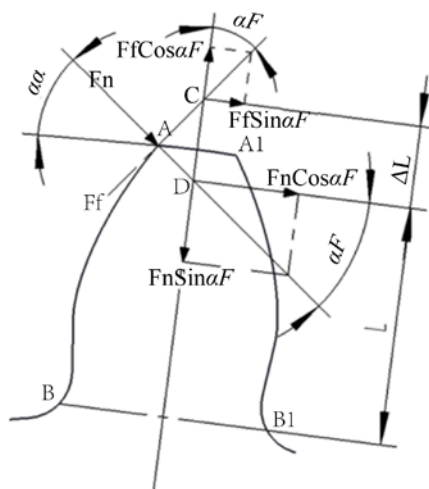


Figure 3. Mechanics model with friction  
图 3. 摩擦力作用下的轮齿力学模型

将在点 A 处的啮合时计算载荷及有关参数带入赫兹公式:

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{F_n}{L \rho_E}} \quad (3)$$

计算单对齿 A 处啮合时齿面摩擦接触应力(单位 Mpa):

$$\sigma_H = Z_E Z_H Z_\epsilon \sqrt{\frac{k [F_n \cos \alpha_F + F_f \cos \alpha_F] \cdot \frac{u+1}{u}}{b d_1}} \quad (4)$$

式中  $Z_E$  为材料弹性系数;  $Z_H$  为节点区域系数;  $Z_\epsilon$  为重合度系数;  $k$  为载荷系数;  $F_n$  为正压力, 单位: N;  $F_f$  为摩擦力, 单位: N;  $\alpha_F$  为压力角, 单位: 度;  $b$  为齿宽, 单位: mm;  $d_1$  为齿轮分度圆直径, mm;  $u$  为齿数比。

### 3.2. 接触状态

接触问题很复杂, 接触面积不断变化会引起各种非线性情况, 接触压力地分布变化会导致应力不收

敛。非线性和边界性问题使得接触问题的数值求解需要经过很多个迭代步迭代结果才能收敛。为此我们进行如下假设:

- 1) 接触表面假定为光滑连续的曲面。
- 2) 接触体表面的摩擦力作用服从库仑摩擦定律。
- 3) 接触表面的粗糙程度可以通过摩擦系数来体现。

接触区域的任何接触点对均处于以下三种接触状态, 令  $n$  和  $\tau$  分别为接触表面上的法向和切向力:

- 1) 连续状态

$$\begin{cases} \tilde{n}_{1i} + \tilde{n}_{2i} = 0 \\ \tilde{\tau}_{1i} + \tilde{\tau}_{2i} = 0 \\ \tilde{u}_{1i} = \tilde{u}_{2i} \\ \tilde{v}_{1i} = \tilde{v}_{2i} \end{cases} \quad (5)$$

- 2) 滑动状态

$$\begin{cases} \tilde{n}_{1i} + \tilde{n}_{2i} = 0 \\ \tilde{\tau}_{1i} + \tilde{\tau}_{2i} = 0 \\ \tilde{u}_{1i} = \tilde{u}_{2i} \\ \tilde{\tau}_{1i} = \mp \mu_f \tilde{n}_{1i} \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $\mu_f$  为摩擦系数。

- 3) 分离状态

$$\tilde{n}_{1i} = \tilde{n}_{2i} = \tilde{\tau}_{1i} = \tilde{\tau}_{2i} \quad (7)$$

由以上公式可得, 无论哪种接触状态, 其都有 4 个定解条件。

用有限元求解接触问题时, 最重要的是判断存不存在接触以及哪里存在接触, ANSYS 软件有 3 种接触方式可供选择。点对点是指接触物体表面的节点一一对应; 点对面是一个接触物体表面的节点对应另一个接触体的表面, 用来处理大滑动和大变形问题; 面对面则支持“刚-柔”或“刚-刚”表面之间的接触问题, 它没有表面形貌限制, 可以协调刚度矩阵, 支持由摩擦引起的变形, 并且能得到很好的接触结果。为此我们选用面对面的接触方式。

### 3.3. 接触条件

当外部施加载荷一定时, 接触刚度矩阵越大, 计算过程中产生的移动就越小, 然而过大的接触约束会使结果不收敛, 如果接触刚度矩阵过小, 接触结果将无法求解, 因此应选择适当的接触刚度。如果考虑摩擦, 则应考虑摩擦引起的接触刚度。在考虑刚度矩阵的同时, 也需要考虑穿透容差, 穿透容差也会使分析结果不收敛而引起出错。在迭代开始时, 接触点协调是建立在刚度矩阵的基础上的, 为了达到平衡, 必须检查偏差是否穿透。在现实生活中, 两个相互接触的物体垂直方向上的接触面不应被贯穿, 而在有限元接触分析中会存在局部微小贯穿量, 其法向接触力是根据这个贯穿量计算而来, 但是前提条件是要小于可被穿透的允许值。牛顿迭代算法用于从刚度矩阵到第一次接触的转变, 随后由于接触状态不断改变, 刚度矩阵随着变化, 然后通过拉格朗日乘子法将约束优化问题转化为非约束优化问题, 最后计算接触运动区域内得势能并使其最小化。

### 3.4. 力学求解

由受力平衡和力矩平衡:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0, \sum M = 0 \quad (8)$$

可推导其微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_{bx} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_{by} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{bz} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

由受力平衡可得其全应力分量:

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} = P_x \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} = P_y \\ l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z = P_z \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} l = \cos(n', x) \\ m = \cos(n', y) \\ n = \cos(n', z) \end{cases} \quad (11)$$

令  $P_x = l\sigma$ 、 $P_y = m\sigma$ 、 $P_z = n\sigma$  带入上述公式, 可将上式整理为:

$$\begin{cases} l(\sigma_x - \sigma) + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} = 0 \\ l\tau_{xy} + m(\sigma_y - \sigma) + n\tau_{zy} = 0 \\ l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n(\sigma_z - \sigma) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

由于  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 、 $l$ 、 $m$ 、 $n$  不全为 0, 可得:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

带入下面公式:

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0 \quad (14)$$

可求得:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 \quad (15)$$

式中  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  为三个坐标方向的主应力,  $\sigma_s$  为材料的屈服点。则等效应力表示为:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{1/2[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (16)$$

## 4. 啮合齿轮摩擦接触应力分析

### 4.1. 摩擦接触参数设定

选定其中一个齿轮作为主动轮, 另一齿轮作为从动轮, 在瞬时状态里面, 选择主动齿轮, 插入连接

副载荷, 同时加载旋转速度  $0.1 \text{ rad}$ ; 选择从动齿轮, 插入连接副载荷, 同时给定旋转力矩, 大小为  $1000 \text{ N}\cdot\text{m}$ , 在此基础上需要保持主、从动齿轮力矩和转速一致。添加回转运动副应用在齿轮内孔上, 对另一个齿轮采用同样的方法建立回转运动副; 在相接触的地方设置接触形式为摩擦接触, 摩擦系数为  $0.15$ , 材料的弹性模量  $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.3$ 。

#### 4.2. 不同网格大小对范式应力结果的影响

接触网格的大小、网格、节点和单元都有可能对结果有一定影响, 在此章节探究网格大小对齿轮啮合摩擦接触应力的影响, 首先以整体网格  $4 \text{ mm}$ 、 $2 \text{ mm}$ 、 $1 \text{ mm}$  的网格大小对其进行网格划分, 其结果如图 4 所示。

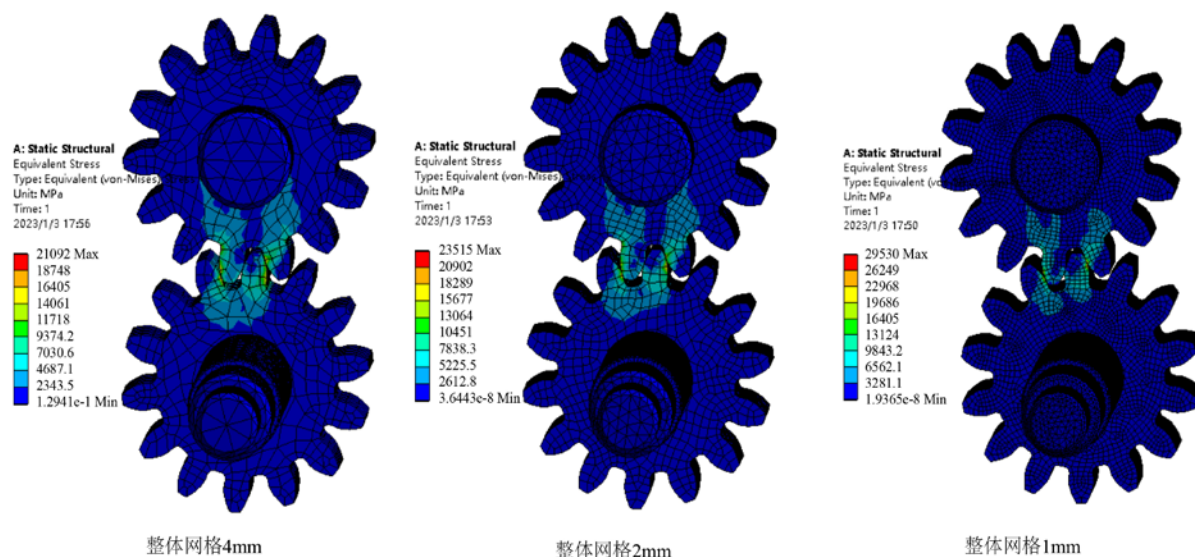


Figure 4. Stress distribution corresponding to grids of different sizes  
图 4. 不同大小网格所对应的应力分布

其次为了使分析结果更加精确, 对轴使用  $2 \text{ mm}$  进行网格划分, 对齿轮分别使用  $2 \text{ mm}$ 、 $1 \text{ mm}$ 、 $0.5 \text{ mm}$  的网格大小进行划分, 对接触应力最大值所在的齿轮进行局部细化, 分别以大小为  $1 \text{ mm}$ 、 $0.5 \text{ mm}$ 、 $0.1 \text{ mm}$  的网格对接触面进行网格划分, 探究齿轮接触应力值的大小, 其最大等效应力分析值如表 2 所示。

Table 2. Maximum stress values corresponding to different element sizes of tetrahedron  
表 2. 不同网格单元大小对应的最大应力值数据

轴网格大小/mm	齿轮网格大小/mm	接触面网格大小/mm	最大应力值/Mpa
2	2	1	1301.6
2	1.5	0.8	1512.8
2	1	0.5	2604.5

下对接触面网格为  $0.5$  的进行局部展示, 图 5 显示其局部应力分布效果图。由图可得其应力主要集中在齿轮啮合处和齿根附近。

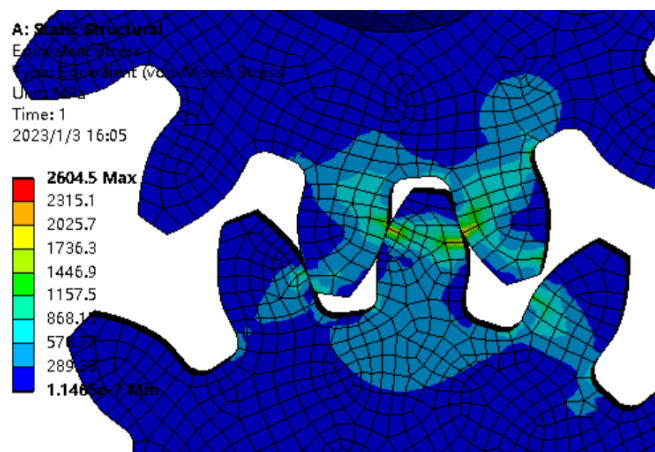


Figure 5. Partial enlarged view of friction  
图 5. 摩擦局部放大图

## 5. 结论

本文对齿轮轴装配体进行了摩擦接触分析, 忽略了齿轮材质、齿面粗糙度的情况以及润滑剂等一些外在因素的影响, 建立三维齿轮轴的接触模型, 选用齿面接触摩擦系数 0.15 来代表齿轮表面的粗糙程度, 从理论上推导了摩擦接触应力和等效力公式, 随后在分析软件中用不同的网格大小对齿轮进行网格细化, 得到其对应的最大等效力值和应力分布图。分析结果表明, 网格网格细化越小, 应力分析结果越准确; 由于齿面摩擦力的存在, 在齿轮的接触部位和齿根附近应力分布较集中, 更容易出现磨损和断裂; 还由于表面切应力的存在, 齿轮最大应力出现在接触部位的次表层上; 通过本文的研究也能对后续的齿轮啮合分析提供借鉴。

## 参考文献

- [1] 邓小禾. 渐开线圆柱齿轮齿廓修形与啮合规律研究[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 武汉理工大学, 2015.
- [2] 谢海东, 周照耀, 夏伟. 粉末冶金温压斜齿轮传动性能研究[C]//2005 年全国计算材料、模拟与图像分析学术会议论文集. [出版者不详], 2005: 176-181.
- [3] 宋友明, 李岚, 王欣, 梁永富. 基于 Solidworks 和 Ansys 齿轮泵齿轮轴的有限元分析[J]. 机械工程师, 2014(8): 134-135.
- [4] 翁剑成, 许清普, 温建和. 拖拉机变速箱齿轮副的接触有限元分析[J]. 龙岩学院学报, 2019, 37(2): 30-34.  
<https://doi.org/10.16813/j.cnki.cn35-1286/g4.2019.02.006>
- [5] 李春光. 关于渐开线齿轮齿面接触应力精确计算的探讨[J]. 华北水利水电学院学报, 1983(2): 104-114.  
<https://doi.org/10.19760/j.ncwu.zk.1983.02.010>
- [6] 侯志勇. 渐开线圆柱齿轮接触分析模块开发研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 东华大学, 2020.
- [7] 高创宽, 周谋, 亓秀梅. 齿面摩擦力对齿轮接触应力的影响[J]. 机械强度, 2003(6): 642-645.  
<https://doi.org/10.16579/j.issn.1001.9669.2003.06.011>