

# 基于FPGA和Sinc插值的分数阶傅里叶变换建模与设计

李尚恒, 丁 召, 周 骅

贵州大学大数据与信息工程学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2023年7月26日; 录用日期: 2023年8月31日; 发布日期: 2023年9月7日

## 摘 要

分数阶傅里叶变换(FrFT)在信号和图像处理领域受到了广泛的关注。在FrFT离散形式的演变过程中, 低计算复杂度对实际应用至关重要。提出了一种高效的现场可编程门阵列(FPGA)实现FrFT算法的方法。本文将FrFT的计算过程分解为一次卷积和两次乘法的同时, 为了提高插值精度, 采用了sinc插值作为插值算法, 并采用有限脉冲响应滤波器组成卷积模块, 提高了信号卷积的鲁棒性。针对FPGA器件XC7VX690T, 采用simulink和verilog硬件描述语言(HDL)对所提出的体系结构进行了综合。所得结果与仿真结果非常接近。最后, 讨论了体系结构设计和硬件要求以及体系结构中的组成模块。

## 关键词

分数阶傅里叶变换, Sinc插值, FPGA, 啁啾信号, 时域卷积

# Modeling and Design of Fractional Fourier Transform Based on FPGA and Sinc Interpolation

Shangheng Li, Zhao Ding, Hua Zhou

College of Big Data and Information Engineering, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Jul. 26<sup>th</sup>, 2023; accepted: Aug. 31<sup>st</sup>, 2023; published: Sep. 7<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

Fractional Fourier transform (FrFT) has received much attention in the field of signal and image processing. In the evolution of discrete forms of FrFT, low computational complexity is essential

for practical applications. An efficient method of implementing FrFT algorithm using field programmable gate array (FPGA) is presented. In this paper, the calculation process of FRFT is decomposed into one convolution and two multiplications. At the same time, in order to improve the interpolation accuracy, sinc interpolation is used as the interpolation algorithm, and the convolution module is composed of finite impulse response filter, which improves the robustness of signal convolution. For FPGA device (XC7VX690T), simulink and verilog hardware description language (HDL) were used to analyze the proposed architecture. The obtained results are very close to the simulation results. Finally, the architecture design and hardware requirements as well as the components of the architecture are discussed.

## Keywords

Fractional Fourier Transform, Sinc Interpolation, FPGA, Chirp Signal, Time Domain Convolution

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

分数阶傅里叶变换(FrFT)作为传统傅里叶变换(FT) [1]的推广, 在低可观测机动目标检测[2]、彩色图像密码系统[3]、异常检测[4]、射频干扰抑制[5]、变分模态分解[6]、高光谱图像检测[7]等众多应用中已经成为一种新兴的数学工具。FrFT 通过可选变换的分数阶(旋转角度)引入了额外的自由度, 这在任何实际应用中都是对普通 FT 的改进。在信号处理领域, 啁啾信号以其高范围分辨率和良好的抗干扰性能得到了广泛的应用。啁啾信号在时域和空域上都不紧凑。在时域和频域很难分离信号和噪声, 因此我们可以在适当的分数阶傅里叶域中提取信号。FrFT 有很多在啁啾信号处理中的应用, 如宽范围啁啾速率测量[8]、啁啾信号抗干扰[9]、雷达成像[10]、时频分析[11]。

关于离散分数阶傅里叶变换(DFrFT)的演变, 与离散傅里叶变换(DFT)不同, DFrFT 有很多定义, 所有可用的算法分为 3 类: 发明的采样型[12]、加权求和型[13]和特征向量分解型[14]。采样型将连续 FrFT 计算信号离散化, 并将其转化为乘法信号与啁啾信号的卷积形式。然后, 通过信号乘法处理得到 FrFT 的结果。特征向量分解类型通过取 DFT 核矩阵的特征值和特征向量来构造 DFT 核矩阵的分数阶幂来计算 DFrFT。特征向量分解可以保证 FrFT 的大部分特性, 但其计算复杂度较高, 不利于实时处理。加权求和型是指对任意特定角度的 DFrFT 进行加权求和即可计算任意角度的 DFrFT, 其计算精度与连续变换相比存在较大误差。

在 FRFT 理论提出后, 基于现场可编程门阵列(FPGA)的 FRFT 实现很少。文献[15]完成了基于特征向量的 DFrFT, 文献[16]提出了基于多速率信号处理理论和滤波器组的 FrFT 计算算法的多相实现, 文献[17]实现了加权求和型 DFrFT。论文基于采样型实现通常采用双倍采样率来实现二次插值, 并采用快速傅立叶变换(FFT)和快速反傅立叶变换(IFFT)在频域实现卷积。

本文主要研究了离散连续计算过程的采样型方法来完成 DFrFT。讨论了啁啾信号在分数阶域的聚集特性, 利用频域变换完成特定调频信号的识别。提出了一种资源利用率高、计算速度快、结果精度高的插补和卷积算法的 FPGA 实现方法。与文献[16]中的采样型实现不同, 采用了有限脉冲响应(FIR)滤波器的 sinc 插值和时域卷积, 提高了计算的精度, 保证了数据的完整性。最后对系统的资源消耗进行了分析,

证明了设计的适用性。

## 2. FrFT 的基本原理

### 2.1. 连续 FrFT

FrFT 是一种参数搜索算法。传统的傅立叶变换是分析和处理平稳信号的一种标准而有力的工具，但在处理和分析时变非平稳信号时却显得较弱。FrFT 可以理解为，当坐标轴在时频平面上绕原点逆时针旋转任意角度后，信号在分数阶傅立叶域中的表示。分数阶傅里叶变换提供了信号从时域到频域全过程的综合描述，随着阶数从 0 连续增长到 1，分数阶傅里叶变换展示出信号从时域逐步变化到频域的所有变化特征。频响傅立叶变换是信号在一组正交啁啾基上的展开式，啁啾信号的某一阶的频响傅立叶变换也是一个脉冲函数。旋转角为  $\alpha$  的信号  $x(t)$  连续 FrFT 可以写成如下公式(1)的形式：

$$X_a(u) = F^a[x(t)](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_a(u, t)x(t)dt \quad (1)$$

其中  $X_a(u)$  是信号  $x(t)$  变换的结果， $P$  为变换的阶数， $K_a(u, t)$  是变换的核函数，其定义为如公式(2)所示：

$$K_a(u, t) = \begin{cases} A_a e^{j\pi(u^2 \cot a - 2ut \csc a + t^2 \cot a)} & a \neq n\pi \\ \delta(u-t) & a = 2n\pi \\ \delta(u+t) & a = (2n+1)\pi \end{cases} \quad (2)$$

在这个内核函数中， $A_a = \sqrt{1 - j \cot a}$ ， $P = 2a/\pi$  表示输入信号  $x(t)$  的 FrFT 变换阶数，根据上述公式可知，当  $a = 0$ ， $P = 0$  时，变换后的结果为信号本身。当  $a = \pi$ ， $P = 2$  时，变换后的结果是信号的反转，即为  $x(-t)$ 。当  $a = \pi/2$ ， $P = 1$  时，变换结果等价于  $x(t)$  傅里叶变换。当  $a = 3\pi/2$ ， $P = 3$  时，变换结果等价于  $x(t)$  傅里叶反变换。

FrFT 处理以旋转角  $a$  为搜索参数的信号，其搜索周期为  $2\pi$ ，由于  $a = P\pi/2$ ，故  $P$  阶的搜索周期为 4。由于 FrFT 阶  $P$  的可加性[12]，当  $P$  为  $[0, 4]$  时，FrFT 具有周期性。即为  $0 < P < 0.5$ ， $F^P$  为  $F^{P+1}$  的快速傅里叶逆变换； $1.5 < P < 2$  时， $F^P$  是  $F^{P-1}$  的快速傅里叶变换； $P > 2$  时， $F^P$  是  $F^{P-2}$  的反转。根据上述分析，可知将  $P$  可以限制在区间  $[0.5, 1.5]$  之间。

### 2.2. 啁啾信号的 FrFT 聚合特性

啁啾是信号的频率随时间变化的现象，是在时域上对脉冲性质做的一个表征，在一个脉冲周期内各频率成分不是同时到达的，就是激光脉冲的不同频率成分在时域上是不同步的，它分为正啁啾和负啁啾，正啁啾是频率随时间增加，就是激光输出先是低频再是高频，比如一个脉冲上升的前沿是低频，下降的后沿是高频，负啁啾反之。比如正常色散，高频波的折射率大，传播速度慢，而低频波的传播速度快，就形成正啁啾。啁啾产生的原因主要是由于介质的折射率由于动态电信号调制的影响产生动态变化，从而引起在介质中传播的光信号的相位发生变化，这种相位的变化直接体现为输出光信号频率的动态变化。

定义啁啾信号的表达式为公式(3)所示：

$$x(t) = e^{j(2\pi f_0 t + \pi k t^2)} \quad (3)$$

则根据分数阶傅里叶变换原理可得，啁啾信号的 FrFT 结果如公式(4)所示：

$$X_a(u) = \sqrt{1 - j \cot a} e^{-j\pi u^2 \cot a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\pi t^2 (\cot a + k)} e^{j2\pi t (f_0 - u \csc a)} dt \quad (4)$$

假设公式(4)中的信号持续时间为  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ ，则公式能够表示为如下形式：

$$X_a(u) = TA_a e^{j\pi u^2 \cot a} \operatorname{sinc}[\pi T(f_0 - u \csc a)] \quad (5)$$

信号的啁啾率  $k = 3.91 \times 10^{12}$  Hz/s, 信号带宽  $B = 20$  MHz, 中心频率  $f_0 = 0$  Hz。当啁啾信号的旋转角度达到  $a = -\operatorname{arccot} k$  时, 其中  $k$  为信号的啁啾率, FrFT 的结果变成 sinc 函数的形式, 该 sinc 函数在  $u = f_0/\csc a$  时达到最大值, 同时在分数阶域中振幅值最大, 说明在信号检测中, FrFT 对 chirp 信号有聚集作用。

### 2.3. 离散 FrFT

为了便于离散化操作, 将连续 FrFT 表达式转换为公式(6)所示:

$$X_a(u) = A_a e^{-j\pi u^2 \tan\left(\frac{a}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\pi t^2 \tan\left(\frac{a}{2}\right)} e^{-j\pi \csc a(u-t)^2} dt \quad (6)$$

其中  $A_a = \frac{e^{-j\pi \operatorname{sgn}(\sin a)/4 + ja/2}}{\sqrt{|\sin a|}}$ ,  $a = P\pi/2$ , 由此可知, FrFT 过程可以分解为以下三个计算过程:

- 1) 首先利用一个啁啾函数乘以要检测的信号, 将这个啁啾信号命名为 chirpA, 这个信号的表达式为:  $x_{\text{chirpA}}(t) = e^{-j\pi t^2 \tan\left(\frac{a}{2}\right)}$ ;
- 2) 将相乘后的信号与 chirpB 进行卷积, 其中 chirpB 表达式为:  $x_{\text{chirpB}}(t) = e^{-j\pi t^2 \csc a}$ ;
- 3) 将信号卷积乘以另一个啁啾信号 chirpC, 其表达式为  $x_{\text{chirpC}}(t) = A_a e^{-j\pi u^2 \tan\left(\frac{a}{2}\right)}$ 。

经过量纲归一化处理, 每次采样计算的结果都可以与实际应用中离散信号的采样率和采样时间联系起来。设输入信号的持续时间为  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ ,  $T$  为时间宽度。信号的频域为  $\left[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}\right]$ , 其中  $f_s$  为信号的采样率。维度归一化[18]是将不同维度的时域和频域转换为一维的同一域, 引入具有时间维度的尺度因子  $S$ , 并定义新的尺度坐标。根据时域和频域的时间长度计算, 为使两个区间相等, 则尺度因子  $S$  为  $\sqrt{\frac{T}{f_s}}$ , 则归一化宽度  $\Delta$  为  $\sqrt{TF_s}$ 。

在所有时间或频率标签中, 函数可以被限制在区间  $\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$  内, 这意味着 Wigner 分布被限制在围绕时频域原点的半径  $\Delta/2$  的圆内。啁啾乘法和啁啾卷积的 Wigner 分布将被紧凑地包含在一个半径为  $\Delta$  [19] 的圆中。则区间变为  $[-\Delta, \Delta]$ , 采样间隔为  $1/2\Delta$ 。因为需要对原始输入信号进行双插值。最终离散 FrFT 表达式为:

$$X_a\left(\frac{k}{2\Delta}\right) \approx \frac{A_a}{2\Delta} e^{-j\pi \tan\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{k}{2\Delta}\right)^2} \sum_{t=0}^{N-1} e^{j\pi\left(\frac{k-t}{2\Delta}\right)^2 \csc a} e^{-j\pi\left(\frac{l}{2\Delta}\right)^2 \tan\left(\frac{a}{2}\right)} x\left(\frac{l}{2\Delta}\right) \quad (7)$$

公式中  $N$  代表采样点个数,  $u = \frac{k}{2\Delta}$ ,  $t = \frac{l}{2\Delta}$ 。

经 FrFT 后, 输入信号  $x(t)$  变为  $X_a(u)$ , 在分数场的  $(P, u)$  平面上有一个峰值点  $(\hat{P}_0, \hat{u}_0)$ , 其中  $P$  为信号旋转阶数,  $u$  为分数场的幅值。从峰值点可以估计出信号的调频斜率  $\hat{k}_0$  和中心频率  $\hat{f}_0$ , 表示为公式(8)所示:

$$\begin{cases} \hat{k}_0 = -\cot\left(\frac{\pi \hat{P}_0}{2}\right) \\ \hat{f}_0 = \hat{u}_0 \csc\left(\frac{\pi \hat{P}_0}{2}\right) \end{cases} \quad (8)$$

经过尺度归一化的离散处理后，离散信号的实值可计算为公式(9)所示：

$$\begin{cases} k_0 = \hat{k}_0 f_s / T \\ f_0 = \hat{f}_0 \sqrt{f_s / T} \end{cases} \quad (9)$$

### 3. FPGA 实现与设计

#### 3.1. DFrFT 架构设计

本文所提出的体系结构的顶层框图如图 1 所示。这些模块共同完成了根据 chirp 速率计算最佳旋转角度，并通过最佳旋转角度获得所需的 3 个 chirp 信号，通过 sinc 插值将信号翻倍，完成对信号的乘法和卷积等 4 个主要操作。

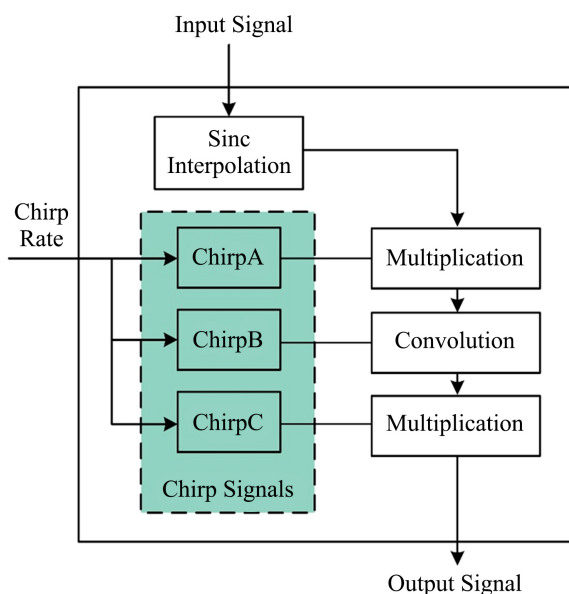


Figure 1. Top-level block diagram of DFrFT architecture  
图 1. DFrFT 架构的顶层框图

输入信号分为实部信号和虚部信号，同样，输出信号也分为实部和虚部。由于 FPGA 不支持复数计算，所以复数的乘法运算需要分别计算实部和虚部。一般来说，乘法模块需要四个乘法器，但通过结合类似的术语和其他操作，乘法模块可以简化为三个乘法器和一个额外的加法和减法，可以减少 DSP 的消耗。产生 chirp 信号的块根据公式(8)和公式(9)的输入信号的 chirp 率，在分数阶域中获得振幅最大的最佳旋转角度。由于 chirpA 和 chirpC 在形式上的相似性，这两个信号在 FPGA 实现中可以共享一个 ROM，从而减少了资源占用。

#### 3.2. Sinc 插值和卷积块

Sinc 插值算法，又叫香农插值算法(whittaker-shannon interpolation formula)，是一种用于从离散实信号构造时间连续带限函数的方法。是信号处理中一种非常常用、好用的插值补间算法，广泛并非常适合应用于多数振动信号及图形信号的拟合。在基于数字卷积的信号重采样方法中，从理论上讲，sinc 插值是最好的方法之一，因为它不会扭曲由其样本定义的信号[20]。离散 sinc 插值最常用的实现方法是“信号频谱零填充法”[21]。对于插值点  $f$  的 sinc 插值函数能够表示成如下形式：

$$y(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \operatorname{sinc}(2\Delta(x - x_k)) \quad (10)$$

其中  $\left\{x_k = \frac{k}{2\Delta} : k = 0, \dots, N-1\right\}$ ，因此，它可以通过信号与 sinc 函数的卷积来计算，如果信号的长度为  $n$ ，则需要  $O(M \log N)$  的运算。sinc 插值模块的 FPGA 实现结构如图 2 所示。

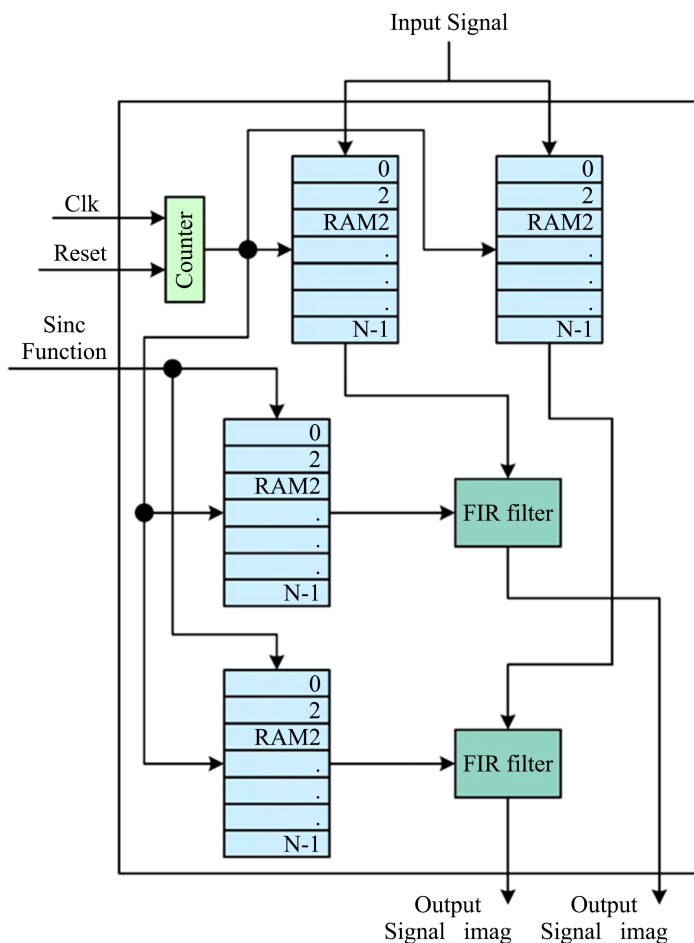


Figure 2. Sinc interpolation block  
图 2. Sinc 插值块

在上述架构中，我们使用 FIR 滤波器[22]，[23]来完成卷积运算。与 FFT 和 IFFT 实现频域卷积的方法相比，FIR 滤波器具有更快的计算速度和更简单的结构，同时避免了 FFT 在 FPGA 实现过程中丢失数据的问题。将 sinc 函数作为系数存储到 FIR 滤波器中，然后对分离出来的复信号进行滤波，就可以完成对输入信号的二次插值。

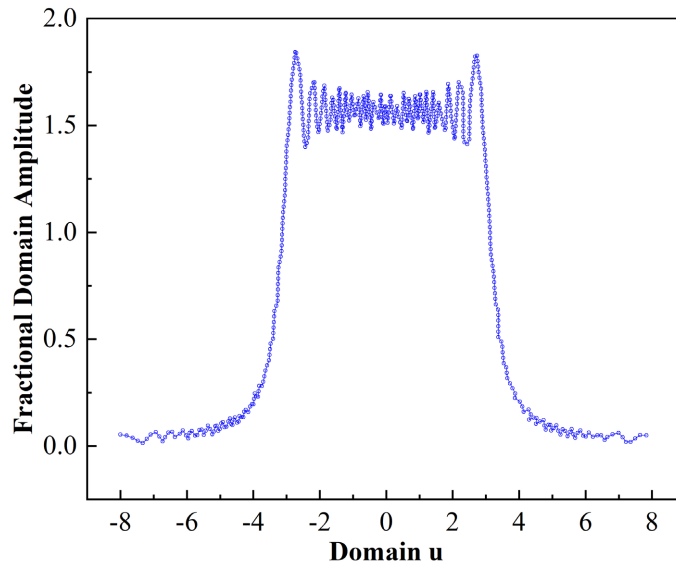
与插值块类似，卷积块中的卷积也是以 FIR 滤波器为核心，不同的是卷积块的两个输入都是复数。因此，我们在插值块中需要四个 FIR 滤波器。在所提出的体系结构中，许多计算和结构具有相似性和可重复性，例如啁啾信号的计算和卷积的计算，这说明了所提出体系结构的简单性和易于实现性。

#### 4. 仿真结果及资源分析

在本节中，本文给出了一个实现  $N = 256$  点 FrFT 的 FPGA 实现，信号参数如下：信号的啁啾率  $k =$

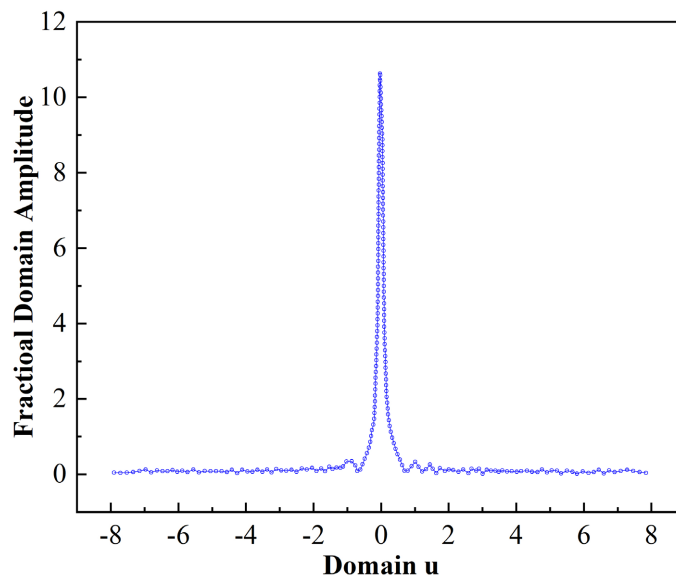
$3.91 \times 10^{12}$  Hz/s, 信号带宽  $B = 20$  MHz, 中心频率  $f_0 = 0$  Hz。最优阶  $P$  可由式(8)和式(9)求得, 可计算出该信号的最优阶  $P$  约为 1.06。然后我们可以通过图 1 中的架构完成 FrFT 的 FPGA 实现。针对 vertex-7 FPGA 器件(XC7VX690T), 采用 verilog HDL 对所提出的设计进行了综合和实现。

图 3 和图 4 是不同  $P$  值的 matlab 仿真结果。图 5 和图 6 是数据量化后在 simulink 中 FPGA 实现的结果。通过 simulink 仿真得到的结果与 MATLAB 仿真得到的结果基本一致, 证明本文所提出的架构在 FPGA 上实现的可行性与有效性。



**Figure 3.** FrFT waveform diagram of 256-Point chirped signal with  $P = 0.80$  in MATLAB

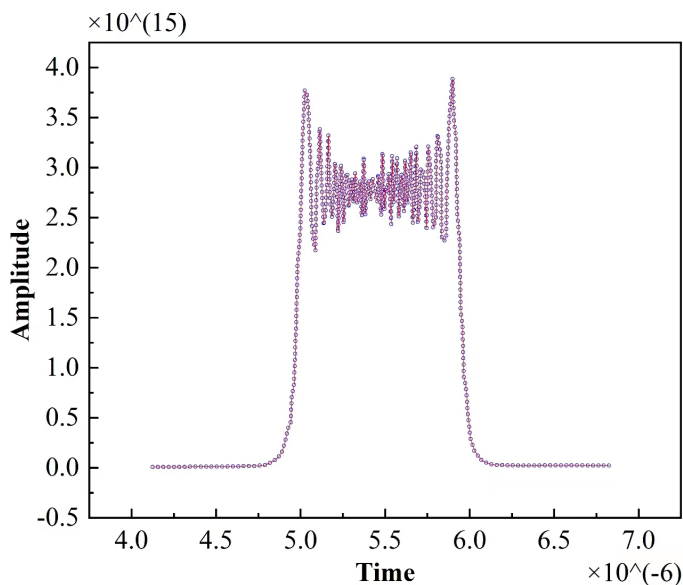
**图 3.** MATLAB 中对  $P = 0.80$  的 256-Point 啁啾信号的 FrFT 波形图



**Figure 4.** Frequency response analysis of 256-Point chirped signal with  $P = 1.06$  in MATLAB

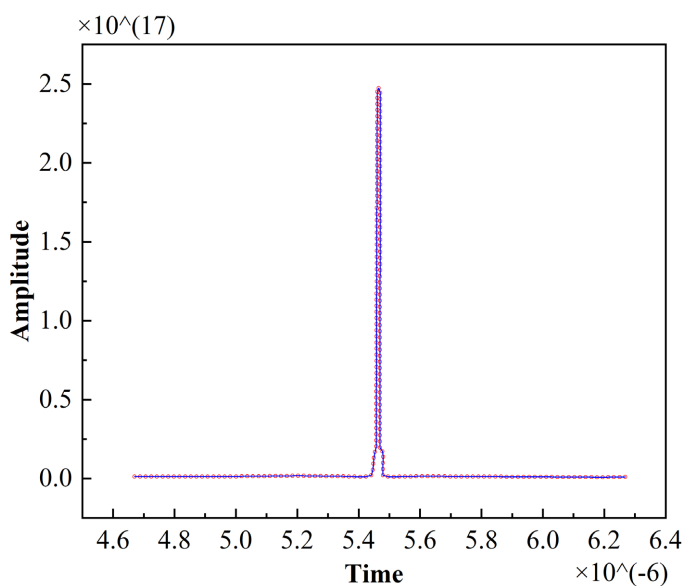
**图 4.** MATLAB 中对  $P = 1.06$  的 256-Point 啁啾信号频响分析





**Figure 5.** The frequency response Fourier transform result of the signal realized in FPGA using the proposed architecture is  $P = 0.80$

**图5.** FPGA中使用所提出的架构实现的信号的频响傅立叶变换结果为  $P = 0.80$



**Figure 6.** FRFT results at  $P = 1.06$  for the signal implemented in FPGA using the proposed architecture

**图6.**在FPGA中使用所提出的架构实现的信号在  $P = 1.06$  处FRFT结果

实现中 BRAM、DSP、LUT、寄存器等 FPGA 资源利用率如表 1 所示。从表中的数据可以看出，在这样的硬件平台上，资源的使用处于较低的水平，说明了所提出的架构的实用性。

与文献[17]完成 128 点 DFrFT 的结果相比，ram、lut 和 dsp 的比例有所降低。该结构的运行时间为  $2.819 \mu\text{s}$ ，比文献[16]和文献[17]的运行时间要快，说明本文所提出的架构的科学性以及有效性。



**Table 1.** Resource utilization rate  
**表 1.** 资源利用率

Component Name	Resource Usage		
	Resources	Consumption	Percent
BRAMs	1470	23	1.5%
DSPs	3600	1228	34%
LUTs	433,200	102,959	24%
Registers	866,400	61,936	7%

## 5. 总结

本文提出了一种计算 DFrFT 的有效硬件体系结构。利用 simulink 对该体系结构进行了仿真描述，并在目标 FPGA 器件上进行了综合和实现。并将实现结果与信号在理想情况下 MATLAB 中的仿真结果进行了比较，simulink 实际波形的验证与 MATLAB 中理想波形基本一致，验证本文提出架构的科学性与有效性。实验结果表明，该设计能够在低功耗的情况下实现高精度。因此，该体系结构能够满足实时性的要求。本文实验将输入信号设定为固定的啁啾率，适用于工程实践中特定调频的啁啾信号检测。

## 参考文献

- [1] McBride, A.C. and Kerr, F.H. (1987) On Namias's Fractional Fourier Transforms. *IMA Journal of Applied Mathematics*, **39**, 159-175. <https://doi.org/10.1093/imamat/39.2.159>
- [2] Yu, X., Chen, X., Huang, Y., et al. (2019) Fast Detection Method for Low-Observable Maneuvering Target via Robust Sparse Fractional Fourier Transform. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, **17**, 978-982. <https://doi.org/10.1109/LGRS.2019.2939264>
- [3] Faragallah, O.S., El-sayed, H.S., Afifi, A., et al. (2021) Efficient and Secure Opto-Cryptosystem for Color Images Using 2D Logistic-Based Fractional Fourier Transform. *Optics and Lasers in Engineering*, **137**, Article ID: 106333. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106333>
- [4] Tu, B., Li, N., Liao, Z., et al. (2019) Hyperspectral Anomaly Detection via Spatial Density Background Purification. *Remote Sensing*, **11**, Article No. 2618. <https://doi.org/10.3390/rs11222618>
- [5] Zhou, Q., Zheng, H., Wu, X., et al. (2019) Fractional Fourier Transform-Based Radio Frequency Interference Suppression for High-Frequency Surface Wave Radar. *Remote Sensing*, **12**, Article No. 75. <https://doi.org/10.3390/rs12010075>
- [6] Chen, G., Yan, C., Meng, J., et al. (2021) Improved VMD-FRFT Based on Initial Center Frequency for Early Fault Diagnosis of Rolling Element Bearing. *Measurement Science and Technology*, **32**, Article ID: 115024. <https://doi.org/10.1088/1361-6501/ac1613>
- [7] Li, X., Sun, Z. and Yeo, T.S. (2020) Computational Efficient Refocusing and Estimation Method for Radar Moving Target with Unknown Time Information. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, **6**, 544-557. <https://doi.org/10.1109/TCI.2020.2964228>
- [8] Peng, D., Li, H., Qin, Y., et al. (2022) Robust Wide-Range Chirp Rate Measurement Based on a Flexible Photonic Fractional Fourier Transformer. *Optics Express*, **30**, 7750-7762. <https://doi.org/10.1364/OE.451614>
- [9] Yang, J., Lu, J., Tu, Y., et al. (2022) Spatial Deception Suppression for Wideband Linear Frequency Modulation Signals Based on Fractional Fourier Transform with Robust Adaptive Beamforming. *Digital Signal Processing*, **126**, Article ID: 103485. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2022.103485>
- [10] Zhao, C., Li, C., Feng, S., et al. (2020) A Spectral-Spatial Anomaly Target Detection Method Based on Fractional Fourier Transform and Saliency Weighted Collaborative Representation for Hyperspectral Images. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, **13**, 5982-5997. <https://doi.org/10.1109/JSTARS.2020.3028372>
- [11] Shi, J., Zheng, J., Liu, X., et al. (2020) Novel Short-Time Fractional Fourier Transform: Theory, Implementation, and Applications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **68**, 3280-3295. <https://doi.org/10.1109/TSP.2020.2992865>

- 
- [12] Ozaktas, H.M., Arikan, O., Kutay, M.A., *et al.* (1996) Digital Computation of the Fractional Fourier Transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **44**, 2141-2150. <https://doi.org/10.1109/78.536672>
- [13] Tao, R., Zhang, F. and Wang, Y. (2008) Research Progress on Discretization of Fractional Fourier Transform. *Science in China Series F: Information Sciences*, **51**, 859-880. <https://doi.org/10.1007/s11432-008-0069-2>
- [14] Yeh, M.H. and Pei, S.C. (2003) A Method for the Discrete Fractional Fourier Transform Computation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **51**, 889-891. <https://doi.org/10.1109/TSP.2002.808113>
- [15] Prasad, M., Ray, K.C. and Dhar, A.S. (2010) FPGA Implementation of Discrete Fractional Fourier Transform. 2010 *International Conference on Signal Processing and Communications (SPCOM) IEEE*, Bangalore, 18-21 July 2010, 1-5. <https://doi.org/10.1109/SPCOM.2010.5560491>
- [16] Tao, R., Liang, G. and Zhao, X.H. (2010) An Efficient FPGA-Based Implementation of Fractional Fourier Transform Algorithm. *Journal of Signal Processing Systems*, **60**, 47-58. <https://doi.org/10.1007/s11265-009-0401-0>
- [17] Zou, Q., Li, L., Huang, Q., *et al.* (2015) Implementation of Weighted Summation Type Fractional Fourier Transform on FPGA. *7th International Conference on Digital Image Processing (ICDIP 2015)*, Vol. 9631, 486-493. <https://doi.org/10.1117/12.2197111>
- [18] Zhao, X.H., Bing, D. and Ran, T. (2005) Dimensional Normalization in Numerical Calculation of Fractional Fourier Transform. *Journal of Beijing University of technology*, **25**, 5.
- [19] Bultheel, A. and Sulbaran, H.E.M. (2004) Computation of the Fractional Fourier Transform. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **16**, 182-202. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2004.02.001>
- [20] Guo, Z., Wang, S., Tang, Z., *et al.* (2021) Fast Time-Domain Solution of Dynamic Electromagnetic Problems Based on Sinc Interpolation. *IEEE Transactions on Magnetics*, **57**, 1-4. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2021.3060754>
- [21] Yaroslavsky, L.P. (2002) Fast Signal Sinc-Interpolation Methods for Signal and Image Resampling. *Image Processing: Algorithms and Systems SPIE*, Vol. 4667, 120-129. <https://doi.org/10.1117/12.467973>
- [22] Sankarayya, N., Roy, K. and Bhattacharya, D. (1997) Algorithms for Low Power and High Speed FIR Filter Realization Using Differential Coefficients. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, **44**, 488-497. <https://doi.org/10.1109/82.592582>
- [23] Chen, P., Qi, C., Wu, L., *et al.* (2018) Waveform Design for Kalman Filter-Based Target Scattering Coefficient Estimation in Adaptive Radar System. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **67**, 11805-11817. <https://doi.org/10.1109/TVT.2018.2875314>