Modern Physics 现代物理, 2012, 2, 60-69
http://dx.doi.org/10.12677/mp.2012.23011 Published Online August 2012 (http://www.hanspub.org/journal/mp.html)

Solving the Main Harmonic of Lossless System Using the Reactive Power Balance Principle*

Binghua Huang[1], Guangming Li[2], Yafen Wei[1]

[1]Information Engineering School, Jimei University, Xiamen
[2]Dongguan Institute of Technology, Dongguan
Email: gxuhbh@163.com

Received: May 29th, 2012; revised: Jun. 20th, 2012; accepted: Jun. 28th, 2012

Abstract: In the nonautonomous circuit which contains the dissipative element, the existence of self excited oscillation depends upon whether or not active power can maintain balance. The nonautonomous circuit with excited source has no dissipative element. It is a lossless system. The forced and self-excited oscillation components can simultaneously co-exist unconditionally. The excited source export only reactive power. The resonant circuit does not consume any active power. The energy stored in this resonant circuit varies at all time; but after a cycle, the energy stored maintains original quantity. The relation between self-oscillation frequency and two voltage amplitude of oscillation can be found from the condition for reactive power balance. The main harmonic solutions are relative to both excited source and the initial condition. Taking the resonant circuit which contains the voltage-controlled nonlinear inductor as example, this paper demonstrates that the chaos can be produced by nonlinear coupling of forced and self-excited oscillation components.

Keywords: Reactive Power; Lossless; Main Harmonic; Hamiltonian Cycle; Chaos

用虚功平衡原理求解无损耗系统的主谐波*

黄炳华[1]，李广明[2]，卫雅芬[1]

[1]集美大学信息工程学院，厦门
[2]东莞理工学院，东莞
Email: gxuhbh@163.com

收稿日期：2012 年 5 月 29 日；修回日期：2012 年 6 月 20 日；录用日期：2012 年 6 月 28 日

摘　要：含耗能元件的非自治电路，自振分量的存在性取决于实功率能否保持平衡。具有激励源不含耗能元件的非自治电路是一个无损耗系统。自振与受迫两振荡分量无条件同时共存。激励源只输出虚功率，谐振回路不消耗任何实功率，谐振回路的储能每一瞬时都在变化，但经历一周期后其储能保持原值。根据虚功平衡条件可以求出自振频率与两个电压振幅值的关系，主谐波解不但与外激源有关，还与初始条件有关，本文以含有压控非线性电感的谐振电路为例，论证自激与受迫两振荡分量的非线性耦合能产生混沌。

关键词：虚功功率；无损耗；主谐波；哈密顿圈；混沌

1. 前言

本文包括两方面：一方面用虚功率平衡原理分析无损耗电路的主谐波解；另方面论证在无损耗系统中，自激与受迫两主谐波分量非线性耦合诞生混沌的特有性质，在理论与实用上的重要价值。

1.1. 无损耗电路的振荡取决于虚功平衡条件

含阻尼元件的网络，如果只含正性电阻并且不包含有源器件，这个无源网络由于实功无法平衡而不能诞生振荡；如果用有源器件构成虚拟负阻，网络可能

*基金项目：国家自然科学基金批准号 60662001。

Copyright © 2012 Hanspub

振荡，实功平衡描写了网络中储能状态的瞬时变化，在经历一周期后保持原值，即平均功率为零。这是诞生正弦振荡的必要条件之一，有关论述可见诸很多文献的介绍。在电子技术与通信领域，维持正弦振荡的另一个必要条件，被表述为相位平衡，两者共同构成巴克豪森准则(Barkhausen criterion)。这是统治电子与通信学术界的多年历史。在这个领域的发展历程，不论是理论或实际工程应用方面，我们看不到虚功平衡的概念。

但在另方面，在电力系统专业，虚功(被称为无功)平衡的概念却是电力系统各机组各电站同步并联稳定运行很重要的必要条件。将虚功平衡的概念引入电子通信学科，用虚功平衡代替相位相角平衡，不论是在数学方程的建立、推导、演算；或在物理意义的阐释都要优越而简便得多。

过去关于保守系统的振荡理论，只停留在应用能量守恒定律，例如哈密顿函数。也只是在实功平衡方面进行研究，因为虚功不消耗能量。引入虚功平衡的概念研究非线性振荡，对于推进振荡理论的发展做出一定贡献。非线性振荡中每一谐波成份都要各自遵守复功率守恒，其中包括虚功守恒，一个仅含正性电容的网络，如果没有虚拟电感或反相放大器的加入，网络会因虚功不能平衡而无法振荡。虚功平衡对于建立和维持振荡具有十分重要的意义。在实际工程应用中，可用破坏虚功平衡消除寄生振荡[1-4]。

1.2. 无损耗电路诞生的混沌振荡在理论与实用方面的重要价值

早年无线电技术中的混频能诞生混沌，这是两个各自独立的振荡成份通过非线性耦合诞生混沌的先例，这种非线性耦合诞生混沌的现象，在无损耗系统中，自激与受迫两振荡分量始终无条件同时共存，此电路不存在实功平衡问题，两主谐波分量在任意情况下均能自动完成虚功平衡。因而其非线性耦合表现得特别强烈、普遍、广泛与特别容易实现，是其他非线性耦合电路不能比拟的。它不但能体现阐释混沌的本质属性，且很容易研制成一个混沌信号发生器。具有理论与实用的双重价值。

1.3. 混沌存在的广泛性与复杂性

存在于各学科门类的混沌至今没有统一的定义，当前有关文献介绍的定义有多种：例如 Li-Yorke(李天岩－约克)定义；Melnikov(梅利尼科夫)定义等。不管各种定义的描述各有不同，其中获得共识的论点有：1) 混沌的有界性，它不趋于无穷，因而它是全局稳定的。2) 对初值的敏感依赖，说明它是局部不稳定的；在外来干扰下相点运动轨道随之而变，系统没有保持原状态的属性与能力，在干扰消失后运动轨迹没有返回的能力。任意微小的初值误差，经多次迭代后都将导致计算结果有很大的不同，甚至于是失败的。3) 非周期性，频谱连续。

尚存在争议的论点；有相当多的文献支持混沌的不确定性，内随机性，不可预测性。其实混沌存在有可以预测的极其复杂的规律，这是人类尚未征服的领域；不是混沌不可预测，而是人类至今还没有能力预测出来。不是混沌没有规律，而是这些规律人类至今还没有揭示出来。

1.4. 连续时间系统的轨道混沌

本文不研讨包罗万象的各种混沌，我们仅研究关于连续时间系统的轨道混沌。其定义：

一个用微分方程描写的 $n(n \geq 3)$维非线性系统，所有平衡点都是不稳定的。由微分方程解出的相图是有界的不趋于无穷，在一定观测时间内，相点由一定初始状态出发的运动轨道始终没有周期重复性。这个系统就是混沌的。总结成较简单的一句话，混沌是有界的非周期非线性函数。

要强调混沌是由微分方程解出来的，将这个解代入方程，它要满足方程的平衡，解的规律是很复杂的，人类至今没有解析的表达出来，但它是确定性的，要遵守微分方程对它的约束。由于非线性函数是千变万化的，因而这个解也是千姿百态的，要总结出千姿百态的共有特征，基本上有两种类型：一种是具有周期重复性的闭轨；另一种是没有周期重复性的混沌，拟周期是混沌的先兆，可归入也属于混沌。在此强调混沌是微分方程的解，不是天上掉下来的奇异怪物，是自然界的本来面目，一种极普遍极平常的一般现象，而此前尚未被人类充分认识，作为非线性微分方程的解，混沌是一般形式，极限环与闭周期轨是特殊形式。关于混沌的非周期性，本文在结论部分还要做出说明。

Copyright © 2012 Hanspub

规律不能局限于已被人类认识的典型规律，如抛物线，双曲线，三角函数，极限环，椭圆等才算规律。还有很多未知的规律还没有被人们所认识，也有它的规律。

每一个非线性微分方程都有其独自的规律，这个规律用相点的运动轨道表示出来，不同的方程有不同的相图说明有不同的规律，现在要从很多不同的非线性方程中，抽象出产生混沌的共同特征与规律，解是有界或无界的，这又是区别方程解的两大类别，混沌是属于有界的。微分方程的解表为相空间的曲线称为相图，一个方程(包括一定的起始条件)只有一个相图，不可能有两个相图，由微分方程解出来的混沌相图是确定性不是随机的。相点的运动规律不能违背微分方程的理论，一个相点只能有一个运动方向。

从微分方程的特征，预测混沌相图的性状，现在已经有可喜的进展，禹思敏教授的论著阐明了这方面的研究成果[5,18]。双涡卷混沌吸引子(Chua 电路)是由三阶奇对称方程造成的，蝴蝶形混沌吸引子(Lorenz 系统)是由三阶偶对称方程造成的，组成方程的非线性项类型发生变化，引起相图变化之间的内在联系，已取得一定成果，这些成果说明在定性方面混沌方程的可预测性，人类已经在认识混沌征服混沌的领域一步一步的向前推进。由双涡卷推广到多涡卷或网格状多涡卷混沌吸引子，由双翅膀蝴蝶形推广产生多翅膀蝴蝶混沌吸引子，进一步说明混沌振荡是确定性有规律的。很简单的 Colppitts 振荡器能产生混沌说明它的普遍性[5-7]。本文提出的无耗典型电路图 3，其诞生的混沌振荡能很好的体现与阐释上述混沌的各种特性。

2. 非线性系统的轨道稳定性

图 1 电路为 Van der Pol 振荡器，其稳态相图是一个极限环，谐振回路 CL_0 储能的每一瞬时都在变化，但经一周期后保持原值，这个电路在干扰下增减的能量，会被非线性电导 g_N 吸收或补充，相点会自动趋向回到原来的轨道维持稳定振荡。图 1 电路 g_N 的伏安特性如下

$$i_N = -b_1 u + b_3 u^3 \qquad b_1 > b_3 > 0$$

2.1. 保守系统的幅频关系取决于虚功平衡

由非线性电感与电容并接构成的保守系统如图 2。其相轨迹取决于初始值，不同的初始值有不同的哈密顿圈[8,9]。由于电路不含有耗能元件，偶然干扰引起的能量变化能够被保持住，所以相轨迹发生变化。因而保守系统自激振荡的相轨道是不稳定的，但系统对于每一个初始值的解肯定是确定的。确定的解说明它要满足方程的平衡，它和解的稳定性是两个不同概念，不能互相混淆。

$$\ddot{u} + \left(a_1 + a_3 u^2\right) u = 0 \tag{1}$$

$$u_S = U_{sm} \sin\left(\omega_s t + \theta\right) = U_{smr} \sin \omega_s t + U_{smx} \cos \omega_s t$$

$$U_{sm}^2 = U_{smr}^2 + U_{smx}^2 \tag{2}$$

$$\omega_S^2 = a_1 + 3a_3 U_{sm}^2 / 4 \tag{3}$$

$$u(0) = U_{smx} \qquad \dot{u}(0) = U_{smr}\omega_S \tag{4}$$

Duffing 方程式(1)是一个如图 2 的保守系统，它的基波解 u_S 被描述如式(2)，根据式(3)能求出自激振荡的幅频关系，由式(4)能根据初始条件求出 u_S 的系数 U_{smr}, U_{smx} [10-14]。

例 1 式 1 的 $a_1 = 25\times10^4$， $a_3 = 3500$

$$\ddot{u} + \left(25\times10^4 + 3500u^2\right) u = 0 \tag{5}$$

程序 tab1.nb 求出式(5)对应每一初始值的基波解 u_S 列如表 1，由表中可发现对应一定初始值，都有一个确定的基波解，自振频率 ω_s 不是固定的，初始储能

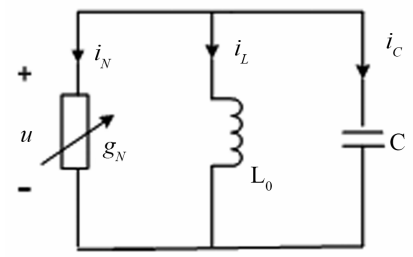

Figure 1. Van der Pol oscillator
图 1. 范德堡振荡器

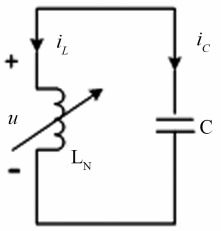

Figure 2. Conservative circuit
图 2. 保守电路

Copyright © 2012 Hanspub

Table 1. First harmonic solutions of example 1 (h_0 = Hamiltonian)
表 1. 例 1 的基波解 (h_0 = 哈密顿量)

A	$u(0)=30,\ \dot{u}(0)=0\quad u_S=30\cos[1616\,t]$	$U_{Sm}\approx 30$	$h_0=821250000$
B	$u(0)=0,\ \dot{u}(0)=5000\quad u_S=7.8\sin[640\,t]$	$U_{Sm}\approx 7.8$	$h_0=12500000$
C	$u(0)=30,\ \dot{u}(0)=5000\quad u_S=30\cos[1624\,t]+3.1\sin[1624\,t]$	$U_{Sm}\approx 30.2$	$h_0=833750000$
D	$u(0)=50,\ \dot{u}(0)=100000\quad u_S=50\cos[3092\,t]+32.3\sin[3092\,t]$	$U_{Sm}\approx 60$	$h_0=10781250000$

越大哈密顿圈越大 U_{Sm} 越大。并可发现 $u(0)$ 对哈密顿量的影响比 $\dot{u}(0)$ 的影响强得多。它没有暂态过程一获得初始储能立刻进入稳态振荡。

2.2. 等效基波电感

$$L_N=1\big/\left(k_1+k_3u^2\right) \tag{6a}$$

$$i_d=\dot{i}=u/L_N=uk_1+k_3u^3 \tag{6b}$$

$$L_N=L_0\big/\left(1+a_3CL_0u^2\right),\qquad a_1=\omega_0^2=1\big/\left(CL_0\right)$$

$$k_1=1/L_0=a_1C\qquad k_3=a_3C \tag{7}$$

$$L_{eq}=U_{Sm}/I_{dSm}=L_0\big/\left(1+3a_3CL_0U_{Sm}^2/4\right) \tag{8a}$$

$$\omega_S^2=1\big/\left(L_{eq}C\right)=\omega_0^2+3a_3U_{sm}^2/4 \tag{8b}$$

压控非线性电感 L_N 被表为式(6)，它建立 u 和 $\dot{i}=\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 之间的非线性关系，各系数的关系如式(7)，式中 a_1,a_3,k_1,k_3 均为常系数。用 L_N 与电容 C 并联构成谐振回路如图 2，可获得方程式(1)。

定义：以正弦电压 $u_S=U_{Sm}\sin\omega t$ 激励 L_N，引起的 $i_d=\dot{i}$ (电流的微分)含有多次谐波，仅取其中的基波项 I_{dSm} 与 U_{Sm} 的比值 U_{Sm}/I_{dSm} 定义为等效基波电感 L_{eq}，其谐振频率 ω_S 如式(8)。

$$u=u_{ht}+u_{pt}=U_{hm}\sin\omega_ht+U_{pm}\sin\omega_pt \tag{9}$$

$$L_{eqh}=U_{hm}/I_{dhm}=L_0\big/\left(1+3a_3CL_0U_{eqh}^2/4\right) \tag{10a}$$

$$U_{eqh}^2=U_{hm}^2+2U_{pm}^2 \tag{10b}$$

$$L_{eqp}=U_{pm}/I_{dpm}=L_0\big/\left(1+3a_3CL_0U_{eqp}^2/4\right) \tag{11a}$$

$$U_{eqp}^2=U_{pm}^2+2U_{hm}^2 \tag{11b}$$

定义：如果 u 是两个正弦电压源的串联如式(9)作用于 L_N。则定义比值 U_{hm}/I_{dhm} 为关于 ω_h 分量的等效基波电感 L_{eqh} 如式(10)；其中 U_{eqh} 代表两个主谐波 U_{hm}，U_{pm} 非线性耦合引起的关于自振方面的等效电压幅值；定义比值 U_{pm}/I_{dpm} 为关于 ω_p 分量的等效基波电感 L_{eqp} 如式(11)；其中 U_{eqp} 代表 U_{hm}，U_{pm} 非线性耦合引起在强迫振荡方面的等效电压幅值。

$$L_{N5}=1\big/\left(k_1+k_5u^4\right)\qquad k_5=a_5C \tag{12a}$$

$$i_d=\dot{i}=u/L_{N5}=k_1u+k_5u^5 \tag{12b}$$

$$L_{eq5}=L_0\big/\left(1+5a_5CL_0U_{sm}^4/8\right) \tag{13a}$$

$$\omega_{S5}^2=1\big/\left(L_{eq5}C\right)=\omega_0^2+5a_5U_{sm}^4/8 \tag{13b}$$

$$L_{eqh5}=L_0\big/\left(1+5a_5CL_0U_{eqh5}^4/8\right) \tag{14a}$$

$$U_{eqh5}^4=U_{hm}^4+6U_{hm}^2U_{pm}^2+3U_{pm}^4 \tag{14b}$$

如果 $\dot{i}=\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 和 u 之间的非线性关系如式(12)，则等效基波电感 L_{eq5} 与谐振频率 ω_{S5} 如式(13)。如果两个正弦源串联作用于 L_{N5}，关于 ω_h 分量的等效基波电感 L_{eqh5} 如式(14)。程序 Leq.nb 按有关的定义式，用 TrigReduce 语句，在三角函数展开式中取出相应的基波项，而后求出两基波项的比值，就可得出各等效基波电感与谐振频率如上列各式。

3. 无损耗电路的主谐波解

如果图 2 又接入激流源 i_F，共同构成一个无耗系统如图 3，尽管这电路包含驱动电流源 i_F，但谐振回路 L_NC 不可能吸收实功率，它仍然是一个无损耗系统，进入 L_NC 的平均功率始终是零。

例 2 非线性电感 $L_N=1\big/\left(k_1+k_3u^2\right)$，电路图 3 的状态方程如下

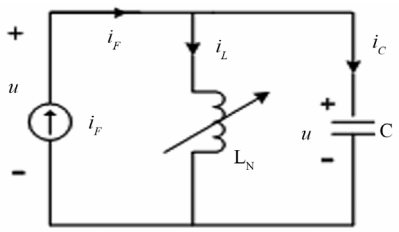

Figure 3. Typical circuit
图 3. 典型电路

Copyright © 2012 Hanspub

$$i_F = I_{Fmr}\sin\omega_F t + I_{Fmx}\cos\omega_F t = I_{Fm}\sin\left(\omega_F t+\theta\right)$$

$$\omega_p = \omega_F = 1400$$

$$\dot{i}_L = u/L_N, \qquad \dot{u} = \left(-i_L + i_F\right)/C \tag{15}$$

$$\ddot{u} + u\left(a_1 + a_3u^2\right) = \dot{i}_F/C \tag{16a}$$

$$f\left(u\right) = a_3u^3 = a_3\left(u_1+u_N\right)^3 = f_M\left(u\right) + f_N\left(u\right)$$

$$C = 10\text{^}(-6);\ a_1 = 250000;\ a_3 = 3500 \tag{16b}$$

$$u = u_1 + u_N \qquad u_1 = u_{ht} + u_{pt} \tag{17a}$$

$$u_1 = U_{hmr}\sin\omega_h t + U_{hmx}\cos\omega_h t + U_{pmr}\sin\omega_F t + U_{pmx}\cos\omega_F t$$

$$U_{hm}^2 = U_{hmr}^2 + U_{hmx}^2 \qquad U_{pm}^2 = U_{pmr}^2 + U_{pmx}^2 \tag{17b}$$

$$u\left(0\right) = U_{hmx} + U_{pmx} \quad \dot{u}\left(0\right) = \omega_h U_{hmr} + \omega_p U_{pmr} \tag{18}$$

$$\ddot{u}_1 + u_1a_1 + f_M\left(u\right) + \ddot{u}_N + u_Na_1 + f_N\left(u\right) = \dot{i}_F/C \tag{19}$$

$$\ddot{u}_1 + u_1a_1 + f_M\left(u_1\right) = \dot{i}_F/C \qquad f_M\left(u\right) \approx f_M\left(u_1\right) \tag{20}$$

$$\omega_h^2 = a_1 + 3a_3U_{eqh3}^2/4 = 1/\left(CL_{eqh3}\right) \tag{21a}$$

$$U_{eqh3}^2 = U_{hm}^2 + 2U_{pm}^2 \tag{21b}$$

$$L_{eqh3} = L_0/\left(1+3a_3CL_0U_{eqh3}^2/4\right) = 1/\omega_h^2C \tag{22}$$

$$a_1 = \omega_0^2 = 1/\left(CL_0\right)$$

$$Q_{\omega h} = U_{hm}^2B_i/2 \tag{23a}$$

$$B_i = \omega_hC - 1/\left(\omega_hL_{eqh3}\right) = 0 \tag{23b}$$

状态方程式(15)转换成标量方程式(16)，设(16)的解是(17)。初值$u\left(0\right)$与$\dot{u}\left(0\right)$及两个主谐波幅值的关系如式(18)。用(17a)代入(16a)可得(19)，此处u_1表示两主谐波，u_{ht}表示自振分量u_{pt}表示受迫分量，u_N表示非主谐波，ω_h表示自振频率，$f_M\left(u\right)$表示由非线性项a_3u^3引起的主谐波成份，$f_N\left(u\right)$表示a_3u^3引起的非主谐波成份。$f_M\left(u_1\right)$表示由$a_3u_1^3$引起的主谐波成份，如果忽略$f_M\left(u\right)$与$f_M\left(u_1\right)$两者之间的不同，也就是认为$f_M\left(u\right) \approx f_M\left(u_1\right)$，则可以由式(19)建立主谐波平衡方程式(20)。

程序 whwh.nb 求出自振频率ω_h与两主谐波幅值的关系如式(21)，等效基波电感L_{eqh3}如式(22)，验证自振分量的虚功平衡如式(23)。

两个主谐波有四个系数平衡方程，其中关于$\sin\omega_h t$，$\cos\omega_h t$两个系数平衡方程只有一个是独立的。还有两个起始条件$u\left(0\right)=0$，$\dot{u}\left(0\right)=0$共有五个独立方程，当激流值I_{Fmr}, I_{Fmx}变化时，以式(16b)的参数，程序 Tab2.nb 求出主谐波解的五个未知变量，即式(17)四个系数$U_{hmr}, U_{hmx}, U_{pmr}, U_{pmx}$与$\omega_h$列如表 2，画相图都能够产生混沌，图 4 仅列出其中两个，这些相图都是仿真一定时间取最后 1%相点画出的。

例 3 电路图 3 非线性电感$L_N = 1/\left(k_1 + k_3u^2 + k_5u^4\right)$，状态方程如式(15)，其它参数与例 2 相同

$$\ddot{u} + u\left(a_1 + a_3u^2 + a_5u^4\right) = \dot{i}_F/C \tag{24a}$$

$$f_5\left(u\right) = a_3u^3 + a_5u^5 = f_{5M}\left(u\right) + f_{5N}\left(u\right) \quad \omega_F = 1200$$

$$a_1 = 250000;\ a_3 = 3500;\ a_5 = 2;\ C = 10^{-6} \tag{24b}$$

$$\ddot{u}_1 + u_1a_1 + f_{5M}\left(u_1\right) = \dot{i}_F/C \qquad f_{5M}\left(u_1\right) \approx f_{5M}\left(u\right) \tag{25}$$

$$U_{eqh3}^2 = U_{hm}^2 + 2U_{pm}^2;\ U_{eqh5}^4 = U_{hm}^4 + 3U_{pm}^4 + 6U_{hm}^2U_{pm}^2 \tag{26a}$$

$$\omega_{h35}^2 = a_1 + 3a_3U_{eqh3}^2/4 + 5a_5U_{eqh5}^4/8 \tag{26b}$$

$$L_{eq35} = L_0/\left(1+3a_3CL_0U_{eqh3}^2/4 + 5a_5CL_0U_{eqh5}^4/8\right) \tag{27}$$

$$Q_{\omega h} = U_{hm}^2B_i/2 \qquad \omega_{h35}^2 = 1/L_{eq35}C \tag{28a}$$

$$B_i = \omega_{h35}C - 1/\left(\omega_{h35}L_{eq35}\right) = 0 \tag{28b}$$

Table 2. Main harmonic solutions of example 2
表 2. 例 2 的主谐波解

	$i_F = I_{Fmr}\sin\omega_F t + I_{Fmx}\cos\omega_F t$ $\quad i_r = I_{Fmr}$ $\quad i_x = I_{Fmx}$ $\quad u_{\max} = u_{hm} + u_{pm}$
A	$i_r = 0.012$ $\quad i_x = 0.009$ $\quad I_{Fm} = 0.015$ $\quad u_{pm} = 19.7$ $\quad u_{hm} = 18.3$ $\quad u_{\max} = 38$ $u_1 = 15.76\cos[1400\,t] - 15.76\cos[1779\,t] - 11.8\sin[1400\,t] + 9.30\sin[1779\,t]$
B	$i_r = 0.03$ $\quad i_x = 0.05$ $\quad I_{Fm} = 0.0583$ $\quad u_{pm} = 29.15$ $\quad u_{hm} = 20.84$ $\quad u_{\max} = 50$ $u_1 = 15.0\cos[1400\,t] - 15.0\cos[2419\,t] - 25\sin[1400\,t] + 14.5\sin[2419\,t]$
C	$i_r = 0.05$ $\quad i_x = 0.03$ $\quad I_{Fm} = 0.0583$ $\quad u_{pm} = 26.3$ $\quad u_{hm} = 23.9$ $\quad u_{\max} = 50.2$ $u_1 = 22.5\cos[1400\,t] - 22.5\cos[2318\,t] - 13.5\sin[1400\,t] + 8.16\sin[2318\,t]$
D	$i_r = 30$ $\quad i_x = 40$ $\quad I_{Fm} = 50$ $\quad u_{pm} = 249.5$ $\quad u_{hm} = 150.4$ $\quad u_{\max} = 399.9$ $u_1 = 149.7\cos[1400\,t] - 149.7\cos[19661\,t] - 199.6\sin[1400\,t] + 14.2\sin[19661\,t]$

Copyright © 2012 Hanspub

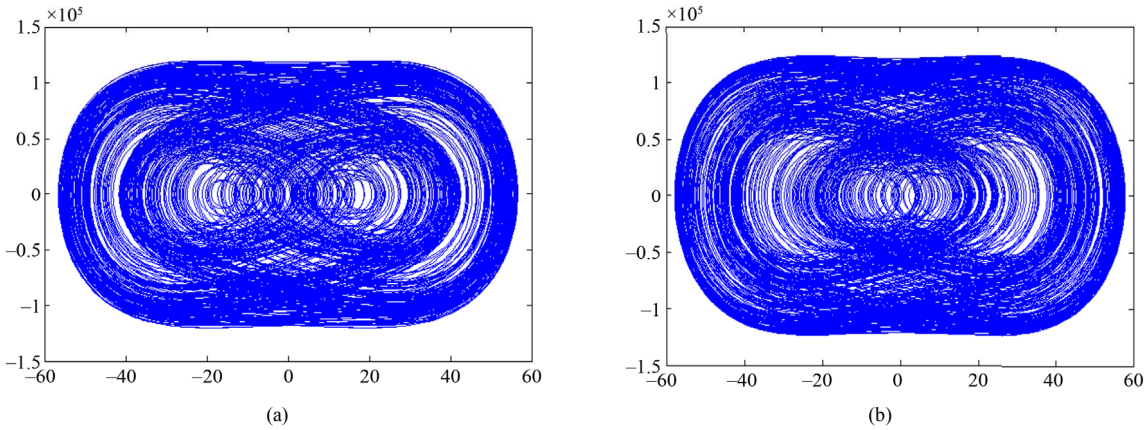

Figure 4. Phase portrait of the Eq.(16) of example 2 horizontal axis is u; vertical axis is $\dot{u} = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$: (a) i_r = 0.03; i_x = 0.05; (b) i_r = 0.05; i_x = 0.03

图 4. 例 2 式(16)的相图，横座标 u；纵座标 $\dot{u} = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ ：(a) i_r = 0.03; i_x = 0.05; (b) i_r = 0.05; i_x = 0.03

标量方程如式(24)，式中非线性项 $f_5(u)$ 引起的主谐波成分表为 $f_{5M}(u) \approx f_{5M}(u_1)$ 可得主谐波平衡方程如式(25)；程序 wh35.nb 求出等效电压振幅值 U_{eqh3}^2，U_{eqh5}^4 自振频率 ω_{h35}^2 如式(26)，等效基波电感 L_{eq35} 如式(27)，虚功平衡等式(28)。以式(24b)的参数，当激流值 I_{Fmr}, I_{Fmx} 变化时，程序 Tab3.nb 求出主谐波解 u_1 列如表 3；画相图都能够产生混沌，图 5 仅列出其中两个，也是取最后 1%相点画成的。

例 4 如果例 2 的参数保持 $a_1 = 250000$，$I_{Fmr} = 0.3$，$I_{Fmx} = 0.4$ 不变，而改变 a_3，程序 Tab4.nb 求主谐波解 u_1 的变化情况列如表 4，表中所列的各种情况均能诞生混沌。只列出其中的两个相图如图 6。

4. 无损耗系统的虚功率平衡

在给定电路参数和起始条件下，可以求出确定的主谐波解即式(17)四个系数 $U_{hmr}, U_{hmx}, U_{pmr}, U_{pmx}$ 与 ω_h，并论证主谐波解的两个电压分量在各种情况下，各自保持虚功率平衡。

一方面，自振分量的虚功平衡等式与受迫振荡电压 u_{pt} 的存在有关，因为不同的 L_N，自振分量的等效电感值 L_{eqh3}，L_{eqh5}，L_{eqh35} 与受迫幅值 U_{pm} 有关，但 ω_h 频率自振分量在 $L_N C$ 并联回路消耗的虚功要自身完成平衡，不能由激流源送出虚功去填补。式(23)与(28)验证自振分量的虚功平衡自动完成平衡。

另方面，受迫分量在任意初相角 θ 情况下，电流 I_{Fm} 与电压 U_{pm} 之间的相角恒为 $\pi/2$，注入的实功率恒为零，以例 2 表 2 第 D 情况 $I_{Fm} = 50$ 为例，激流源送出的虚功 Q_F 如式(29a)。要注意 L_{eqp} 是代表受迫振荡分量的等效基波电感。B_i 代表受迫分量的输入电纳。对于例 2，3，4 不同的 L_N 有不同的 L_{eqp}。参看程序 Tab2D.nb，输入复功率 W 等于电流向量 I_{Fm} 与电压共轭向量 $U_{pm}^{\bullet}$ 的乘积如式(29b)，它印证(29a)的结果。各种情况的功率平衡关系，由程序 Tab2/3/4.nb 均能印证各分量的虚功各自守恒。

$$B_i = \omega_F C - 1/(\omega_F L_{eqp}) = -0.200365$$

$$Q_F = I_{Fm}^2/(2B_i) = -6238.61 \tag{29a}$$

$$L_{eqp} = L_0/\left(1 + 3a_3 C L_0 U_{eqp}^2/4\right) \qquad U_{eqp}^2 = U_{pm}^2 + 2U_{hm}^2$$

$$U_{pm} = I_{Fm}/B_i = 249.5$$

$$W = I_{Fm} * U_{pm}^{\bullet}/2 = 0 - j6238.6 = jQ_F \tag{29b}$$

5. 无损耗电路的基本属性

5.1. 三个表 2，3，4 的所有情况均产生混沌

其中表 2 与表 3 说明随外激源的增大，混沌的最大值 $u_{\max} \approx u_{hm} + u_{pm}$ 也随之增大。表 4 说明自上而下 a_3 逐步减小，非线性弹簧的刚性系数随着 a_3 的减小而减弱弹簧变软，在相同的初激振力下，其位移 $u_{\max}$ 单调递增，自振频率 ω_h 单调递减。

5.2. 无耗电路图 3 没有暂态过程

当初始条件变化时相图轨线敏感的发生变化，它几乎没有暂态过程，电流源一合闸就开始进入稳态。初始值包括 $u(0)$, $\dot{u}(0)$ 与加入 i_F 第一瞬间的初相角

Copyright © 2012 Hanspub

Table 3. Main harmonic solutions of example 3
表 3. 例 3 的主谐波解

	$i_r = I_{Fmr}$ $i_x = I_{Fmx}$ $u_{\max} = u_{hm} + u_{pm}$
A	$i_r = 0.001$ $i_x = 0.002$ $I_{Fm} = 0.00224$ $u_{pm} = 2.56$ $u_{hm} = 4.8$ $u_{\max} = 7.36$ $u_1 = 1.14\cos[589\,t] - 1.14\cos[1200\,t] - 4.66\sin[589\,t] + 2.29\sin[1200\,t]$
B	$i_r = 0.008$ $i_x = 0.006$ $I_{Fm} = 0.01$ $u_{pm} = 14.64$ $u_{hm} = 13.57$ $u_{\max} = 28.21$ $u_1 = 11.7\cos[1200\,t] - 11.7\cos[1539\,t] - 8.78\sin[1200\,t] + 6.85\sin[1539t]$
C	$i_r = 0.03$ $i_x = 0.06$ $I_{Fm} = 0.067$ $u_{pm} = 24.6$ $u_{hm} = 15.1$ $u_{\max} = 39.7$ $u_1 = 11\cos[1200\,t] - 11\cos[2546.\,t] - 22\sin[1200\,t] + 10.4\sin[2546\,t]$
D	$i_r = 0.06$ $i_x = 0.03$ $I_{Fm} = 0.067$ $u_{pm} = 20.86$ $u_{hm} = 19.25$ $u_{\max} = 40.11$ $u_1 = 18.7\cos[1200\,t] - 18.7\cos[2366\,t] - 9.33\sin[1200\,t] + 4.73\sin[2366\,t]$

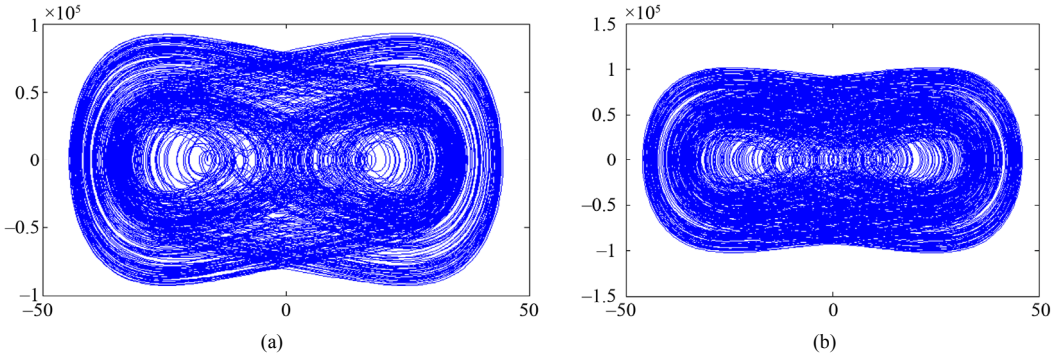

Figure 5. Phase portrait of the Equation (24) of example 3 horizontal axis is u; vertical axis is $\dot{u} = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$: (a) $i_r = 0.03$; $i_x = 0.06$; (b) $i_r = 0.06$; $i_x = 0.03$

图 5. 例 3 的式(24)的相图，横座标 u；纵座标 $\dot{u} = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ ： (a) $i_r = 0.03$; $i_x = 0.06$; (b) $i_r = 0.06$; $i_x = 0.03$

Table 4. Main harmonic solution of example 4
表 4. 例 4 的主谐波解

	$i_F = 0.3\sin\omega_F t + 0.4\cos\omega_F t$ $I_{Fm} = 0.5$ $u_{\max} = u_{hm} + u_{pm}$
A	$a_3 = 3000$ $u_{pm} = 57.6$ $u_{hm} = 37.7$ $u_{\max} = 95.3$ $u_1 = 34.6\cos[1400\,t] - 34.6\cos[4287\,t] - 46.1\sin[1400\,t] + 15.05\sin[4287\,t]$
B	$a_3 = 1000$ $u_{pm} = 83.8$ $u_{hm} = 56.5$ $u_{\max} = 140.3$ $u_1 = 50.3\cos[1400\,t] - 50.3\cos[3631\,t] - 67\sin[1400\,t] + 25.9\sin[3631\,t]$
C	$a_3 = 100$ $u_{pm} = 186.9$ $u_{hm} = 137.5$ $u_{\max} = 324.4$ $u_1 = 112\cos[1400\,t] - 112\cos[2628\,t] - 149.5\sin[1400\,t] + 79.6\sin[2628\,t]$
D	$a_3 = 50$ $u_{pm} = 239.5$ $u_{hm} = 181.8$ $u_{\max} = 421.4$ $u_1 = 143.7\cos[1400\,t] - 143.7\cos[2407\,t] - 191.6\sin[1400\,t] + 111.5\sin[2407\,t]$

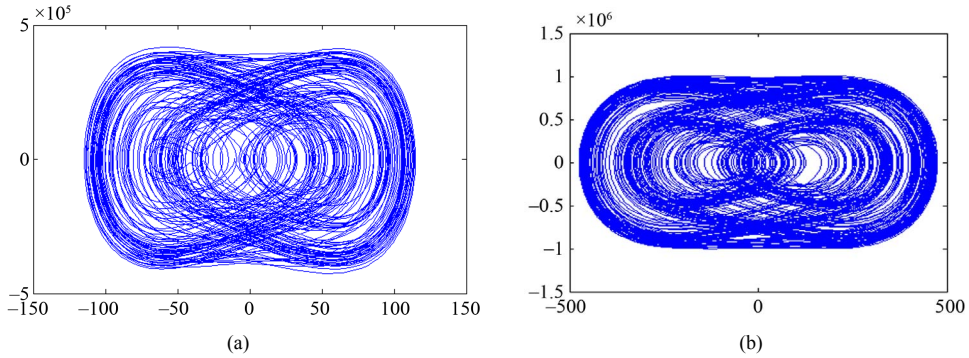

Figure 6. Phase portrait of example 4 horizontal axis is u; vertical axis is $\dot{u} = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$: (a) $a_3 = 3000$; (b) $a_3 = 50$

图 6. 例 4 的相图，横座标 u；纵座标 $\dot{u} = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ ： (a) $a_3 = 3000$; (b) $a_3 = 50$

Copyright © 2012 Hanspub

$\theta = \arctan\left(I_{Fmx}/I_{Fmr}\right)$，初始值的变化，会引起主谐波解四个幅值系数与 ω_h 与混沌相图的变化。表 2 与表 3 是固定 $u(0)=0,\ \dot{u}(0)=0$，但初始条件还与初相角 θ 有关，由于 θ 不同也会引起四个幅值系数，自振频率与混沌相图的变化。当电流幅值 I_{Fm} 相同的情况下，参看表 2 的第 B 与 C 两种情况只有 θ 不同，但其自振频率与四个系数也不同，参看图 4(a)与(b)相图的细节也不同。参看表 3 第 C 与 D 两种情况的 θ 不同，其自振频率与四个系数也不同，相图 5(a)与(b)的细节也不同。

5.3. 非线性无耗电路没有固定的自激频率

含耗能元件的非线性系统及线性无耗系统(自治或非自治)，均有一个确定的固有频率满足虚功平衡条件，这个频率仅仅取决于自身网络特性与外激初始等条件无关。唯独非线性无耗电路图 3 没有一个仅取决于自身网络特性的自激固有频率。ω_h 受外激和初始等条件各因素的影响而敏感的变化。

对初值的敏感依赖性，决定了图 3 是一个在很普遍情况下能够很容易诞生混沌的典型电路，作为一个混沌信号发生器是很合适的，它不须要为形成混沌吸引子而刻意的去设计各元件参数。三个表的各数据都能诞生混沌，激流源的幅值 $I_{Fm} \ll 1$ 安培，在实际工程技术中是很容易实现的。

5.4. 非线性无耗系统的轨道是局部不稳定

其相图和极限环不同，极限环当初始条件变化时进入稳态轨线不变，有较强的抗干扰能力，相点因偶然因素的干扰，离开极限环的稳态轨道会自动回到固有的环道上来。图 3 电路对初始值的敏感依赖性说明它的抗干扰能力差，这个诞生混沌信号系统的解是确定的，尽管在各种各样外随机因素的影响干扰下，混沌相图的轨线随时随刻都会发生细节性的微小变化，但这种干扰引起的变化，不能改变诞生混沌的本质现象。一方面说明这是非线性函数关系之间的正常连续性变化，并没有引起蝴蝶效应，没有引起质的根本性变化，蝴蝶效应仅可能出现在特定的点，混沌相轨线不可能处处都是蝴蝶效应，另方面它说明这个相轨道是局部不稳定的。解的确定性与稳定性是两个不同概念不能相互混淆，例如不稳定极限环是微分方程确定性的解，但它是不稳定的。自然界包括线性情况有很多不稳定解都是确定性的。如何对混沌信号加以控制，提高其抗干扰能力，也是推广应用混沌的关键。

5.5. 图 2 保守系统轨道稳定性有两个特点

一方面，相轨迹在小干扰下并不保持固定，可以认为是局部不稳定的(在小范围)。另方面，相点不趋于无穷可以认为是全局稳定的(在大范围)它是不趋于无穷有界的非线性函数。干扰能量一旦进入电路，没有被消耗或泄放掉，只好堆迭在原来初始储能的基础上导致相轨道发生变化；就是说用李亚普诺夫稳定性理论的间接法判定是小范围不稳定的。同理加入激流源 i_F 的无损耗电路图 3，当出现干扰时，能量迭加到当时的状态储能，干扰能量滞留在系统内没有被吸收而是参与交换过程，同样会导致相轨道的改变。以上一切属性与混沌的特征完全一致。对于说明混沌的内在本质属性有重要的理论价值[15-17]。

6. 振荡解的周期性与非周期性

6.1. 线性周期振荡的相图

$$\ddot{u} + u\omega_0^2 = \left(30\cos\omega_F t - 40\sin\omega_F t\right)\times 14\times 10^8 \quad (30a)$$

$$\omega_0 = 500,\ \ \omega_F = 1400 \quad (30b)$$

$$u = \left(2.46\cos\omega_0 t - 2.46\cos\omega_F t - 9.16\sin\omega_0 t + 3.27\sin\omega_F t\right)\times 10^4 \quad (31a)$$

$$U_{pm}^2 = \left(3.27^2 + 2.46^2\right)\times 10^8 \qquad U_{pm} = 40920$$

$$U_{hm}^2 = \left(9.16^2 + 2.46^2\right)\times 10^8 \qquad U_{hm} = 94846$$

$$U_{\max} = U_{hm} + U_{pm} = 135766 \quad (31b)$$

1) 对于例 2 式(16)与例 3 式(24)列出各种外激情况，电路图 3 都能产生混沌。其中系数 a_3 与 a_5 是引起非线性与混沌的全部关键，如果去除非线性项 $f(u)$ 令 $a_3, a_5 = 0$ 则图 3 变成线性电路，取表 2 的第 D 组参数，列线性方程如式(30)，其周期解如式(31)，基频固定不变 $\omega_1 = 100$，自振分量是 5 次谐波，受迫振荡是 14 次谐波，画其相图可以发现一开始进入如图 7 显示的轨线后，就不断无休止的重复，不论仿真步长多么小与仿真时间多么长，显示轨线极其确定的重复，是一个闭合周期轨，它没有起始和终止线头，这个系统没有暂态过程。其最大值 $U_{\max}$ 如式(31b)与相图显示吻合。

Copyright © 2012 Hanspub

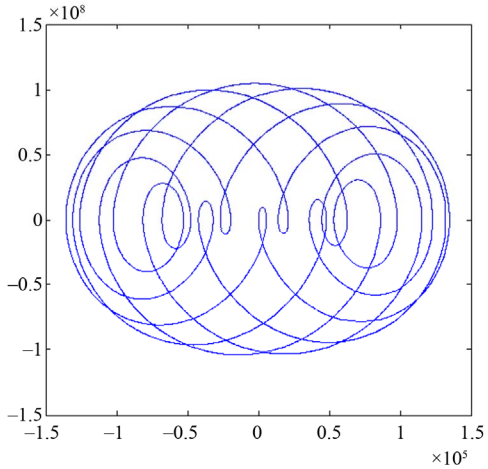

Figure 7. Phase portrait of the Equation (30)
图 7. 式(30)的相图

以上论述可得如下结论：如果方程属于普遍情况含有非线性项 $f(u)$ 和足够的外激强度，则其解是混沌的，这是非线性微分方程解的普遍形式，当取线性的特殊情况其解是周期的，它印证非线性和混沌是普遍的；线性和周期性是特殊的。

2) 主谐波平衡方程的相图。以表 2 的第 D 种情况为例，列出主谐波平衡方程式(20)的具体形式如下

$$\ddot{u}+\omega_h^2 u=\left(5.75739\cos\omega_F t-7.67651\sin\omega_F t\right)*10^{10}$$

$$\omega_h=19661,\quad \omega_F=1400 \tag{32}$$

$$u_1=149.7\cos[1400\,t]-149.7\cos[19661\,t]$$
$$-199.6\sin[1400\,t]+14.2\sin[19661\,t] \tag{33}$$

式(32)是一个类似于式(30)的线性方程，如果又引入初始条件 $u(0)=0,\ \dot{u}(0)=0$，根据线性理论求其解如式(33)即表 2 第 D 组数据的主谐波解，是一个周期函数基频 $\omega_1=1,\ T=2\pi$，用 $T/50$ 画出的相图 8 显然应该是非周期的，但由于轨线非常稠密不断的环绕，已无法直观的分辨出这个相图是非周期的，如果延长观测时间，从 $T/50$ 延长到 T，则相图轨线的遍历性充满性会严重到显示区内一片漆黑看不到轨线的线条。达到如此程度时，从直观也更加根本无法分辨出它是周期的。

主谐波解是原始方程式(16)解的主体基本部份，是方程的近似解，其误差是 $f_M(u)$ 与 $f_M(u_1)$ 两者不同引起的，当考虑非主谐波项的参与也会引起主谐波解的变化时，主谐波解会包含有耦合进来的非主谐波幅值项，主谐波解的相图与原始方程式(16)解的相图会

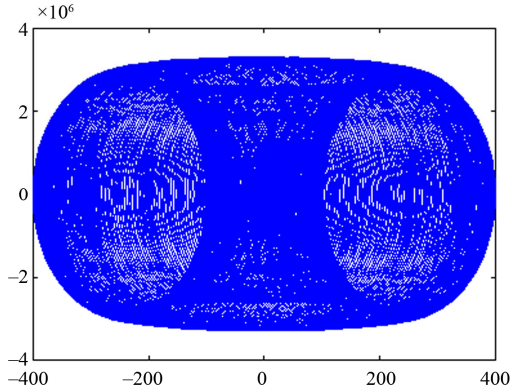

Figure 8. Phase portrait of the Equation (32)
图 8. 式(32)的相图

有一定差别。

3) 通过图 8 轨线的充满性说明两个问题：第一，呈现的相图发现有起始线头代表振荡有暂态过程。如果发现有终止线头，说明它不是一个闭合的周期轨，如果确认它没有终止线头，则它是一个周期解。如果能够直观的在呈现相图上，分辨出是否有终止线头，则不难判断系统的周期性。但有时由于相轨线的遍历性充满性稠密性而根本分辨不出来。第二，如果呈现的相图发现有终止线头，也不能说明它是非周期的，因为有可能它是一个周期解；而在我们的仿真或显示时间内，它还没有完成一个周期。究竟要仿真多少时间才算足够，这是一个遥遥无期的答案。混沌的很多相图也有类似情况，用李亚普诺夫指数也不能准确判断类似情况的非周期性。混沌振荡也可以用还没有完成一个周期来认识它的非周期性。一般说在足够仿真时间内，取最后 5%以内相点显示的相图，如果仍旧呈现轨线的遍历性稠密性，不能明显呈现闭周期轨，就可以认为在仿真时间内是非周期混沌的。

6.2. 混沌相图的非周期性

$$\ddot{u}+u\left(25\times10^4+50u^2\right)=\dot{i}_F/C$$

$$i_F=0.3\sin\omega_F t+0.4\cos\omega_F t \tag{34}$$

取例 4 表 4 第 D 组数据可得式(34)，其激流幅值 $I_{Fm}=0.5$ 安，非线性项在微分方程中所占的份量是很微弱的 $a_3/a_1=1/5000$，但画相图 6(b)仍然混沌。可以进一步减小 I_{Fm} 加大 a_3，例如表 2 的 A、B、C 三组数据 I_{Fm} 只有几十毫安，而 $a_3=3500$ 也仍然可达到混沌的目的。就是说要实现图 3 典型电路诞生混沌信号

Copyright © 2012 Hanspub

是完全可行的。图 3 电路作为一个混沌信号发生器，具有广泛的实用价值。

判断周期或非周期可参考以下方法：例如采用 Ode5 固定步长算法，取仿真时间 time = 20；步长 step = 10^(−5)/2；相图画的点数有四百万个点，将 time 分为 10 等分，表为 $t_1 = 1$，$t_2 = 2 \cdots t_k = k \cdots t_{10} = \text{time} = 10$。做十个相图依次为 plot(0:$t_1$)，plot(0:$t_2$) ⋯ plot(0:$t_{10}$)，如果第 k 相图和第 $k + 1$ 相图完全一致，说明到达第 k 等分时间，系统已完成一个周期，$k + 1$ 相图的轨线只是重复前面的轨迹而已，它不可能出现新的轨线。即如果观测时间内系统振荡解是非周期的，则这十个相图互不相同，并且后面相图的轨线比前面的更加稠密，这是非周期性的必要条件，但其逆不真。

7. 结论

混沌振荡究竟是在观测时段内还没有完成一个周期，或者根本没有周期是一个几乎无法论证的命题。设想基频是 1 纳赫 = 10^{-9}/秒的周期 $T = 10^9$ 秒 = 31.7 年，如果在 T 时间内还没看到一周期而断定它的非周期性，相反的意见可以认为它的周期是 33 年，并非它没有周期而是我们还没观测到足够长的时间。余此类推，一个有界反复变化(不是单调递减)的非线性函数。要定义它的周期性必须首先定义它的观测时间。例如有一段非周期函数只限在 33 年时段内没有看到它的周期，我们不能说它是在无限区间内的非周期函数，也许它的周期是 34 年，混沌就是这样一种有界的非线性函数。

只有当在无穷时间内是双向(正向与负向)单调递减的函数，才能定义它是在无穷区间内的非周期函数，而混沌是一段在观测、仿真、显示时间内反复变化的非周期函数，它的 Fourier 变换存在。

8. 致谢

感谢国家自然科学基金资助项目：非线性微分方程基础上的功率平衡(60662001)。

参考文献 (References)

[1] 黄炳华. 埃米特矩阵和集成网络的稳定性[J]. 固体电子学研究和进展, 1997, 17(3): 235-241.
[2] 黄炳华. 埃米特矩阵的第二形式及其应用[J]. 通信学报, 1999, 2: 53-57.
[3] 黄炳华. 用埃米特式计算复功率[J]. 电路与系统学报, 1999, 4(2): 45-52.
[4] 黄炳华, 卫雅芬, 黄莹. 非线性振荡每一谐波成份的复功率守恒[A]. 第 23 届电路与系统学术年会论文集[C], 桂林电子科技大学, 2011.
[5] S.-M. Yu, S.-S. Qiu and Q.-H. Lin. New results of study on generating multiple-scroll chaotic attractors. Science in China (Series F), 2003, 46(2): 104-115.
[6] M. P. Kennedy. Chaos in the colpitts oscillator. IEEE Transactions on CAS-1, 1994, 41(11): 771-774.
[7] G. M. Maggio, O. De Feo and M. P. Kennedy. Nonlinear analysis of the colpitts oscillator and applications to design. IEEE Transactions on CAS, 1999, 46(9): 1118-1130.
[8] D. D. Ganji, M. Esmaeilpour and S. Soleimani. Approximate solutions to Van der Pol damped nonlinear oscillators by means of He's energy balance method. Computer Mathematics, 2010, 87(9): 2014-2023.
[9] Y. M. Chen, J. K. Liu. A new method based on the harmonic balance method for nonlinear oscillators. Physics Letters A, 2007, 368(5): 371-378.
[10] 黄炳华, 黄新民, 张海明. 各类自激振荡的基波分析法[J]. 固体电子学研究和进展, 2005, 25(1): 102-107.
[11] 黄炳华, 黄新民, 王庆华. 用基波平衡原理分析非线性电子网络的稳定性[J]. 固体电子学研究和进展, 2006, 26(1): 43-48.
[12] 黄炳华, 黄新民, 韦善革. 用基波平衡原理分析非线性振荡与混沌[J]. 通信学报, 2008, 29(1): 65-70.
[13] 黄炳华, 钮利荣, 蔺兰峰. 功率平衡基础上的基波分析法[J]. 电子学报, 2007, 35(10): 1994-1998.
[14] 黄炳华, 陈辰, 韦善革. 基波平衡原理的推广[J]. 固体电子学研究和进展, 2008, 28(1): 57-62.
[15] 黄炳华, 黄新民, 李晖. 基于功率平衡的谐波分析法[A]. 22 届电路与系统学术年会论文集[C], 上海复旦大学, 2010.
[16] B.-H. Huang, X.-M. Huang and H. Li. Main components of harmonic solutions. International Conference on Electric Information and Control Engineering, Nanning, 15-17 April 2011: 2307-2310.
[17] B.-H. Huang, X.-M. Huang and H. Li. Main components of harmonic solutions of nonlinear oscillations. Procedia Engineering, 2011, 16: 325-332.
[18] S. M. Yu, W. K. S. Tang, J. Lu, et al. Generating 2n-wing attractors from Lorenz-like systems. International Journal of Circuit Theory and Applications, 2010, 38(3): 243-258.
[19] Mathematica 程序(按出现先后排序)：①Tab1.nb; ②Leq.nb; ③whwh.nb; ④Tab2.nb; ⑤wh35.nb; ⑥Tab3.nb; ⑦Tab4.nb.

Copyright © 2012 Hanspub