

Dynamics of Entanglement of Two Entangled Two-Level Atoms Interacted with Single-Mode Field

Xiaomei Sun, Qiao Liu, Youzhi Liu, Yanliang Zhang

College of Software, Jishou University, Zhangjiajie Hunan
Email: yanliang_zhang2007@163.com

Received: Oct. 29th, 2017; accepted: Nov. 12th, 2017; published: Nov. 20th, 2017

Abstract

The influence of dipole-dipole interactions between the two two-level entangled atoms for dynamics of quantum entanglement is studied in the system of matter-field interaction in quantum optics. The results show that the dipole-dipole interaction is capable to suppress dynamics of quantum entanglement (concurrence). If we have no regard for the dipole-dipole interaction, the dynamic of quantum entanglement is periodic oscillation including two different frequencies. Meanwhile, the frequency is decreasing with the increasing of the dipole-dipole interaction. When this interaction is much larger than that between the atoms and independent the single-mode field (modeled as extern environment), the process of dynamic of quantum entanglement is cosine oscillation with frequency $2\pi\Omega/(\sqrt{6}g)$.

Keywords

Dynamics of Quantum Entanglement, Entangled Two-Level Atoms, Dipole-Dipole Interaction

两纠缠二能级原子与单模光场相互作用的纠缠动力学过程研究

孙晓梅, 刘巧, 刘有志, 张延亮

吉首大学, 软件学院, 湖南 张家界
Email: yanliang_zhang2007@163.com

收稿日期: 2017年10月29日; 录用日期: 2017年11月12日; 发布日期: 2017年11月20日

摘要

在光原子相互作用系统中,考虑两二能级原子间的偶极-偶极相互作用对原子间纠缠动力学过程的影响。研究表明:原子间的偶极-偶极相互作用对量子纠缠(共生纠缠度)动力学振荡过程具有抑制作用,当偶极-偶极相互为零时,量子纠缠呈双周期振荡效果,当偶极-偶极相互作用增强时,振荡频率逐渐降低,当偶极-偶极相互作用远大于原子与库环境相互作用强度时,量子纠缠呈明显的余弦振荡,其振荡频率为 $2\pi\Omega/(\sqrt{6}g)$ 。

关键词

量子纠缠动力学, 纠缠二能级原子, 偶极-偶极相互作用

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

量子系统的纠缠现象是量子力学中最为奇妙的特征之一,量子纠缠态被认为是实现量子信息处理的一种非常重要的物理资源,已经广泛应用于量子隐形传态、量子密集编码、量子密码通信及量子计算等量子信息处理任务[1],各国研究人员已对不同物理体系中的量子纠缠开展了大量研究。光与物质的相互作用是量子光学种的重要课题,也是实现量子信息处理和量子计算最有前途的技术之一,量子纠缠长期以来一直是量子光学领域的研究热点。Jaynes-Cummings 是模型描述单个原子与单模光场相互作用的经典模型[2],人们对这种模型进行了大量推广研究,揭示出许多光与物质相互作用的非经典现象。如单个原子与单模光场的相互作用,多个原子与单模光场的相互作用等,并将其应用于实际工作中,取得了丰硕的研究成果[3]-[8]。然而,大多数的关于 Jaynes-Cummings 模型的推广研究中主要考虑原子是具有独立性的原子,即假定原子之间相距较远,忽略了原子之间的偶极-偶极相互作用。在实际量子计算等量子信息处理任务中,当两个纠缠二能级原子与两个独立单模光场相互作用时,如果两个二能级原子相隔距离较小或者原子间的相互作用较强时,由于原子的电偶极相互作用能以及真空起伏诱导等原因,导致原子之间的偶极-偶极相互作用不可忽略,那么,在光与原子相互作用系统中,原子间的内秉偶极相互作用对原子的纠缠特性有什么影响呢?

本文讨论了两个纠缠二能级原子与独立单模光场相互作用系统中。在不忽略原子间的偶极-偶极相互作用的情况下。量子纠缠动力学过程,分析了偶极-偶极相互作用强度对量子纠缠的影响。

2. 理论模型

我们将一对处于纠缠状态的二能级原子在库环境中的耗散模型处理为两个二能级原子共同与单模光场相互作用,在旋波近似条件下,量子系统的哈密顿量表示为(设 $\hbar=1$):

$$H = \omega_0 \sum_{i=1}^2 S_3^{(i)} + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{i=1}^2 g \left(\hat{a}^\dagger S_-^{(i)} + \hat{a} S_+^{(i)} \right) + \Omega \left(S_+^{(1)} S_-^{(2)} + S_-^{(1)} S_+^{(2)} \right) \quad (1)$$

其中 ω_0 表示二能级原子的跃迁频率, ω 表示单模电磁场的本征频率, g 为二能级原子与库环境相互作用

强度， Ω 为两个二能级原子之间的相互作用强度。在相互作用绘景中，其共振条件下($\omega_0 = \omega$)的有效哈密顿量可以表示为：

$$H = \sum_{i=1}^2 g \left(\hat{a}^+ S_-^{(i)} + \hat{a} S_+^{(i)} \right) + \Omega \left(S_+^{(1)} S_-^{(2)} + S_-^{(1)} S_+^{(2)} \right) \quad (2)$$

假设初始时刻单模电磁场处于量子真空状态 $|\psi_F(0)\rangle = |0\rangle$ ，两纠缠二能级原子处于一般纠缠态 $|\psi_A(0)\rangle = \alpha|+,+\rangle + \beta|-, -\rangle$ ，复系数 α 和 β 表示几率幅且满足规划条件 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 。则量子系统的初态可以表示为：

$$|\psi_{AF}(0)\rangle = \alpha|+,+,0\rangle + \beta|-, -,0\rangle \quad (3)$$

量子系统经过时间演化后，其量子态可以表示为：

$$|\psi_{AF}(t)\rangle = a(t)|+, -,1\rangle + b(t)|-, +,1\rangle + c(t)|-, -,2\rangle + \beta|-, -,0\rangle \quad (4)$$

将上式代入薛定谔方程。并考虑初始条件，方程中各系数分别为：

$$\begin{aligned} a(t) &= r_0 + r_1 \exp(i\theta_1 t) + r_2 \exp(i\theta_2 t) \\ b(t) &= c(t) = -\frac{1}{2g} (\theta_1 r_1 \exp(i\theta_1 t) + \theta_2 r_2 \exp(i\theta_2 t)) \\ c(t) &= -\frac{r_0}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} r_1 \exp(i\theta_1 t) + \sqrt{2} r_2 \exp(i\theta_2 t) \end{aligned} \quad (5)$$

其中，

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{2} \left(-\Omega + \sqrt{\Omega^2 + 24g^2} \right) \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} \left(-\Omega - \sqrt{\Omega^2 + 24g^2} \right) \\ r_0 &= \frac{2\alpha}{3}, r_1 = \frac{2\alpha g^2}{\theta_1(\theta_1 - \theta_2)}, r_2 = -\frac{2\alpha g^2}{\theta_2(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned} \quad (6)$$

对环境求部分迹运算后，经过时间演化的两原子纠缠态可用密度矩阵表示为：

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & & & \rho_{14}(t) \\ & \rho_{22}(t) & \rho_{23}(t) & \\ & \rho_{32}(t) & \rho_{33}(t) & \\ \rho_{41}(t) & & & \rho_{44}(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= |a(t)|^2, \rho_{22}(t) = |b(t)|^2 \\ \rho_{33}(t) &= |c(t)|^2, \rho_{44}(t) = |d(t)|^2 + |\beta|^2 \\ \rho_{14}(t) &= a(t)\beta, \rho_{41}(t) = \beta a^*(t) \\ \rho_{23}(t) &= b(t)c^*(t), \rho_{32}(t) = c(t)b^*(t) \end{aligned} \quad (8)$$

3. 量子纠缠度量

对于量体系的量子纠缠系统的度量问题，Wootters 提出了一种简洁的方法称之为共生纠缠 (concurrence) [9]。给另一个两体系统的密度矩阵 ρ ，其共生纠缠 C 的计算公式为：

$$C = \max \left\{ 0, \sqrt{\delta_1} - \sqrt{\delta_2} - \sqrt{\delta_3} - \sqrt{\delta_4} \right\} \quad (9)$$

其中 $\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \delta_4$ 为以下矩阵 M 的本征值,

$$M = \rho_A(t) \left(\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \right) \rho_A^*(t) \left(\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \right) \quad (10)$$

分别为

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \left(\sqrt{\rho_{22}(t)\rho_{33}(t)} + |\rho_{23}(t)| \right)^2 \\ \delta_2 &= \left(\sqrt{\rho_{22}(t)\rho_{33}(t)} - |\rho_{23}(t)| \right)^2 \\ \delta_3 &= \left(\sqrt{\rho_{11}(t)\rho_{44}(t)} + |\rho_{14}(t)| \right)^2 \\ \delta_4 &= \left(\sqrt{\rho_{11}(t)\rho_{44}(t)} - |\rho_{14}(t)| \right)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

$\sigma_y^{(1)}$ 和 $\sigma_y^{(2)}$ 分别表示原子 A 和原子 B 的 y 分量的 Pauli 算符, $\rho_A^*(t)$ 表示密度矩阵 $\rho_A(t)$ 的转置复共轭矩阵。纠缠量 C 位于 0 和 1 之间, $C=0$ 时表示完全分离态, $C=1$ 时表示为最大纠缠态。对密度矩阵为 X 型矩阵时, 其纠缠度可表示为:

$$C(\rho_A(t)) = 2 \max \left\{ 0, |\rho_{23}(t)| - \sqrt{\rho_{11}(t)\rho_{44}(t)}, |\rho_{14}(t)| - \sqrt{\rho_{22}(t)\rho_{33}(t)} \right\} \quad (12)$$

4. 数值结果与分析

当两原子相距很远时, 可以将两原子间的偶极 - 偶极相互作用忽略, 即 $\Omega=0$, 则

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{2\alpha}{3} + \frac{2}{3} \cos(\sqrt{6}gt) \\ b(t) &= c(t) = -i \frac{\alpha}{\sqrt{6}} \sin(\sqrt{6}gt) \\ d(t) &= -\frac{2\alpha}{3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\alpha}{3} \cos(\sqrt{6}gt) \end{aligned} \quad (11)$$

根据纠缠度计算公式, 可得两原子间的纠缠度为

$$C(\rho_A(t)) = \frac{2\alpha\beta}{3} + \frac{\alpha\beta}{3} \cos(\sqrt{6}gt) - \frac{\alpha^2}{3} \sin^2(\sqrt{6}gt) \quad (12)$$

由此可见, 与真空辐射场的相互作用的两个二能级原子, 由于原子间的内秉相互作用效应, 量子纠缠动力学过呈现振荡过程, 且包含两种频率的振荡。

图 1 给出了由公式(14)描述的共生纠缠随时间演化规律。可以看到, 其纠缠度作周期为 $\frac{2\pi}{\sqrt{6}g}$ 的振荡。

当初始态为最大纠缠态时, 就纠缠度幅值在 1 和 0.367 之间变化, 这表明由于原子间的合作效应的影响, 初始态处于最大纠缠的两二能级原子, 在真空辐射场的作用下, 量子纠缠不会完全消失。当初始态为非最大纠缠态时, 纠缠度的振荡周期减小。

在不忽略原子间的偶极 - 偶极相互作用条件下, 即 $\Omega \neq 0$, 可以看到, 两原子间的纠缠振荡频率的变化不是很明显, 但是其振荡幅度随时间的增加而逐渐减小, 表明原子间较弱的偶极 - 偶极相互作用对原子的量子纠缠的退化起着加强的作用。图 2 给出了 $\Omega=5g$ 时的量子纠缠的动力学过程, 结果表明原子间较强的相互作用使得量子纠缠振荡频率明显减小, 即振荡的过程中更难以到达纠缠的最大值和最小值。

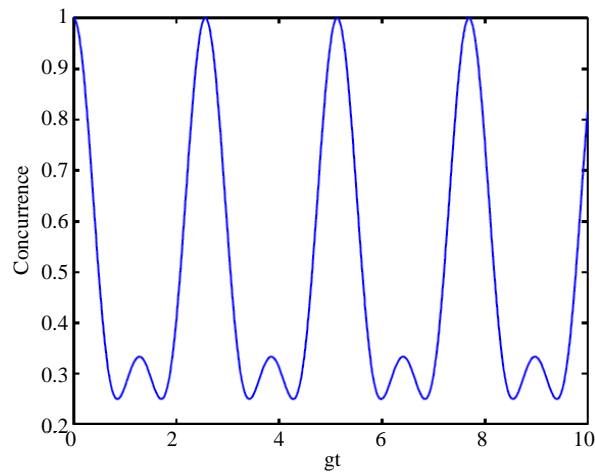


Figure 1. Dynamics of entanglement of two entangled two-level atoms ($\Omega = 0$)

图 1. 两个二能级原子间的纠缠动力学($\Omega = 0$)

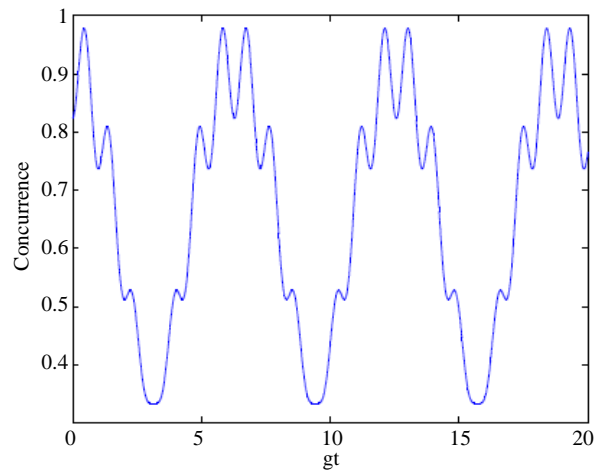


Figure 2. Dynamics of entanglement of two entangled two-level atoms ($\Omega = 5g$)

图 2. 两个二能级原子间的纠缠动力学($\Omega = 5g$)

当原子间的偶极-偶极相互作用继续增强时, 即 $\Omega = 20g$ 时, 此时认为 $\Omega^2 \gg 24g^2$, 由图 3 可以看出, 原子间的纠缠量随时间呈现出较为规则的余弦振荡过程, 且振荡频率更加降低。对此我们对公式(6)进行近似分析, 有

$$\theta_1 \approx \frac{6g^2}{\Omega}, \quad \theta_2 = -\Omega \quad (13)$$

此时, 系统随时间的演化可表示为:

$$\begin{aligned} |\psi_{AF}(t)\rangle = & \frac{\alpha}{3} \left[2 \cos \frac{3g^2 t}{\Omega} \exp\left(i \frac{3g^2 t}{\Omega}\right) + 1 \right] |+, +, 0\rangle \\ & + \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} \alpha \cdot i \cdot \sin \frac{3g^2 t}{\Omega} \exp\left(i \frac{3g^2 t}{\Omega}\right) \right] |-, -, 2\rangle + \beta |-, -, 0\rangle \end{aligned} \quad (14)$$

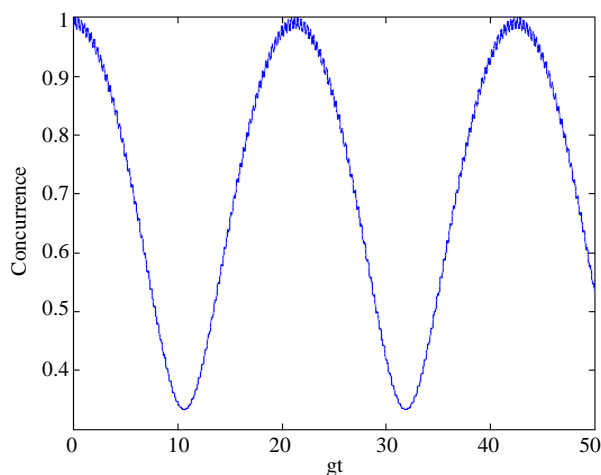


Figure 3. Dynamics of entanglement of two entangled two-level atoms ($\Omega = 20g$)

图 3. 两个二能级原子间的纠缠动力学($\Omega = 20g$)

根据纠缠度计算公式, 可以得出两原子间的纠缠度为:

$$C(\rho_A(t)) = \frac{2\alpha}{3} \left[2 \cos \frac{3g^2 t}{\Omega} \exp \left(i \frac{3g^2 t}{\Omega} \right) + 1 \right] \beta \quad (15)$$

显然, 此式呈现出如图 3 所示的特征, 其振荡频率为 $\frac{2\pi\Omega}{\sqrt{6}g}$ 。

5. 结论

本文研究两二能级原子与独立单模光场相互作用系统中。原子间的偶极-偶极相互作用对原子间纠缠(共生纠缠度)动力学过程的影响。研究表明: 当两原子相距很远时, 两原子间的偶极-偶极相互作用忽略, 与真空辐射场的相互作用的两二能级原子, 由于原子间的内禀相互作用效应, 量子纠缠动力学过呈现振荡过程, 且包含两种频率的振荡。当不忽略原子间的偶极-偶极相互作用时, 其原子间的相互作用对量子纠缠动力学振荡过程具有抑制作用。随着偶极-偶极相互作用增强, 两原子间的量子纠缠振荡频率逐渐降低, 当偶极-偶极相互作用远大于原子与库环境相互作用强度时, 量子纠缠呈明显的余弦振荡, 其振荡频率为 $\frac{2\pi\Omega}{\sqrt{6}g}$ 。其研究结论将为量子光学实际应用提供一定理论依据。

基金项目

本项目为吉首大学大学生研究性学习和创新性实验计划支持项目。

参考文献 (References)

- [1] 尼尔森. 量子计算和量子信息[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [2] 彭金生. 近代量子光学导论[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [3] 李忱. 量子通信中受激辐射下两原子有效量子纠缠问题的研究[J]. 通讯世界, 2017(4): 35-36.
- [4] 廖庆洪, 胡靓, 胡婉如, 等. 驱动两能级原子和真空场相互作用系统中纠缠突然死亡的操控[J]. 量子光学学报, 2017, 23(1): 21-30.
- [5] 卢道明. 原子与热库相互作用系统中的三体纠缠特性[J]. 光子学报, 2017, 46(2): 145-153.

-
- [6] Amooghorban, E. and Alebrahim, E. (2017) Entanglement Dynamics of Two Two-Level Atoms in the Vicinity of an Invisibility Cloak. *Physical Review A*. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.012339>
- [7] Alqannas, H.S. and Khalil, E.M. (2018) Quantum Interaction of SU(1,1) Lie Group with Entangled a Two 2-Level Atoms. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, **489**, 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.07.015>
- [8] Liu, T.K., Tao, Y., Shan, C.J., *et al.* (2017) Quantum Entanglement and Correlation of Two Qubit Atoms Interacting with the Coherent State Optical Field. *International Journal of Theoretical Physics*, **2**, 1-12. <https://doi.org/10.1007/s10773-017-3491-7>
- [9] Wootters, W.K. (1998) Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters*, **80**, 2245. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2161-0916, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: mp@hanspub.org