Modern Physics 现代物理, **2018, 8(3), 95-106**
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2018.83012

Noncommutative Quantum Gravity

Gang Li

Shanghai Jinmao Dress Co., LTD, Shanghai
Email: ganglee69@msn.com

Received: Apr. 26th, 2018; accepted: May 10th, 2018; published: May 17th, 2018

Abstract

To solve the difficulty of quantization in gravitational field, we introduce a very different approach to the theory of gravitational field. This paper is based on the principle of equivalence and the uncertainty principle. We find that introducing the uncertainty principle into the inertial coordinate system will change the geometry of spacetime, and the geometry of the gravitational field has become the noncommutative lattices. Then the gravitational field appears in the sense of the general relativity. We obtain the semiclassical graviton. We discuss the dynamics and quantization of the graviton, and obtain the gravitational field equation. We obtain the Green's function of the graviton by the field equation, and the resulting Feynman rule can solve the difficulty of the Feynman integral divergence.

Keywords

Graviton, Uncertainty Principle, Principle of Equivalence, Noncommutative Lattices, Green's Function

非对易量子引力

李　刚

上海金茂服饰有限公司，上海
Email: ganglee69@msn.com

收稿日期：2018年4月26日；录用日期：2018年5月10日；发布日期：2018年5月17日

摘　要

为解决引力场量子化的困难，我们从一个完全不同的途径引入引力相互作用。本文的基础建立在等效原理和测不准原理上。我们发现对惯性系引入测不准原理将会改变几何结构，使几何成为非对易格，这样在广义相对论的意义上出现了引力场。我们由此得到了半经典的引力子。我们讨论了引力子的动力学和量子化，建立了引力子的场方程。从引力子的场方程出发我们推导出了引力子的Green函数，由此得到的Feynman规则可以解决Feynman积分发散困难。

文章引用：李刚. 非对易量子引力[J]. 现代物理, 2018, 8(3): 95-106.
DOI: 10.12677/mp.2018.83012

关键词

引力子，测不准原理，等效原理，非对易格，Green函数

1. 引言

本文从一个完全不同的途径在 4 维 Minkowshi 空时中通过测不准原理引入引力相互作用。根据等效原理，构造引力场等同于建立局部惯性系。本文将说明如何从测不准原理出发推导出局部惯性系，从而得到广义相对论意义上的引力场，由此解决引力场传播子 Feynman 积分发散的问题。

本文第二节是数学准备，从非对易几何的一个简单模型出发简要阐述了非对易格。第三节中我们在非对易格的基础上推导出了非对易引力场理论，并得到了半经典的引力子。第四节中我们讨论了引力子的动力学，给出了引力子的作用量及其正则量子化。第五节中我们通过引力子的场方程推导出了引力子的 Green 函数，由此 Green 函数得到的 Feynman 规则可以解决 Feynman 图积分发散问题。

2. 非对易格

首先我们从一个简单的模型出发简要阐述非对易几何中一个非对易空间的模型——非对易格。限于篇幅，本文不讨论数学细节。有关非对易几何的数学可参阅文献[1]。

令 $S^1=\{0\le\phi\le 2\pi,\ \mathrm{mod}\ 2\pi\}$。$S^1$ 上粒子探测器 U_1,U_2,U_3 各自的测量范围如下：

$$U_1=\left(-\frac{1}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right),U_2=\left(\frac{1}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right),U_3=(\pi,2\pi) \tag{2.1}$$

探测器无法辨别各自测量范围内不同的点。如果 U_1 和 U_2 探测到粒子，则我们可知粒子位于交集 $U_1\cap U_2$ 内。由于我们无法通过探测器得知粒子位于交集内的哪一点，因此对于粒子探测器 U_1,U_2,U_3 来说 S^1 只能被认知为如下 6 个点的集和 $P=\{\alpha,\beta,\lambda,a,b,c\}$：

$$\begin{aligned}U_1\cap U_3&=\left\{\frac{5}{3}\pi<\phi<2\pi\right\}\to\alpha\\U_1\cap U_2&=\left\{\frac{1}{3}\pi<\phi<\frac{2}{3}\pi\right\}\to\beta\\U_2\cap U_3&=\left\{\pi<\phi<\frac{4}{3}\pi\right\}\to\gamma\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}U_1\setminus\{U_1\cap U_2\cup U_1\cap U_2\}&=\left\{0\le\phi\le\frac{1}{3}\pi\right\}\to a\\U_2\setminus\{U_2\cap U_1\cup U_2\cap U_3\}&=\left\{\frac{2}{3}\pi\le\phi\le\pi\right\}\to b\\U_3\setminus\{U_3\cap U_2\cup U_3\cap U_1\}&=\left\{\frac{4}{3}\pi\le\phi\le\frac{5}{3}\pi\right\}\to c\end{aligned}$$

这 6 个点构成的代数为非对易的格代数，因此其集合构成非对易格，记为 $P_6(S^1)$。其 Hasse 图为图 1。有关非对易格的具体数学细节可参阅文献[2]。

对于 1 维的实数轴 R^1，非对易格 $P\left(R^1\right)$ 的 Hasse 图为图 2。

非对易格的基本单位是偏序集 $\vee$，其 Hasse 图为图 3。

3. 非对易格与引力场

测不准原理为：$\Delta r\Delta p \approx \hbar, \Delta t\Delta E \approx \hbar$。4 维空时中测不准关系给出了一个半径为 $\left(\Delta r, \Delta t\right)$ 的区域。由于测不准原理的限制，一个粒子探测器只能测得粒子是否在此区域内，而无法精确测得粒子位于此区域中的哪一点。从数学上说粒子探测器无法辨别此区域内不同的点。

在广义相对论中，根据引力场的标架表述，局部惯性系张成引力场的余切空间(可参阅文献[3]第十二章第 5 节)。从量子论中力学量算符表示的角度来看，余切空间对应于能量-动量，因此惯性系与能量-动量相关。我们假设受到测不准原理的限制，在惯性系中无法精确地测量一个空时点，对空时点测量的精确度只能精确到一个半径为 $\left(\Delta r, \Delta t\right)$ 的区域。考虑到在量子论的意义上空时在尺度为 Planck 长度 l_p 和 Planck 时间 t_p 以内的涨落，我们假设在惯性系中对空时点测量的精确度原则上只能达到 Planck 长度 l_p 和

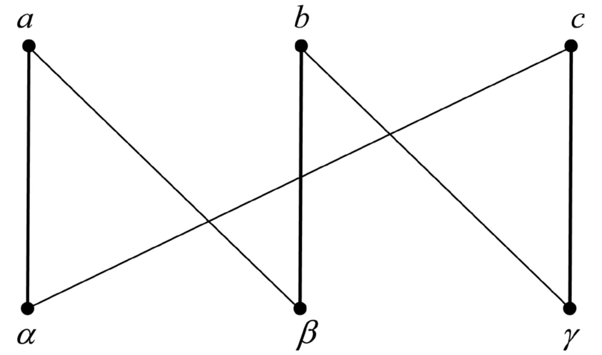


Figure 1. Hasse diagram of lattices $P_6\left(S^1\right)$

图 1. 非对易格 $P_6\left(S^1\right)$ 的 Hasse 图

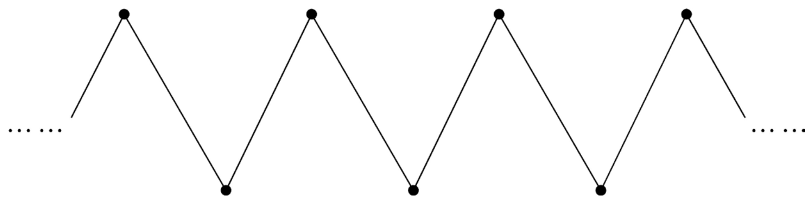
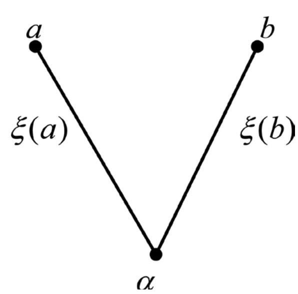


Figure 2. Hasse diagram of lattices $P\left(R^1\right)$

图 2. 非对易格 $P\left(R^1\right)$ 的 Hasse 图



Figyre 3. $\vee$ poset

图 3. 偏序集 $\vee$

Planck 时间 t_p 的精度，因此在引力场中我们试取此测不准区域的半径为 Planck 长度 l_p 和 Planck 时间 t_p：$(\Delta r, \Delta t) = (l_p, t_p)$。

根据上述假设，我们首先研究 1 维空时的模型。设 x 为 1 维空时的坐标系，a 和 b 为空时中的两个点。令空时为平坦的，我们可以选择一个整体的惯性系 $\xi(x)$。类似于量子论中的算符表示，也可将 1 维空时的整体惯性系算符记为 $\hat{\xi}$。在不考虑测不准原理的情况下，算符 $\hat{\xi}$ 与整体惯性系 $\xi(x)$ 没有区别。$\hat{\xi}$ 在任一点 X 处的本征值即为 $\xi(x)$ 在该点的值 $\xi(X)$。

现在对惯性系 $\xi(x)$ 引入测不准原理。引入测不准原理后惯性系 $\xi(x)$ 将受到测不准原理的限制，因此 $\xi(a)$ 无法精确地对应于点 a，而只能对应于点 a 的一个半径为 l_p 的邻域，$\xi(b)$ 也同样如此。与上节所讨论的数学模型做类比，$\xi(a)$ 和 $\xi(b)$ 类似于粒子探测器 U_1, U_2, U_3。因此由于测不准原理的作用，由惯性系张成的 1 维空间的几何为非对易格。非对易格的基本单位为偏序集 $\vee$，因此算符 $\hat{\xi}$ 的本征值对应于偏序集 $\vee$。

如果点 a 和点 b 之间的距离小于 Planck 长度 l_p，那么由于测不准原理的限制我们无法通过惯性系来区分点 a 和点 b。因此对于惯性系来说如果点 a 和点 b 是相邻的，那么 a 和 b 之间的距离为 l_p。

将偏序集 $\vee$ 的双臂分别对应于 $\xi(a)$ 和 $\xi(b)$，如图 3。在偏序集 $\vee$ 上，$\hat{\xi}(\vee)$ 的本征值为：

$$\lambda\left(\hat{\xi}(\vee)\right) = \xi(a) \text{ or } \xi(b) \tag{3.1}$$

上式可理解为：在区间 (a,b) 内，探测器 $\xi(a)$ 和 $\xi(b)$ 均可探测到粒子。

点 a 和点 b 之间的距离为 l_p。l_p 是坐标系 x 中的量，在惯性系 $\xi(x)$ 中，l_p 应写为如下形式：

$$l_p \to l_p \cdot \frac{\mathrm{d}\xi(x)}{\mathrm{d}x} \tag{3.2}$$

由此可得到如下关系式：

$$\xi(b) = \xi(a) \pm l_p \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\xi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} \tag{3.3}$$

由式(3.1)和式(3.3})可得整体惯性系本征值的一般形式：

$$\lambda\left(\hat{\xi}\right)\Big|_X = \xi(X) \pm l_p \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\xi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=X} \tag{3.4}$$

其中 l_p 等于 0 或 l_p。

式(3.4)中 $\hat{\xi}$ 是 1 维平坦空时中的整体惯性系算符，因此原来的整体惯性系 $\xi(x)$ 受测不准原理的影响仅为物理点 X 处的惯性系，即点 X 处的局部惯性系。

现在讨论 4 维空时。令空时为 4 维 Minkowski 空间，在直角坐标系 x^μ 中 Minkowski 度规为：$\eta_{\mu\nu} = diag(+,+,+,-)$。为了方便直观取 4 维球极坐标系 $r^i = (r,\theta,\phi,t)$ 如下：

$$\begin{aligned} x^1 &= r\sin\theta\cos\phi \\ x^2 &= r\sin\theta\sin\phi \\ x^3 &= r\cos\theta \\ x^4 &= t \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中球极坐标系的极点为 x，$r \in [0,+\infty), \theta \in [0,\pi], \phi \in [0,2\pi), t \in (-\infty,+\infty)$。

4 维球极坐标系中的 Minkowski 度规为：

$$\eta_{ij}=\begin{pmatrix}1&&&\\&r^2&&\\&&r^2\sin^2\theta&\\&&&-1\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

4 维 Minkowski 空时中的整体惯性系算符记为 $\hat{\xi}$。引入测不准原理后，在球极坐标系 r^i 的极点 x 处的惯性系可在 r^i 中表示为：

$$\lambda\left(\hat{\xi}\right)=\left(\lambda\left(\hat{\xi}^r\right),\lambda\left(\hat{\xi}^\theta\right),\lambda\left(\hat{\xi}^\phi\right),\lambda\left(\hat{\xi}^t\right)\right) \tag{3.7}$$

由式(3.4)可知，惯性系的各个分量为：

$$\begin{aligned}&\lambda\left(\hat{\xi}^r\right)=\xi^r+l_p\cdot\frac{\partial\xi^r}{\partial r}\\&\lambda\left(\hat{\xi}^\theta\right)=\xi^\theta\\&\lambda\left(\hat{\xi}^\phi\right)=\xi^\phi\\&\lambda\left(\hat{\xi}^t\right)=\xi^t+t_p\cdot\frac{\partial\xi^t}{\partial t}\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $\left(\xi^r,\xi^\theta,\xi^\phi,\xi^t\right)$ 为球极坐标系 r^i 的极点 x 处的局部惯性系。

由于空时为 Minkowski 空间，可得：

$$\begin{aligned}&\lambda\left(\hat{\xi}^r\right)=\xi^r+l_p\cdot\frac{\partial\xi^r}{\partial r}=r\\&\lambda\left(\hat{\xi}^\theta\right)=\xi^\theta=\theta\\&\lambda\left(\hat{\xi}^\phi\right)=\xi^\phi=\phi\\&\lambda\left(\hat{\xi}^t\right)=\xi^t+t_p\cdot\frac{\partial\xi^t}{\partial t}=t\end{aligned} \tag{3.9}$$

方程组(3.9)的解为：

$$\xi^i=\begin{cases}\xi^r=\left(r-l_p\right)+C_r\exp\left(-\dfrac{r}{l_p}\right)+C_r'\\\xi^\theta=\theta+C_\theta'\\\xi^\phi=\phi+C_\phi'\\\xi^t=\left(r-t_p\right)+C_t\exp\left(-\dfrac{|t|}{t_p}\right)+C_t'\end{cases} \tag{3.10}$$

其中 C_r,C_t 为积分常数，$C_r',C_\theta',C_\phi',C_t'$ 为任意常数。

由于我们总是要对局部惯性系求导，为了简单起见，可以略去式(3.10)中的任意常数 $C_r',C_\theta',C_\phi',C_t'$。因此方程组(3.9)的解可以简写为：

$$\xi^i=\begin{cases}\xi^r=r+C_r\exp\left(-\dfrac{r}{l_p}\right)\\\xi^\theta=\theta\\\xi^\phi=\phi\\\xi^t=t+C_t\exp\left(-\dfrac{|t|}{t_p}\right)\end{cases} \tag{3.11}$$

令 $C=\dfrac{1}{2\Delta x}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时函数 $C\exp\left(-\dfrac{x}{\Delta x}\right)$ 为 Dirac-δ 函数。由于半径 $\left(l_p,t_p\right)$ 是非常小量，因此式(3.11)近似于 4 维 Dirac-δ 函数，所以方程组(3.9)的解可以视为球极坐标系极点处的一个粒子。由于式(3.11)表示极点处的局部惯性系，因此此粒子可理解为位于极点处的一个半经典的引力子。

一个半经典的引力子可诱导出一个度规：

$$
\begin{aligned}
g_{ij}\left(r\right) &= \eta_{mn}\frac{\partial \xi^m}{\partial r^i}\frac{\partial \xi^n}{\partial r^j} \\
&= \begin{pmatrix} \left(1-\dfrac{C_r}{l_p}\exp\left(-\dfrac{r}{l_p}\right)\right)^2 & & & \\ & r^2 & & \\ & & r^2\sin^2\theta & \\ & & & -\left(1-\dfrac{C_t}{t_p}\exp\left(-\dfrac{|t|}{t_p}\right)\right)^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

4. 引力子的动力学与量子化

现在讨论引力子的动力学。设 τ 为引力子运动的轨迹参数，则一个运动的引力子可以记为 $\xi^i\left(\tau,r\right)$。在运动路径 τ 上建立球极坐标系 r_τ^i，其中下标 τ 表示球极坐标系的极点位于点 τ，在不引起疑义时我们略去下标。根据式(3.11)，引力子的运动变量为：$\left(C_r,\theta,\phi,C_t\right)$。在路径 τ 上，运动变量可写为：$\left(C_r\left(\tau\right),\theta\left(\tau\right),\phi\left(\tau\right),C_t\left(\tau\right)\right)$。

点 τ 处激发的引力子可表示为：

$$
\xi^i\left(\tau,r\right)=\begin{cases} \xi^r = r+C_r\left(\tau\right)\exp\left(-\dfrac{r}{l_p}\right) \\ \xi^\theta = \theta\left(\tau\right) \\ \xi^\phi = \phi\left(\tau\right) \\ \xi^t = t+C_t\left(\tau\right)\exp\left(-\dfrac{|t|}{t_p}\right) \end{cases} \tag{4.1}
$$

粒子从一个点运动到另一个点时经典上沿着极值路径，因此引力子的作用量正比于世界线的长度：

$$
\begin{aligned}
S &= m\int \mathrm{d}s \\
&= m\int \mathrm{d}\tau\sqrt{-\eta_{ij}\frac{\partial \xi^i}{\partial \tau}\frac{\partial \xi^j}{\partial \tau}} \\
&\equiv m\int \mathrm{d}\tau\sqrt{-\eta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j}
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Lagrange 密度为：

$$
\mathscr{L}=m\cdot\sqrt{-\eta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j}\equiv m\cdot\sqrt{-\dot{\xi}^i\dot{\xi}_i} \tag{4.3}
$$

Lagrange 方程为:

$$
\partial_\tau\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\xi}^i}\right)=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi^i} \tag{4.4}
$$

由式(4.3)可得：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi^i} = 0 \tag{4.5}$$

因此引力子的运动方程可写为：

$$\partial_\tau \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\xi}^i} \right) = \partial_\tau \left[m \cdot \frac{\dot{\xi}^i}{\sqrt{-\dot{\xi}^2}} \right] = 0 \tag{4.6}$$

作用量是无量纲的，对式(4.2)做量纲分析可知因子 m 具有质量量纲，可以理解为粒子的质量，因此由式(4.3)给出的 Lagrange 密度对于无质量粒子来说定义是不清楚的。

我们另取一个经典等价的作用量。取辅助变量 $e(\tau)$ 作为世界线上的单标架，相应的度规为 $g_{\tau\tau} = e^2$，$g^{\tau\tau} = e^{-2}$。与式(4.3)经典等价的作用量如下：

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}\tau \sqrt{g_{\tau\tau}} \left(g^{\tau\tau} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j \eta_{ij} - m^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}\tau\, e \cdot \left(\frac{\dot{\xi}^2}{e^2} - m^2 \right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

上式对 $e(\tau)$ 变分：

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\tau \left(\frac{\dot{\xi}^2}{e^2} + m^2 \right) \delta e \tag{4.8}$$

令 $\delta S = 0$ 可以给出对 $e(\tau)$ 的运动方程：

$$\frac{\dot{\xi}^2}{e^2} + m^2 = 0 \tag{4.9}$$

由此运动方程可得：

$$e = \frac{\sqrt{-\dot{\xi}^2}}{m} \tag{4.10}$$

作用量(4.7)对 ξ^i 变分：

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\tau \left(\frac{2\dot{\xi}^i}{e^2} \right) \partial_\tau \delta \xi^i \tag{4.11}$$

上式分部积分后可得引力子的运动方程：

$$\partial_\tau \left(e^{-1} \dot{\xi}^i \right) = 0 \tag{4.12}$$

将式(4.10)代入式(4.7)可得作用量(4.2)，将式(4.10)代入式(4.12)可得运动方程(4.6)。由此可知作用量(4.17)与作用量(4.2)是经典等价的。

将运动方程(4.12)进一步写成如下形式：

$$\partial_\tau \dot{\xi}^i - e^{-1} \dot{e} \dot{\xi}^i = 0 \tag{4.13}$$

这是一个测地线方程。由于空时是 Minkowski 空间，由此可得自由引力子的运动方程为：

$$\partial^\tau \partial_\tau \xi^i = 0 \tag{4.14}$$

因此自由引力子的运动方程是一个波动方程。

参数 τ 是自由引力子的轨迹参数。在场论中，可用空间坐标参数 x^μ 替换轨迹参数：$\tau \to x^\mu$。球极坐标系变换为：$r_\tau^i \to r_x^i$，其中下标 x 表示球极坐标系的极点在点 x 处，在不引起疑义时我们略去下标。引力子 $\xi^i(x,r)$ 可写为：

$$\xi^i(x,r)=\begin{cases}\xi^r=r+C_r(x)\exp\left(-\dfrac{r}{l_p}\right)\\ \xi^\theta=\theta(x)\\ \xi^\phi=\phi(x)\\ \xi^t=t+C_t(x)\exp\left(-\dfrac{|t|}{t_p}\right)\end{cases} \tag{4.15}$$

运动方程如下:

$$\partial^\mu\partial_\mu\xi^i=0 \tag{4.16}$$

运动方程的解为:

$$\xi^i(x,r)=\begin{cases}\xi^r=r+\langle x|C_r\rangle\exp\left(-\dfrac{r}{l_p}\right)\\ \xi^\theta=\langle x|\theta\rangle\\ \xi^\phi=\langle x|\phi\rangle\\ \xi^t=t+\langle x|C_t\rangle\exp\left(-\dfrac{|t|}{t_p}\right)\end{cases} \tag{4.17}$$

其中

$$\begin{aligned}\langle x|C_r\rangle&=\int d^4k\left(C_r(k)\exp(ikx)+C_r^*(k)\exp(-ikx)\right)\\ \langle x|\theta\rangle&=\int d^4k\left(\theta(k)\exp(ikx)+\theta^*(k)\exp(-ikx)\right)\\ \langle x|\phi\rangle&=\int d^4k\left(\phi(k)\exp(ikx)+\phi^*(k)\exp(-ikx)\right)\\ \langle x|C_t\rangle&=\int d^4k\left(C_t(k)\exp(ikx)+C_t^*(k)\exp(-ikx)\right)\end{aligned} \tag{4.18}$$

对引力子量子化也就是对运动变量量子化。正则量子化的对易规则如下：

$$\begin{aligned}\left[C_r(k),C_r^*(k')\right]&=\delta(k-k')\\ \left[\theta(k),\theta^*(k')\right]&=\delta(k-k')\\ \left[\phi(k),\phi^*(k')\right]&=\delta(k-k')\\ \left[C_t(k),C_t^*(k')\right]&=\delta(k-k')\end{aligned} \tag{4.19}$$

除此以外所有其他对易子为 0.

引力子 $\xi^i(x,r)$ 的运动参数为变量 x，不是变量 r，因此由作用量(4.7)可得 Lagrange 密度为：

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^j}{\partial x^\nu}\eta_{ij}-m^2\right) \tag{4.20}$$

以后我们使用记号 $\dot{\xi}^i\equiv\dfrac{\partial\xi^i}{\partial t}$。$\eta_{\mu\nu}=(+,+,+,-)$，$\eta_{ij}$ 为 Minkowski 度规在球极坐标系中的形式。

ξ^i 的共轭动量为：

$$p_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\xi}^i} = -\dot{\xi}^j \eta_{ij} = -\dot{\xi}_i \tag{4.21}$$

Hamilton 密度为：

$$\mathscr{H} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\xi}^i} \dot{\xi}^i - \mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left(\nabla \xi^i \nabla \xi^j \eta_{ij} + p_\mu p^\mu + m^2\right) \tag{4.22}$$

Hamilton 量为：

$$H = \int \mathrm{d}^3 x \mathscr{H} \tag{4.23}$$

这是不含源场的纯引力场的能量。

能量-动量张量为：

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} \mathscr{L} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial^\mu \xi^i)} \partial_\nu \xi^i \\ &= \left(\frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\left(\partial^\lambda \xi^i \partial_\lambda \xi^j \eta_{ij} + m^2\right) - \partial_\mu \xi^i \partial_\nu \xi^i \eta_{ij}\right) \end{aligned} \tag{4.24}$$

这是不含源场的纯引力场的能量-动量张量。

5. 引力子的 Green 函数

根据以上讨论，场 $C_i(x) = \left(C_r(x), \theta(x), \phi(x), C_t(x)\right)$ 也可以直接理解为引力场。由式(3.12)和式(4.15)可知，度规和联络是对变量 r 求导的结果，而不是对变量 x 求导，所以度规和联络不包含场 $C_i(x)$ 对 x 的导数，因此引力相互作用可以视为场 $C_i(x)$ 产生的微扰。

上一节讨论引力子的动力学及量子化时我们同时使用了 2 个坐标系：正交坐标系 x^μ 和球极坐标系 r_x^i。其中坐标 x 与引力子的能量-动量是一对共轭量，但坐标 r 的意义不明确，因此以后我们使用同一个坐标系。为此将球极坐标系 r^i 变换为正交坐标系 x^μ。为了对宗量加以区别，原先的正交坐标系 x^μ 用大写字母 X^μ 表示。x^μ 与 X^μ 事实上是同一个坐标系。我们很快就可以看到，坐标 r 给出了引力子的延展结构，使引力子成为近似于 Dirac-δ 函数的一个波包。而正是引力子的延展性使我们得以避免 Feynman 图积分发散的困难。

现在讨论 Feynman 规则。基本的问题是计算 Green 函数。我们使用正交坐标系 x^μ 来计算场 $C_i(x)$ 的 Green 函数。

点 X 处的 Planck 长度和 Planck 时间 $\left(l_p, \theta(X), \phi(X), t_p\right)$ 在坐标系 X^μ 中的各个分量可以写为 $R^\mu(X)$：

$R^\mu(X) = \left(l_p^1(X), l_p^2(X), l_p^3(X), l_p^4(X)\right)$

其中

$$\begin{aligned} l_p^1(X) &= l_p \left|\sin\theta(X)\cos\phi(X)\right| \\ l_p^2(X) &= l_p \left|\sin\theta(X)\sin\phi(X)\right| \\ l_p^3(X) &= l_p \left|\cos\theta(X)\right| \\ l_p^1(X) &= t_p \end{aligned} \tag{5.1}$$

在坐标系 X^μ 中积分常数 $C_r(X), C_t(X)$ 可写为：

$$C^{\mu}(X)=\left(C^{1}(X),C^{2}(X),C^{3}(X),C^{4}(X)\right)$$

其中

$$\begin{aligned}C^{1}(x)&=C_r(X)\sin\theta(X)\cos\phi(X)\\C^{2}(x)&=C_r(X)\sin\theta(X)\sin\phi(X)\\C^{3}(x)&=C_r(X)\cos\theta(X)\\C^{\$}(x)&=C_t(X)\end{aligned}\tag{5.2}$$

因此点 X 处的引力子在正交坐标系中可写为：

$$\xi^{\mu}(X,x)=x^{\mu}+C^{\mu}(X)\exp\left(-\frac{|x^{\mu}|}{R^{\mu}(X)}\right)\tag{5.3}$$

根据引力子的运动方程(4.16)可得引力场的场方程为：

$$\Box\xi^{\mu}(X,x)=j^{\mu}(X)\tag{5.4}$$

其中 $j^{\mu}(X)$ 是引力场的源场在坐标系 X^{μ} 中的表示式。D'Alembert 算子作用于变量 X。

将 $\frac{|x^{\mu}|}{R^{\mu}(X)}$ 简记为 $\bar{R}(x)$。由于 $R^{\mu}(X)$ 只是常数 (l_p,t_p) 在正交坐标系 X^{μ} 中的分量形式，所以 $\bar{R}(x)$ 可以简单理解为引力子波包延展结构的变量 x 的函数（即原来球极坐标系中变量 r 的函数），因此 D'Alembert 算子不作用于函数 $\bar{R}(x)$。由此场方程(5.4)可以进一步简化为如下形式：

$$\mathrm{e}^{-\bar{R}(x)}\Box C^{\mu}(X)=j^{\mu}(X)\tag{5.5}$$

在散射理论中，上式可写为：

$$\mathrm{e}^{-\bar{R}(x)}\Box G^{\mu}(X)=\delta^{4}(X)\tag{5.6}$$

其中 $G^{\mu}(X)$ 是场 $C^{\mu}(X)$ 的 Green 函数。

令 $G^{\mu}(X)$ 为：

$$\begin{aligned}G^{\mu}(X)&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\,\tilde{G}^{\mu}(k)\mathrm{e}^{-ikX}\\\tilde{G}^{\mu}(k)&=\int\mathrm{d}^4X\,G^{\mu}(x)\mathrm{e}^{ikX}\end{aligned}\tag{5.7}$$

这是坐标空间和动量空间之间的变换：

$$\begin{aligned}|x\rangle&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\,\mathrm{e}^{-ikX}|k\rangle\\|k\rangle&=\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{ikx}|x\rangle\end{aligned}\tag{5.8}$$

式(5.6)可写为：

$$\Box G^{\mu}(X)=\delta^{4}(X)\mathrm{e}^{\bar{R}(x)}\tag{5.9}$$

令

$$f_1=\delta^{4}(X),\quad f_2=\mathrm{e}^{\bar{R}(x)}\tag{5.10}$$

函数 $f=f_1\cdot f_2$ 的 Fourier 变换为:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \int \mathrm{d}^4 X\, f_1 \mathrm{e}^{ikX} \cdot \int \mathrm{d}^4 x\, f_2 \mathrm{e}^{ikx} \\ &= 1 \cdot \int \mathrm{d}^4 x\, f_2 \mathrm{e}^{ikx} = \delta\left(k - \frac{i}{R^{\mu}(X)}\right)\end{aligned} \tag{5.11}$$

通过 Fourier 变换，方程(5.9)可写为如下形式：

$$\square \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 k\, \tilde{G}^{\mu}(k) \mathrm{e}^{-ikX} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 k\, \tilde{f}(k) \mathrm{e}^{-ikx} \tag{5.12}$$

由于 X^{μ} 与 x^{μ} 是同一个坐标系，因此上式的解为：

$$\tilde{G}^{\mu}(k) = -\frac{\tilde{f}(k)}{k^2} = -\frac{1}{k^2} \cdot \delta\left(k - \frac{i}{R^{\mu}(X)}\right) \tag{5.13}$$

由此可得：

$$G^{\mu}(X) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 k \frac{\mathrm{e}^{-ikX}}{k^2} \cdot \delta\left(k - \frac{i}{R^{\mu}(X)}\right) \tag{5.14}$$

将正交坐标系 x^{μ} 重新变换回球极坐标系： $x^{\mu} \to r_x^i$，Green 函数可写为：

$$\tilde{G}^i(k) = \begin{cases} \tilde{G}^r(k) = -\dfrac{1}{(k^r)^2} \cdot \delta\left(k^r - \dfrac{i}{l_p}\right) \\ \tilde{G}^{\theta}(k) = -\dfrac{1}{(k^{\theta})^2} \\ \tilde{G}^{\phi}(k) = -\dfrac{1}{(k^{\phi})^2} \\ \tilde{G}^t(k) = -\dfrac{1}{\omega^2} \cdot \delta\left(\omega - \dfrac{i}{t_p}\right) \end{cases} \tag{5.15}$$

$$G^i(r_x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 k\, \tilde{G}^i(k) \cdot \mathrm{e}^{-ik \cdot r_x}$$

其中 $k^r, k^{\theta}, k^{\phi}, \omega$ 为能量－动量在球极坐标系 r_x^i 中的表达式。

将式(5.15)与一般的 Feynman 传播子比较可以看出广义函数 $\delta\left(k^r - \frac{i}{l_p}\right)$ 和 $\delta\left(\omega - \frac{i}{t_p}\right)$ 给出了一般的 Feynman 传播子中变量 k^r 和 ω 的一个正规化。由于变量 k^r 和 ω 总是以平方形式出现，因此广义函数 $\delta\left(k^r - \frac{i}{l_p}\right)$ 和 $\delta\left(\omega - \frac{i}{t_p}\right)$ 中虚数的引入将改变一个正负号。

Green 函数(5.15)是广义函数，必须在积分的意义下理解。变量 k^r 的积分限为 $[0, +\infty)$，变量 ω 的积分限为 $(-\infty, +\infty)$。对这两个变量的积分可以这样理解：积分路径偏离实轴进入复平面，分别经过奇点 $k^r = \frac{i}{l_p}$ 和 $\omega = \frac{i}{t_p}$。计算 Feynman 图时，根据 Dirac-δ 函数的性质，我们只需给出积分路径上的奇点，而不需要计算具体的积分。变量 k^{θ} 的积分限为 $[0, \pi]$，变量 k^{ϕ} 的积分限为 $[0, 2\pi)$，这两个变量的积分都是有限的。由此，Feynman 图积分发散的困难得以解决。

6. 讨论与结论

4 维 Minkowski 空时是一个流形，可建立整体惯性系 $\xi^i(x)$。由于对惯性系引入了测不准原理，T_2 分离性公理不再成立，因此由惯性系张成的空间不是 Hausdroff 空间，而是非对易格空间，整体惯性系在非对易格空间里分解为局部惯性系。这样，由于等效原理，在广义相对论的意义上出现了引力场。因此，引力场源于测不准原理。以这样的方式引入引力相互作用可以自然地得到一个近似于 Dirac-δ 函数的波包作为半经典的引力子。为引力子建立作用量后可得引力子的场方程。由于引力子是一个近似于 Dirac-δ 函数的波包，因此由场方程推导出的引力子的 Green 函数可以自然地解决 Feynman 积分发散困难。

参考文献

[1] Connes, A. (1994) Noncommutative Geometry. Academic Press.

[2] Landi, G. (1997) An Introduction to Noncommutative Spaces and Their Geometries, Lecture Notes in Physics. New Series M, Monographs No. 51, Springer-Verlag, Heidelberg.

[3] Weinberg, I. (1972) Gravitation and Cosmology: Principle and Applicatons of General Theory of Relativity. Wiley, New York.

[4] Balachandran, A.P., Bimonte, G., Ercolessi, E., Landi, G., Lizzi, F. and Parano, G. and Teotonio-Sobrinho, P. (1996) Noncommutative Lattices as Finite Approximations. *Journal of Geometry and Physics*, **18**. hep-th/9510217