**Modern Physics** 现代物理, 2019, 9(1), 1-11
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2019.91001

# The Principal Eigenvalue Estimations of Laplace Type Operators on Differential Manifold

**Jinnan Li, Xiang Gao***

School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao Shandong
Email: 18363995873@163.com, *gaoxiangshuli@126.com

Received: Dec. 7th, 2018; accepted: Dec. 21st, 2018; published: Dec. 28th, 2018

## Abstract

**Based on the eigenvalue estimations of Li-Conjecture's and Yang-Conjecture's proposed and developed ideas, this paper summarized the variation of the upper and lower bounds of the estimated value when the Laplace operator principal eigenvalue estimation conditions were changed on a typical Riemannian manifold, and yielded some precise estimation results. The principal eigenvalue estimation of p-Laplacian on general Riemannian manifolds is studied. The estimation of principal eigenvalues of Finsler manifolds is studied. Since the potential function is introduced, the eigenfunction is changed, then the estimation of the principal eigenvalue of the new Laplace type operator-Schrödinger operator is studied. It shows the close connection between Riemannian manifold and general relativity. It also can simplify the solution of energy spectrum and other problems in quantum mechanics, and provide some new methods for quantum mechanics, quantum optics and solid physics.**

## Keywords

**Differential Manifold, Laplace Operator, Schrödinger Operator, Principal Eigenvalue, P-Laplacian**

# 微分流形上Laplace型算子的主特征值估计

**李金楠，高　翔***

中国海洋大学数学科学学院，山东 青岛
Email: 18363995873@163.com, *gaoxiangshuli@126.com

收稿日期：2018年12月7日；录用日期：2018年12月21日；发布日期：2018年12月28日

*通讯作者。

文章引用: 李金楠, 高翔. 微分流形上 Laplace 型算子的主特征值估计[J]. 现代物理, 2019, 9(1): 1-11.
DOI: 10.12677/mp.2019.91001

## 摘　要

**以特征值估计的Li-猜想与Yang-猜想的提出与发展为基础，分类研究总结典型的黎曼流形上Laplace算子主特征值估计条件改变时估计值上下界的变化，得到最新的更加精确的估计结果。主要研究一般黎曼流形上的p-Laplacian的主特征值估计；将黎曼度量推广到Finsler流形上的主特征值估计；以及引入势函数后特征函数改变而得到新的Laplace型算子——Schrödinger算子的主特征值的估计。特征值估计的研究体现出微分流形与广义相对论的紧密联系，能够促进量子力学中能谱等问题的解决，为量子力学、量子光学和固体物理提供新方法。**

## 关键词

**微分流形，Laplace算子，Schrödinger算子，主特征值，P-Laplacian**



## 1. 引言

特征值问题的主要目标之一是通过尽可能明确的几何量，例如等周常数、流形的体积、流形的直径以及有关的曲率条件对特征值的上下界进行估计[1]。Laplace 算子为最重要的微分算子之一，其特征值估计对几何、分析及物理等都有极其重要的作用。丘成桐(Yau)等著名数学家对微分算子的特征值估计问题做出了许多重要的贡献，直到现在特征值估计依然是流形分析上的重要问题，在许多数学家的不懈努力下，特征值估计问题迅速发展并拓展出许多新的更加精确的结果。本节将首先介绍微分流形上特征值估计问题的研究背景与研究意义，然后介绍特征值估计问题的基本发展。

### 1.1. 微分流形上特征值估计问题的研究背景与意义

爱因斯坦广义相对论需要用弯曲空间来描述物理世界，黎曼流形为描述解释广义相对论提供了工具，因此研究黎曼流形上的特殊算子有助于解决广义相对论及爱因斯坦场方程等问题。Laplace 算子为微分流形上最重要的一类微分算子，是因为很多重要的非线性算子在线性化之后就是某个黎曼度量的 Laplace 算子，因此 Laplace 算子对微分流形的谱(即 Laplace 算子的特征值全体) [2]的研究具有重要的意义。丘成桐在 2000 年发表的《几何与分析回顾》中提出了十个有待解决的问题，其中第二个问题就是：理解一个完备流形的 Laplace 算子的谱。微分流形上特征值问题的研究始于 20 世纪 60 年代，经过多年的发展获得了丰富有效的成果[1] [3] [4]，已经成为流形分析的重要研究课题之一，谱几何也成为大范围几何分析的一个重要分支。

20 世纪，微分几何与物理学及数学中的分析数学、代数几何、拓扑学等相互影响相互促进，得到了迅猛发展。分析方法的引入更是对微分几何的发展产生了深远的影响，促进了许多著名问题的解决。一个微分流形的全体特征值能够反映出很多几何或拓扑信息？众所周知：一个等距的流形必然是等谱的。但是等谱的流形是否必然等距呢？1911 年，Weyl 证明了平面区域的面积可以由谱来决定；1964 年，著名数学家 Milnor 构造出等谱而不等距的 16 维平坦环面；1966 年，Kac 提出一个问题“你能听出鼓的形状吗”化为数学问题即两个平面等谱区域是否等距同构？并证明答案是否定的，即等谱的流形不一定等

距。Laplace 算子的谱与流形的几何性质及拓扑性质有着密切的联系，谱理论对数学与物理具有重要的作用，但是已经求出谱的只有等腰直角三角形、标准单位球面、平坦球面、Klein 瓶、复射影空间、酉群等很少的流形。鉴于大部分的流形的谱尚无法完全计算，而主特征值是谱的主项，故近几十年来数学家们主要研究主特征值(第一特征值)的尽可能精确的结果。主要有三类研究方法：一是 Cheeger 引入的等周常数的方法；二是 Li-Yau 发展的梯度估计方法；三是概率中的耦合方法。

特征值问题也促进了数学其他分支中相关问题的研究与应用，如非线性科学，计算数学中的反散射理论，谱方法的数值分析，湍流等。Laplace 方程在数学物理中起着十分重要的作用，求解热传导问题或薄膜振动问题实际就是求解 Laplace 方程的特征值问题，在薄膜情况下特征值对应于薄膜振动的固有频率。Laplace 算子推广到黎曼流形上后成为现代微分几何中一个极其重要的微分算子，其特征值问题促进了许多物理问题的解决。将黎曼度量进行推广得到新的 Finsler 流形是比黎曼流形更广泛的流形，在特殊的 Finsler-Berwald 空间上建立引力场方程有利于解决推广的狭义相对论(例如 Sitter 狭义相对论、Doubly 狭义相对论和 Very 狭义相对论)问题。并可以在此基础上研究超高能粒子在宇宙空间的运动特征，对于解释星系旋转曲线观测实验的暗物质假设替代模型修改的牛顿力学和宇宙加速膨胀的现象也具有重要作用。在 Finsler 几何的框架下研究 Berwald 空间上的引力场方程在弱场近似下的行为，会发现一特殊的 Finsler 结构所导出的动力学方程与 MOND 给出的方程一致。微分算子的谱理论在工程和物理领域有着广泛的应用，兴起于 20 世纪的量子力学理论是研究微观粒子状态的主要工具，大大促进了现代科学技术的发展，使人们掌握了先进的科学技术如激光、光纤等，量子力学已经成为现代物理的重要支柱，而量子力学研究中的一个重要问题就是考虑微分算子的谱理论。例如，量子跃迁是量子力学中一个非常重要的问题(即在某种外界作用下体系在定态之间的跃迁几率问题)，这个问题主要考虑本征态即特征函数空间。另外，一个量子体系能级分布在理论与观测上都有重要的性质，厄米算符可以用来表示量子力学体系的哈密顿量，而厄米算符的本征值对应该量子力学体系的能级。在量子力学中求解系统能谱是基础而重要的问题，处理此类问题时，通常使用的是 Schrodinger 方程，但是由于涉及到微分方程很多时候不容易求解。另一方面，与 Schrodinger 方程同样重要的 Heisenberg 方程却很少被直接用于求解能谱。其实由 Heisenberg 的思想出发并结合 Schrodinger 算子可以得出一种求解系统能谱的新方法，称为“不变本征算符方法”。此方法主要从 Heisenberg 创建矩阵力学的思想出发，关注能级的间隙同时结合 Schrodinger 算符的物理意义，把本征态的思想推广到“不变本征算符”的概念对算符进行操作，无须涉及系统的具体量子态或波函数，从而回避了复杂的微分方程，更方便对很多系统进行求解，为量子力学、量子光学和固体物理提供了新方法，也为经典力学的简正坐标理论提供了新思路。

### 1.2. 特征值估计问题的发展

对 Laplace 算子的特征值进行估计时，由于边界条件的不同主要分为 Dirichlet 边界问题与 Neumann 边界问题：

Dirichlet 边界问题：

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda u, & \text{on } M \\ u = 0, & \text{on } \partial M \end{cases}$$

Neumann 边界问题：

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda u, & \text{on } M \\ \nabla_{\boldsymbol{n}} u = 0, & \text{on } \partial M \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial M$ 上的外法向量。

特征值问题的研究中有两个密切相关的方向：一是研究序列$\{\lambda_i\}$的渐近性质，著名的 Weyl 公式[2]给出了$\lambda_i$渐近展开的第一项，Ivrii 在研究$\lambda_i$渐近展开的第二项的方向上做了重要的工作；另一方面是对一般流形利用梯度估计、等周不等式、极大极小原理等估计开头几个特征值。鉴于大部分流形的谱尚无法完全计算，而主特征值是谱的主项，故我们主要研究主特征值(即第一特征值)的尽可能精确的结果。

Cheng [5]给出了仅依赖于流形的直径及 Ricci 曲率的主特征值的经典的上界估计：

**定理 1.1** 设 $M$ 为一个 $m$ 维带边界的完备黎曼流形，Ricci 曲率满足 $Ric \ge -(m-1)K$，则 $M$ 上 Laplace 算子的第一非零特征值满足上界估计：

$$\lambda_1 \ge \frac{(m-1)^2}{4}K.$$

Li-Yau [6]得到了只依赖于直径及 Ricci 曲率的主特征值的经典的下界估计：

**定理 1.2** 设 $M$ 为一个 $m$ 维无边界的紧致黎曼流形，其 Ricci 曲率非负，直径为 $d$，则 $M$ 上 Laplace 算子的第一非零特征值满足下界估计：

$$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{4d^2}.$$

在此基础上，Zhong-Yang [7]得到了此类问题的主特征值下界的最优估计。

**推论 1.3** 设 $M$ 为一个 $m$ 维无边界的紧致黎曼流形，且其 Ricci 曲率非负，$M$ 的直径为 $d$，则 $M$ 上 Laplace 算子的第一非零特征值下界满足：

$$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}.$$

最近，Hang-Wang [8]对此类问题进行改进并证明了 Ricci 曲率满足 $Ric \ge 0$ 的光滑紧致黎曼流形，若$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}$，则流形 $M$ 等距于半径为$\frac{d}{\pi}$的圆。

## 2. 主特征值估计

黎曼流形上最基本的椭圆算子是 Laplace 算子，若 $M$ 是紧致的则其 Laplace 算子具有离散的谱，记作$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_i \le \cdots$，显然$i \to \infty$时，$\lambda_i \to \infty$。典型 Laplace 算子的特征值估计主要是根据某些几何不变量在黎曼流形上进行的，那么在流形本身、曲率条件或其他估计条件发生改变时，特征值会发生怎样的变化？本节将归纳总结一般的 p-Laplacian 的特征值估计；由黎曼流形推广到 Finsler 流形上的特征值估计；以及添加特征函数得到的 Schrödinger 算子的特征值估计。

### 2.1. Li-猜想的发展

1958 年，Lichnerowicz [9]证明了特殊曲率条件下的第一非零特征值的一个下界估计。

**定理 2.1.1** 设 $M$ 为一个 $m$ 维无边界的紧致黎曼流形，Ricci 曲率满足 $Ric \ge (m-1)K$，则 $M$ 上 Laplace 算子的第一非零特征值满足下界估计：

$$\lambda_1 \ge mK.$$

随后，Choi-Wang [10]优化了该问题。

**推论 2.1.2** 设 $M$ 为一个 $m$ 维可定向的嵌入到$m+1$维可定向紧致黎曼流形 $N$ 中的最小超曲面，且流形 $N$ 的 Ricci 曲率满足 $Ric \ge mK$，常数 $K > 0$，则其第一非零特征值满足：

$$\lambda_1 \ge \frac{mK}{2}.$$

Li-Yau [6]得到了只依赖于流形 $M$ 的直径 $d$ 及 Ricci 曲率的主特征值的下界的估计(即定理 1.2)，随后钟家庆与杨洪苍利用极大值原理[11]优化选择更恰当的试验函数后给出这类问题的最优估计(即定理 1.3)同时，Li-Yau [6]给出了依赖于直径 $d$ 并满足一定 Ricci 曲率条件的一个下界估计。

**定理 2.1.3** 设 $M$ 为一个 $m$ 维无边界紧致黎曼流形，Ricci 曲率满足 $Ric \ge -(m-1)K$，常数 $K \ge 0$，则存在仅取决于 $m$ 的常数 $C_1, C_2 > 0$，使得 Laplace 算子的第一非零特征值满足：

$$\lambda_1 \ge \frac{C_1}{d^2}\exp\left(-C_2 d\sqrt{K}\right).$$

随后 Yang [12]优化了此类估计。

**推论 2.1.4** 设 $M$ 为一个 $m$ 维无边界紧黎曼流形，Ricci 曲率满足 $Ric \ge -(m-1)K$，常数 $K \ge 0$，$M$ 的直径为 $d$，则存在仅取决于维数 $m$ 的常数 $C > 0$，使得 $M$ 上 Laplace 算子的第一非零特征值满足下界估计：

$$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}\exp\left(-Cd\sqrt{K}\right).$$

结合流形根据直径与曲率的特征值估计，Li 提出猜想：$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}+(m-1)K$。特别地，当 $K=0$ 时，即定理 1.3，当 $K=\frac{\pi^2}{d^2}$ 时，即定理 2.1。Yang [12]在此基础上又进一步提出猜想：$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}+\frac{1}{2}(m-1)K$。为证明 Li 猜想，数学家们探索研究了 $\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}+a(m-1)K$ 对哪些常数 $a$ 成立[13]-[19]。

**定理 2.1.5** 设 $M$ 为一个 $m$ 维闭黎曼流形，且其 Ricci 曲率满足 $Ric \ge (m-1)K$，常数 $K \ge 0$，记 $M$ 的直径为 $d$，则 $M$ 上 Laplace 算子的第一非零特征值满足：

$$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}+\frac{1}{4}(m-1)K.$$

**推论 2.1.6** 设 $M$ 为一个 $m$ 维带边界的紧致黎曼流形，Ricci 曲率满足 $Ric \ge (m-1)K$，常数 $K > 0$，且关于边界 $\partial M$ 的单位法向量的平均曲率非负，$d$ 为 $M$ 的直径，$\bar{d}$ 为 $M$ 中最大内接球的直径，$\bar{d} = 2\sup_{x\in M}\left\{dist(x,\partial M)\right\}$。则 Laplace 算子的第一非零特征值满足：

$$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}+\frac{1}{2}(m-1)K.$$

**推论 2.1.7** 设 $M$ 为一个 $m$（$m \ge 3$）维紧致黎曼流形，$M$ 关于外法向量的第二基本形式非负，设 Ricci 曲率满足 $Ric \ge (m-1)K$，常数 $K > 0$，则有：

$$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}+\frac{34}{100}(m-1)K.$$

**推论 2.1.8** 设 $M$ 为一个 $m$ 维紧致黎曼流形，$M$ 关于外法向量的第二基本形式非负，Ricci 曲率满足 $Ric \ge (m-1)K$，常数 $K > 0$，且具有对称性(即第一特征函数最小值与最大值互为相反数)，则 $M$ 上 Laplace 算子的第一非零特征值满足：

$$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}+\frac{1}{2}(m-1)K.$$

**定理 2.1.9** 设 $M$ 为一个 $m$ 维无边界(或有凸边界)的紧致黎曼流形，且其 Ricci 曲率满足 $Ric \ge (m-1)K$，记 $M$ 的直径为 $d$，则关于 Neumann 边界条件的 Laplace 算子的第一非零特征值满足下界估计：

$$\lambda_1 \ge 4s\left(1-s\right)\frac{\pi^2}{d^2}+s\left(m-1\right)K,$$

其中 $s\in\left(0,1\right)$。特别地，$s=\frac{1}{2}$ 即 $\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}+\frac{1}{2}\left(m-1\right)K$，从而证明 Yang-猜想是正确的。

而 Andrews-Clutterbuck [20]证明 $\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}+a\left(m-1\right)K$ 对于 $a=\frac{1}{2}$ 为最优估计，故 Li-猜想是错误的。虽然 Li-猜想最终被证明是错误的，但是由该猜想延伸拓展产生的很多特征值的估计结果等对流形的分析依然具有十分重要的作用。

### 2.2. P-Laplacian 的特征值估计

一般的 Laplace 算子可以推广到高阶情形，设 $M$ 为一个光滑黎曼流形，区域 $\Omega\subset M$，对 $1<p<\infty$，$u\in W^{1,p}\left(M\right)$，$\Omega$ 上的 p-Laplacian 定义为 $\Delta_p\left(u\right)=div\left(\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right)$。特别地，$p=2$ 即为一般的 Laplace-Beltrami 算子。非线性特征值问题也分为 Dirichlet 与 Neumann 边界问题：

Dirichlet 边界问题：

$$\begin{cases}\Delta_p u=-\lambda\left|u\right|^{p-2}, & \text{on } M\\ u=0, & \text{on } \partial M\end{cases}$$

Neumann 边界问题：

$$\begin{cases}\Delta_p u=-\lambda\left|u\right|^{p-2}, & \text{on } M\\ \nabla_{\boldsymbol{n}} u=0, & \text{on } \partial M\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial M$ 上的外法向量。设 $\Omega\subset M$ 且具有非空紧致闭边界 $\partial\Omega$，则 $\Omega$ 上的第一特征值为：$\lambda_{1,p}\left(\Omega\right)=\inf\left\{\frac{\int_\Omega\left|\nabla u\right|^p}{\int_\Omega u^p}\,|\,u\in W_0^{1,p}\left(\Omega\right),u\ne 0\right\}$。当 $\Omega$ 有分段光滑的边界时，$\lambda_{1,p}\left(\Omega\right)$ 为 Dirichlet 边界问题的第一特征值。特别地，当 $M$ 为无边紧致流形时，有：

$$\lambda_{1,p}\left(M\right)=\inf\left\{\frac{\int_M\left|\nabla u\right|^p}{\int_M u^p}\,|\,u\in W^{1,p}\left(\Omega\right),u\ne 0,\int_M\left|u\right|^{p-1}u=0\right\}.$$

当 $M$ 为完备非紧致流形时，$\lambda_{1,p}\left(M\right)=\lim_{r\to\infty}\lambda_{1,p}\left(B_r\left(q\right)\right)$，其中 $B_r\left(q\right)$ 是为以 $q\in M$ 为圆心以 $r$ 为半径的测地球。

p-Laplacian 作为一般 Laplace 算子的自然推广有以下三种特征值估计[21]：

**定理 2.2.1** (Cheng 型估计)设 $M$ 为一个 $m$ 维完备黎曼流形，$\forall x_0\in M$，$K\in\Re$，$r>0$，$p>1$，$q>\frac{m}{2}$，记 $\overline{q}=\max\left\{q,\frac{p}{2}\right\}$，存在仅取决于 $m$，$p$，$\overline{q}$，$K$，$r$ 的常数 $\varepsilon$，满足 $\partial B\left(x_0,r\right)$ 非空，且 $\left\|Ric_-^k\right\|_{q,B(x_0,r)}<\varepsilon$，则存在常数 $C$，使得 p-Laplacian 特征值满足：

$$\lambda_{1,p}\left(B\left(x_0,r\right)\right)\le\overline{\lambda}_{1,p}\left(B_K\left(r\right)\right)+C\left(\left\|Ric_-^K\right\|_{\overline{q},B(x_0,r)}\right)^{1/2}.$$

其中 $\overline{M}$ 为单连通常曲率 $K$ 的完备空间形式，$B_K\left(r\right)\subset\overline{M}$ 为以 $r$ 为半径的球，$\overline{\lambda}_{1,p}$ 为 $\overline{M}$ 中 Dirichlet 边界条件的 p-Laplacian 的第一非零特征值。

**定理 2.2.2** (Lichnerowicz 型估计)设 $M$ 为一个 $m$ 维完备黎曼流形，对于 $K>0$，$r>0$，$p>1$，$q>\frac{m}{2}$，存在仅取决于 $m$，$p$，$\bar{q}$，$K$，$r$ 的常数 $\varepsilon$，若 $\left\|Ric_-^k\right\|_q<\varepsilon$，则 $M$ 关于 Neumann 边界条件的 p-Laplacian 的特征值下界估计满足：

$$\lambda_{1,p}^{\frac{2}{p}}(M)\geq\frac{\sqrt{m}(p-2)+m}{(p-1)\left(\sqrt{m}(p-2)+m-1\right)}\left[(m-1)K-2\left\|Ric_-^K\right\|_q\right].$$

当 $Ric\geq(m-1)K$ 时，$\lambda_{1,p}^{\frac{2}{p}}(M)\geq\frac{\sqrt{m}(p-2)+m}{\sqrt{m}(p-2)+m-1}\cdot\frac{(m-1)K}{p-1}\geq\frac{(m-1)K}{p-1}$。

**定理 2.2.3** (Lichnerowicz-Obata 型估计)设 $M$ 为一个 $m$ 维完备黎曼流形，对于 $K>0$，$\alpha>1$，$p>1$，$q>\frac{m}{2}$，存在仅取决于 $m,p,\bar{q},K,r$ 的常数 $\varepsilon$ 满足 $\left\|Ric_-^k\right\|_q<\varepsilon$，则 $M$ 关于 Neumann 边界条件的 p-Laplacian 的特征值满足：

$$\alpha\lambda_{1,p}(M)\geq\bar{\lambda}_{1,p}(\bar{M}).$$

在此基础上，数学家们[22] [23] [24] [25]得到很多更精确的对 p-Laplacian 特征值的估计结果：

**定理 2.2.4** 设 $M$ 为光滑黎曼流形，则 p-Laplacian 的第一非零特征值下界满足：

$$\lambda_{1,p}(M)\geq\sup\left\{\inf_{\Omega}\left((1-p)\|X\|^q+div(X)\right)\mid X\in W^{1,1}(M)\right\}.$$

**定理 2.2.5** 设 $M$ 为一个 $m$ 维完备非紧致的单连通黎曼流形，截面曲率 $k$ 满足 $k\leq-c^2<0$，则 p-Laplacian 的第一非零特征值满足：

$$\lambda_{1,p}(M)\geq\frac{(m-1)^p c^p}{p^p}.$$

**定理 2.2.6** 设 $M$ 为带凸边界的紧致黎曼流形，且具有非负 Ricci 曲率，记 $d$ 为 $M$ 的直径，则 $M$ 关于 Neumann 边界条件的 p-Laplacian 的第一非平凡特征值下界满足：

$$\lambda_{1,p}\geq(p-1)\frac{\pi_p^p}{d^p}.$$

其中 $\pi_p=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}s}{\left(1-|s|^p\right)^{1/p}}=\frac{2\pi}{p\sin(\pi/p)}$。特别地，当 $p=2$ 时，$\lambda_1\geq\frac{\pi^2}{d^2}$。

**定理 2.2.7** 设 $M$ 为一个紧致黎曼流形，具有非负 Ricci 曲率 $Ric\geq0$，记 $d$ 为 $M$ 的直径，$p\geq2$，则 $M$ 关于 Neumann 边界问题的 p-Laplacian 的第一非平凡特征值下界满足：

$$\lambda_{1,p}\geq\frac{1}{p-1}\left(\frac{\pi}{4d}\right)^p.$$

**定理 2.2.8** 设 $M$ 为一个紧致黎曼流形，且其 Ricci 曲率拟正(即 $Ric\geq0$，但至少存在一点使 $Ric>0$)，$p>1$，则有 Neumann 边界的 p-Laplacian 的第一非平凡特征值满足：

$$\lambda_{1,p}\geq(p-1)\left(\frac{\pi_p}{2d}\right)^p.$$

### 2.3. Finsler 流形上的特征值的估计

一般的特征值估计主要是在黎曼流形上进行的，Finsler 流形是一种比黎曼流形更广泛的度量空间。设 $\left(x^1,x^2,\cdots,x^n\right)$ 是微分流形 $F_n$ 的一个坐标系，$C: x^i = x^i\left(t\right)\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 为一条曲线，弧长 $s$ 记为 $s=\int_{t_0}^{t} F\left(\dot{x}^1\left(t\right),\dot{x}^2\left(t\right),\cdots,\dot{x}^n\left(t\right),\dot{x}^1,\dot{x}^2,\cdots,\dot{x}^n\right)\mathrm{d}t$，其中 $\dot{x}^i\left(t\right)=\dfrac{\mathrm{d}x^i\left(t\right)}{\mathrm{d}t}$，$F\left(x^1,x^2,\cdots,x^n,\dot{x}^1,\dot{x}^2,\cdots,\dot{x}^n\right)$ 是 Finsler 度量函数，这样的微分流形 $F_n$ 称为 Finsler 流形。

$F\left(x^1,x^2,\cdots,x^n,\mathrm{d}x^1,\mathrm{d}x^2,\cdots,\mathrm{d}x^n\right)^2$ 是黎曼度量 $\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\left(x^1,x^2,\cdots,x^n\right)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 的推广。同黎曼流形一样，Finsler 流形上两点之间的距离定义为连接这两点的曲线弧长的下确界。由于 Finsler 流形是度量空间，其度量拓扑和原来微分流形拓扑一致，显然黎曼流形上的许多性质可以推广到 Finsler 空间。芬斯勒(Finsler)于 1918 年在学位论文中系统地研究了这种度量，把经典的曲线和曲面论中的许多概念和定理进行推广，开展了整体 Finsler 几何的研究。Finsler 流形几何理论在广义相对论和其他物理学领域中有许多应用，近年来无限维 Finsler 流形在非线性分析中也有越来越重要的作用。由于 Finsler 流形是比黎曼流形更广泛的流形，自然地可以研究 Finsler 流形上的 Finsler-Laplace 算子的特征值的估计。但由于 Finsler 流形上的 Laplace 算子是一个非线性微分算子，故很多黎曼流形上的估计方法不再适用，为了克服这些困难，需引进加权梯度、加权 Ricci 曲率及加权 Laplace 算子。比较黎曼流形上 Laplace 算子特征值估计的经典结果，也有很多关于 Finsler 流形上的 Finsler-Laplace 算子的特征值估计的重要结论[26] [27]。

**定理 2.3.1** 设 $\left(M,F\right)$ 为一个 $m$ 维完备的连通 Finsler 流形，其加权 Ricci 曲率及 $S$-曲率满足 $Ric_N \ge \left(m-1\right)K$，$S' \le \dfrac{\left(N-m\right)\left(m-1\right)}{N-1}K$，常数 $K>0$，$N\in\left(m,\infty\right)$，$S'$ 表示 $S$-曲率在测地线上的曲率改变量，则 $\left(M,F\right)$ 上 Finsler-Laplace 算子的第一非零特征值满足：

$$\lambda_1 \ge \frac{m-1}{N-1}NK.$$

**推论 2.3.2** 设 $\left(M,F\right)$ 为一个 $m$ 维完备的连通 Finsler 流形，$S=0$ 且 Ricci 曲率满足 $Ric \ge \left(m-1\right)K$，$K>0$，则 Finsler-Laplace 算子的第一非零特征值满足：

$$\lambda_1 \ge mK.$$

**定理 2.3.3** 设 $\left(M,F\right)$ 为一个 $m$ 维紧致 Finsler 流形，其加权 Ricci 曲率满足 $Ric_\infty \ge 0$，$d$ 为 $M$ 的直径，则 $\left(M,F\right)$ 上 Finsler-Laplace 算子的第一非零特征值满足下界估计为：

$$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}.$$

### 2.4. Schrödinger 算子的特征值估计

前面我们主要研究 Laplace 算子在几何不变量或流形本身改变时特征值的改变，进一步当改变特征函数后特征值会有什么变化呢？本节将研究加上势函数的 Schrödinger 算子的主特征值的估计。

引进势函数后，新的 Dirichlet 边界问题为：$\begin{cases}\left(-\Delta+V\right)u=\lambda u, & \text{on } M\\ u=0, & \text{on } \partial M\end{cases}$。其中算子 $-\Delta+V$ 称为 Schrödinger 算子，记为 $H=-\Delta+V$，$M$ 上的光滑函数 $V$ 称为势函数，$\Delta$ 为 Laplace 算子。紧致黎曼流形上 Laplace 算子特征值的渐近性质可以推广到 Schrödinger 算子上，记 $\lambda_i$ 为 Schrödinger 算子 $H$ 的特征值，则其特征值序列为 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_i \le \cdots$，显然 $i\to\infty$ 时 $\lambda_i\to\infty$。一般 Laplace 算子的特征值估计主要取决于流形的维数、Ricci 曲率等几何不变量，但由于 Schrödinger 算子中引进了势函数，故其特征值估计不仅与几何不变量有关，还取决于势函数的积分值。

**定理 2.4.1** 设 $M$ 为一个紧致黎曼流形，给定常数 $N>0$，$C_0>0$，且每个半径为 $r$ 的球可被 $M$ 中半

径为$\frac{r}{2}$的一组球覆盖，设$\forall x \in M$，$r>0$，有$\mu\left(B(x,r)\right) \le C_0 r^2$，则对任意势函数 $V$，流形 $M$ 上 Schrödinger 算子的一般特征值满足：

$$\lambda_k \le \frac{Ck + \delta^{-1}\int_M V^+ \mathrm{d}\mu - \delta \int_M V^- \mathrm{d}\mu}{\mu}.$$

其中 $\delta \in (0,1)$ 为仅取决于 $N$ 的常数，$C>0$ 为取决于 $N, C_0$ 的常数，$V^{\pm} = \max\{|\pm V|, 0\}$。进一步，若 Schrödinger 算子为非负算子，则 $\lambda_k \le \frac{Ck + \int_M V \mathrm{d}\mu_k}{\varepsilon \mu_k}$，$\varepsilon \in (0,1)$ 仅取决于 $N$。

对于 Schrödinger 算子，也有很多它在黎曼流形上第一特征值的估计结果[28] [29]。

**定理 2.4.2** 设 $M$ 为一个紧致黎曼流形，$V$ 为光滑函数，则 $M$ 上 Schrödinger 算子的第一特征值满足：

$$\lambda_1 \le \frac{1}{\mu}\int_M V \mathrm{d}\mu.$$

**定理 2.4.3** 设 $M$ 为一个紧致黎曼流形，任意势函数 $V$ 为光滑函数，Schrödinger 算子定义在(0, $L$)上，具有周期边界条件，定义$V_m = \inf_x V(x), I = \int_0^L \left(V(x) - V_m\right)^{1/2} \mathrm{d}x$。则流形 $M$ 上 Schrödinger 算子的第一特征值满足：

$$\lambda_1 \ge V_m + I^2, \quad I \le \frac{\pi}{L},$$

$$\lambda_1 \le V_m + \frac{\pi^2}{L}, \quad I > \frac{\pi}{L}.$$

## 3. 结论

黎曼流形上特征值的估计会由于直径、曲率等条件及估计方法的不同得到不同的估计结果。进一步，我们发现改变流形本身时也有很多较好的结果：将 Laplace 算子推广到高维的 p-Laplacian 时其特征值估计与 Ricci 曲率的联系更加密切；将黎曼流形推广到更广泛的 Finsler 流形时，通过引进加权梯度、加权 Ricci 曲率及 Ricci-Laplace 算子等对其上 Laplace 算子的特征值估计得到了与黎曼流形上一般 Laplace 算子特征值估计相似的估计结果。

一方面，典型微分算子特征值的估计结果越来越精确。另一方面，随着研究范围的延伸许多新的问题不断出现，如 p-Laplacian 的特征值估计中 Ricci 曲率满足一定的下界条件时主特征值的上下界估计是否会更精确？能否得到与一般的 Laplace 算子的主特征值估计相似的结果？Finsler 流形上已经证明了同黎曼流形上类似的 Lichnerowicz 型估计结果与 Zhong-Yang 型估计结果，那么在 Finsler 流形上是否能满足黎曼流形上其他类型的估计结果？是否可以研究 Finsler 流形上的 p-Laplacian 的主特征值估计问题？Schrödinger 算子中取某些特殊的势函数时其主特征值估计是否会有更精确的结果？这些问题会激励着我们不断尝试，更好地促进特征值估计问题的发展，促进分析流形的发展。应用到物理方面可以更好地求解热传导问题或薄膜振动问题，更精确地解决量子力学中量子跃迁、求解系统能谱等非常重要的问题，为量子力学、量子光学和固体物理提供新方法，也为经典力学的简正坐标理论提供新思路，促进现代科学技术的发展。

## 基金项目

本文由山东省自然科学基金(ZR2018MA006)及山东省研究生导师指导能力提升项目(SDYY17009)支持。

## 参考文献


[1] Li, P. (1993) Lecture Notes on Geometric Analysis. Seoul National University.

[2] 徐森林, 薛春华, 胡自胜, 金亚东. 近代微分几何: 谱理论与等谱问题、曲率与拓扑不变量[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009: 210-219.

[3] Huang, G. and Ma, B.Q. (2016) Eigenvalue Estimates for Sub-Manifolds with Boundedf-Mean Curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137, 1093-1102.

[4] Zhang, Y. and Wang, K. (2017) An Alternative Proof of Lower Bounds for the First Eigenvalue on Manifolds, *Mathematische Nachrichten*, **290**, 2708-2713. https://doi.org/10.1002/mana.201600388

[5] Cheng, S.Y. and Yau, S.T. (1975) Differential Equations on Riemannian Manifolds and Their Geometric Applications. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **28**, 333-354. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280303

[6] Li, P. and Yau, S.T. (1980) Eigenvalues of a Compact Riemannian Manifold. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **36**, 205-239.

[7] Zhong, J.Q. and Yang, H.C. (1984) On the Estimate of the First Eigenvalue of a Compact Riemannian Manifold. *Science in China Series A-Mathematics*, *Physics*, *Astronomy & Technological Science*, **27**, 1265-1273.

[8] Hang, F. and Wang, X. (2007) A Remark on Zhong-Yang's Eigenvalue Estimate. *Int. Math. Res. Not*, **18**, Article ID rnm064, 9.

[9] Lichnerowicz, A. (1958) Géometrie des groupes de transformations. Dunod, Paris.

[10] Choi, H.I. and Wang, A.N. (1983) A First Eigenvalue Estimate for Minimal Hypersurfaces. *Journal of Differential Geometry*, **18**, 559-562. https://doi.org/10.4310/jdg/1214437788

[11] Cheng, S.Y. (1975) Eigenvalue Comparison Theorems and Its Geometric Applications. *Mathematische Zeitschrift*, **143**, 289-297. https://doi.org/10.1007/BF01214381

[12] Yang, H.C. (1990) Estimate on the First Eigenvalue for a Compact Riemannian Manifold. *Science in China*, **33**, 39-51.

[13] Stepin, S.A. (2017) An Estimate for the Number of Eigenvalues of Schrödinger Operator with a Complex Potential. *Sbornik*: *Mathematics*, **208**, 104-120. https://doi.org/10.1070/SM8686

[14] Kwong, K.K. ( 2016) Some Sharp Hodge Laplacian and Steklov Eigenvalue Estimates for Differential Forms. *Calculus of Variations & Partial Differential*, **55**, 38. https://doi.org/10.1007/s00526-016-0977-8

[15] Yang, D.G. (1999) Lower Bound Estimates of the First Eigenvalue for Compact Manifolds with Positive Ricci Curvature. *Pacific Journal of Mathematics*, **190**, 383-398. https://doi.org/10.2140/pjm.1999.190.383

[16] Ling, J. (2006) A Lower Bound of the First Dirichlet Eigenvalue of a Compact Manifolds with Positive Ricci Curvature. *International Journal of Mathematics*, **17**, 605-617. https://doi.org/10.1142/S0129167X06003631

[17] Ling, J. and Lu, Z.Q. (2010) Bounds of Eigenvalues on Riemannian Manifolds. Trends in Partial Differential Equations. *Advanced Lectures in Mathematics*, **10**, 241-264.

[18] Ling, J. (2007) Lower Bounds of the Eigenvalues of Compact Manifolds with Positive Ricci Curvature. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **31**, 385-408. https://doi.org/10.1007/s10455-006-9047-3

[19] Shi, Y.M. and Zhang, H.C. (2007) Lower Bounds for the First Eigenvalue on Compact Manifolds. *Chinese Annals of Mathematics*, *Series A*, **28**, 863-866.

[20] Andrews, B. and Clutterbuck, J. (2013) Sharp Modulus of Continuity for Parabolic Equations on Manifolds and Lower Bounds for the First Eigenvalue. *Analysis & PDE*, **6**, 1013-1024. https://doi.org/10.2140/apde.2013.6.1013

[21] Seto, S. and Wei, G.F. (2017) First Eigenvalue of the p-Laplacian under Integral Curvature Condition. https://doi.org/10.1016/j.na.2017.07.007

[22] Zhang, H. (2007) Lower Bounds for the First Eigenvalue of the p-Laplace Operator on Compact Manifolds with Non-Negative Ricci Curvature. *Advances in Geometry*, **7**, 145-155. https://doi.org/10.1515/ADVGEOM.2007.009

[23] Kawai, S. and Nakauchi, N. (2003) The First Eigenvalue of the p-Laplacian on a Compact Riemannian Manifold. *Nonlinear Analysis*, **55**, 33-46. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(03)00209-8

[24] Lima, B.P., Montenegro, J.F. and Santos, N.L. (2008) Eigenvalue Estimates for the p-Laplace Operator on Manifolds. *Nonlinear Analysis*, **72**, 771-781. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.07.019

[25] Valtorta, D. (2014) Sharp Estimate on the First Eigenvalue of the p-Laplacian on Compact Manifold with Non-Negative Ricci Curvature. *Mathematics*, **75**, 4974-4994.

[26] Yin, S.T., He, Q. and Shen, Y.B. (2013) On Lower Bounds of the First Eigenvalue of Finsler-Laplacian. *Publicacions Matemàtiques*, **83**, 385-405. https://doi.org/10.5486/PMD.2013.5532

[27] Hassannezhad, A. (2013) Eigenvalue of Perturbed Laplace Operators on Compact Manifolds. *Pacific Journal of Ma-*

*thematics*, **264**, 333-354. https://doi.org/10.2140/pjm.2013.264.333

[28] Du, F., Li, Y.L. and Mao, J. (2015) Eigenvalue Inequalities of the Schrödinger-Type Operator on Bounded Domains in Strictly Pseudo-Convex CR Manifolds. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **52**, 223-238. https://doi.org/10.4134/BKMS.2015.52.1.223

[29] Freitas, P. (2000) On Minimal Eigenvalues of Schrödinger Operators on Manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, **217**, 375-382. https://doi.org/10.1007/s002200100365