Modern Physics 现代物理, 2021, 11(2), 15-20
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2021.112003

Hans汉斯

狄拉克－约当表象变换理论

——从矩阵力学到波动力学

黄永义，左兆宇

西安交通大学物理学院，陕西 西安
Email: yyhuang@xjtu.edu.cn

收稿日期：2021年1月8日；录用日期：2021年2月26日；发布日期：2021年3月10日

摘 要

以现代量子力学的符号重述了狄拉克－约当表象变换理论，从矩阵力学导出了波动力学的位置和动量算符，定态薛定谔方程，含时薛定谔方程和波函数玻恩规则。表象变换理论表明矩阵力学、波动力学分别是能量表象、坐标表象的量子力学，从而实现了矩阵力学和波动力学有机的统一。

关键词

矩阵力学，波动力学，表象变换理论

The Dirac-Jordan Transformation Theory

—From Matrix Mechanics to Wave Mechanics

Yongyi Huang, Zhaoyu Zuo

School of Physics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi
Email: yyhuang@xjtu.edu.cn

Received: Jan. 8th, 2021; accepted: Feb. 26th, 2021; published: Mar. 10th, 2021

Abstract

Using Dirac symbols, we recall Dirac-Jordan transformation, by which the co-ordinate operators, momentum operators, Schrödinger equation and wave function's Born rule are derived from matrix mechanics. The transformation theory shows that matrix mechanics and wave mechanics are, respectively, the quantum mechanics of energy representation and co-ordinate representation.

文章引用: 黄永义, 左兆宇. 狄拉克－约当表象变换理论[J]. 现代物理, 2021, 11(2): 15-20.
DOI: 10.12677/mp.2021.112003

The transformation theory naturally unifies matrix mechanics and wave mechanics.

Keywords

Matrix Mechanics, Wave Mechanics, Transformation Theory

1. 引言

1925 年海森堡，玻恩和约当建立了完整的矩阵力学[1] [2] [3]，1926 年薛定谔建立了波动力学[4] [5] [6] [7]，同年泡利，薛定谔，埃卡特都证明了两种力学的等价[8] [9]。虽然两种力学被证明是等价的，但两者的形式依然迥异。1926 年狄拉克和约当各自独立地建立表象变换理论，实现了矩阵力学和波动力学有机的统一[10] [11]。表象变换理论是矩阵力学的发展，它认为力学量矩阵的行和列可以是任何两个表象的参数，行和列不是通常地取分立的值，而是在一定范围内连续变化，矩阵可以从一个表象变换到另一个表象。现有的国内外量子力学的教材都没有细讲波动力学和矩阵力学的等价，涉及比较多的内容是从波动力学的基矢构造力学量的矩阵，列出薛定谔方程，算符平均值，本征值方程等矩阵形式。也几乎都没有讲如何从矩阵力学推导出波动力学的位置、动量、能量算符，定态含时薛定谔方程等基本内容。另外从矩阵力学到波动力学等价性证明不像从波动力学到矩阵力学等价性证明那么直接，需要把通常矩阵推广成行或列是连续变化的“矩阵”，还要 δ 函数数学知识。现有教材对波动力学和矩阵力学的内在联系缺乏深刻的认识，为了提高量子力学的教学水平，很有必要将表象变换理论重述成容易读懂的教学文章。本文以现代量子力学的符号重述了狄拉克－约当表象变换理论，第一部分从矩阵力学导出了波动力学的位置和动量算符，第二部分导出了定态薛定谔方程，含时薛定谔方程和波函数玻恩规则，第三部分给出了小结。需要说明的是 a.本文主要参考的是狄拉克的文章，约当的文章非常数学化，非常难懂；狄拉克的文章非常物理化，逻辑通畅，杨振宁赞誉狄拉克的文章“秋水文章不染尘”；b.本文是用现代量子力学符号重述狄拉克的文章，而不是原封不动地把狄拉克的文章“重写”一遍，狄拉克的文章跳跃性很大，而我们无跳跃地完成了狄拉克文章全部理论推导。

2. 位置、动量算符

矩阵力学中力学量矩阵应该满足如下四个条件：

a.量子化条件 $q_r p_r - p_r q_r = i\hbar$，$r$ 表示系统的某个自由度。

b.任何力学量矩阵 g 的海森堡运动方程 $i\hbar\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = gH - Hg$，如果 g 显含时间，方程变为 $i\hbar\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = i\hbar\dfrac{\partial g}{\partial t} + gH - Hg$。

c.哈密顿矩阵 H 是对角的。

d.力学量矩阵是厄米的。

为了表示表象的普遍性，这里用 ξ_r 表示广义位置，用 η_r 表示广义位置的共轭量－广义动量，显然我们得到 $\xi_r \mu_r - \eta_r \xi_r = i\hbar$。在 (ξ) 表象中，满足量子化条件的动量算符为 $\eta_r = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial \xi_r}$，即

$$\begin{aligned}\langle\xi'|\eta_r|\xi''\rangle&=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi_r'}\delta(\xi_1'-\xi_1'')\delta(\xi_2'-\xi_2'')\cdots\delta(\xi_r'-\xi_r'')\cdots\\&\equiv-i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi_r'}\delta(\xi'-\xi'')\end{aligned}\tag{1}$$

不失一般性，只考虑一个自由度来验证动量算符满足量子条件，

$$\begin{aligned}\langle\xi'|\xi\eta-\eta\xi|\xi''\rangle&=\int\left[\langle\xi'|\xi|\xi'''\rangle\langle\xi'''|\eta|\xi''\rangle-\langle\xi'|\eta|\xi'''\rangle\langle\xi'''|\xi|\xi''\rangle\right]\mathrm{d}\xi'''\\&=(-i\hbar)\int\left[\xi'\delta(\xi'-\xi''')\frac{\partial\delta(\xi'''-\xi'')}{\partial\xi'''}-\frac{\partial\delta(\xi'-\xi''')}{\partial\xi'}\xi'''\delta(\xi'''-\xi'')\right]\mathrm{d}\xi'''\\&=(-i\hbar)\int\left[\xi'\delta(\xi'-\xi''')\frac{\partial\delta(\xi'''-\xi'')}{\partial\xi'''}+\frac{\partial\delta(\xi'-\xi''')}{\partial\xi'''}\xi'''\delta(\xi'''-\xi'')\right]\mathrm{d}\xi'''\\&=(-i\hbar)\int\left\{\xi'\delta(\xi'-\xi''')\frac{\partial\delta(\xi'''-\xi'')}{\partial\xi'''}-\delta(\xi'-\xi''')\frac{\partial\left[\xi'''\delta(\xi'''-\xi'')\right]}{\partial\xi'''}\right\}\mathrm{d}\xi'''\end{aligned}\tag{2}$$

(2)式插入了单位算符 $I=\int|\xi'''\rangle\langle\xi'''|\mathrm{d}\xi'''$，使用了力学量算符 ξ、η 的厄米性，其中第二项采用了分部积分.将(2)式第二项展开可得

$$\langle\xi'|\xi\eta-\eta\xi|\xi''\rangle=(-i\hbar)\int\left[(\xi'-\xi''')\delta(\xi'-\xi''')\frac{\partial\delta(\xi'''-\xi'')}{\partial\xi'''}-\delta(\xi'-\xi''')\delta(\xi'''-\xi'')\right]\mathrm{d}\xi'''\tag{3}$$

由于 $(\xi'-\xi''')\delta(\xi'-\xi''')=0$，我们就可以得到

$$\langle\xi'|\xi\eta-\eta\xi|\xi''\rangle=i\hbar\delta(\xi'-\xi'')\tag{4}$$

这个关系正是我们期望的 (ξ) 表象中量子化条件。

在 (η) 表象中，满足量子化条件的位置算符为 $\xi=i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\eta}$，也能得到量子化条件。事实上

$$\begin{aligned}\langle\eta'|\xi\eta-\eta\xi|\eta''\rangle&=\int\left[\langle\eta'|\xi|\eta'''\rangle\langle\eta'''|\eta|\eta''\rangle-\langle\eta'|\eta|\eta'''\rangle\langle\eta'''|\xi|\eta''\rangle\right]\mathrm{d}\eta'''\\&=i\hbar\int\left[\frac{\partial\delta(\eta'-\eta''')}{\partial\eta'}\eta'''\delta(\eta'''-\eta'')-\eta'\delta(\eta'-\eta''')\frac{\partial\delta(\eta'''-\eta'')}{\partial\eta'''}\right]\mathrm{d}\eta'''\\&=i\hbar\int\left[-\frac{\partial\delta(\eta'-\eta''')}{\partial\eta'''}\eta'''\delta(\eta'''-\eta'')-\eta'\delta(\eta'-\eta''')\frac{\partial\delta(\eta'''-\eta'')}{\partial\eta'''}\right]\mathrm{d}\eta'''\\&=i\hbar\int\left\{\delta(\eta'-\eta''')\frac{\partial\left[\eta'''\delta(\eta'''-\eta'')\right]}{\partial\eta'''}-\eta'\delta(\eta'-\eta''')\frac{\partial\delta(\eta'''-\eta'')}{\partial\eta'''}\right\}\mathrm{d}\eta'''\end{aligned}\tag{5}$$

(5)式插入了单位算符 $I=\int|\eta''\rangle\langle\eta'''|\mathrm{d}\eta'''$，使用了力学量算符 ξ、η 的厄米性，其中第一项采用了分部积分。将(5)式第一项展开可得

$$\langle\eta'|\xi\eta-\eta\xi|\eta''\rangle=i\hbar\int\left[\delta(\eta'-\eta''')\delta(\eta'''-\eta'')+(\eta'''-\eta')\delta(\eta'-\eta''')\frac{\partial\delta(\eta'''-\eta'')}{\partial\eta'''}\right]\mathrm{d}\eta'''\tag{6}$$

由于 $(\eta'''-\eta')\delta(\eta'-\eta''')=0$，我们就可以得到

$$\langle\eta'|\xi\eta-\eta\xi|\eta''\rangle=i\hbar\delta(\eta'-\eta'')\tag{7}$$

这个关系也是我们期望的 (η) 表象中量子化条件。

3. 薛定谔方程、波函数的玻恩规则

现在考虑两个任意表象：(ξ)和(α)之间的变换，这两个表象的参数ξ,α没有关联，彼此独立，它们可以有不同的取值范围，不同的自由度，甚至ξ取连续的值，而α去分立的值，或ξ取分立的值，α取连续的值。不失一般性，我们假设ξ有多个自由度，而α有一个自由度.此时我们只需要矩阵力学的 a，b 两个条件。在(ξ)表象中动量算符的矩阵元

$$\begin{aligned}\langle\xi'|\eta_r|\xi''\rangle &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi_r'}\delta(\xi_1'-\xi_1'')\delta(\xi_2'-\xi_2'')\cdots\delta(\xi_r'-\xi_r'')\cdots \\ &\equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi_r'}\delta(\xi'-\xi'')\end{aligned} \tag{8}$$

插入单位算符 $I=\int|\xi_1''\rangle\langle\xi_1''|\mathrm{d}\xi_1''|\xi_2''\rangle\langle\xi_2''|\mathrm{d}\xi_2''\cdots|\xi_r''\rangle\langle\xi_r''|\mathrm{d}\xi_r''\cdots$ 可得两种表象中动量算符的矩阵元，

$$\begin{aligned}\langle\xi'|\eta_r|\alpha'\rangle &\equiv \langle\xi_1'|\langle\xi_2'|\cdots\langle\xi_r'|\cdots\eta_r|\alpha'\rangle \\ &= \int\langle\xi_1'|\xi_1''\rangle\langle\xi_1''|\mathrm{d}\xi_1''\langle\xi_2'|\xi_2''\rangle\langle\xi_2''|\mathrm{d}\xi_2''\cdots\langle\xi_r'|\eta_r|\xi_r''\rangle\langle\xi_r''|\cdots|\alpha'\rangle\mathrm{d}\xi_r'' \\ &= -i\hbar\int\delta(\xi_1'-\xi_1'')\langle\xi_1''|\mathrm{d}\xi_1''\delta(\xi_2'-\xi_2'')\langle\xi_2''|\mathrm{d}\xi''\cdots\frac{\partial\delta(\xi_r'-\xi_r'')}{\partial\xi_r'}\langle\xi_r''|\cdots|\alpha'\rangle\mathrm{d}\xi_r'' \\ &= -i\hbar\langle\xi_1'|\langle\xi_2'|\cdots\int\left(-\frac{\partial\delta(\xi_r'-\xi_r'')}{\partial\xi_r''}\right)\langle\xi_r''|\cdots|\alpha'\rangle\mathrm{d}\xi_r'' \\ &= -i\hbar\langle\xi_1'|\langle\xi_2'|\cdots\int\delta(\xi_r'-\xi_r'')\frac{\partial}{\partial\xi_r''}\langle\xi_r''|\cdots|\alpha'\rangle\mathrm{d}\xi_r'' \\ &= -i\hbar\frac{\partial\langle\xi_1'|\langle\xi_2'|\cdots\langle\xi_r'|\cdots|\alpha'\rangle}{\partial\xi_r'} \equiv -i\hbar\frac{\partial\langle\xi'|\alpha'\rangle}{\partial\xi_r'}\end{aligned} \tag{9}$$

倒数第二步用到了分部积分。(9)式中为$\langle\xi'|\alpha'\rangle$两种表象的变换函数(行和列可能是连续变量的变换矩阵)。同样的我们得到两种表象中位置算符的矩阵元

$$\begin{aligned}\langle\xi'|\xi_r|\alpha'\rangle &\equiv \langle\xi_1'|\langle\xi_2'|\cdots\langle\xi_r'|\cdots\xi_r|\alpha'\rangle \\ &= \int\langle\xi_1'|\xi_1''\rangle\langle\xi_1''|\mathrm{d}\xi_1''\langle\xi_2'|\xi_2''\rangle\langle\xi_2''|\mathrm{d}\xi_2''\cdots\langle\xi_r'|\xi_r|\xi_r''\rangle\langle\xi_r''|\cdots|\alpha'\rangle\mathrm{d}\xi_r'' \\ &= \int\delta(\xi_1'-\xi_1'')\langle\xi_1''|\mathrm{d}\xi_1''\delta(\xi_2'-\xi_2'')\langle\xi_2''|\mathrm{d}\xi_2''\cdots\xi_r'\delta(\xi_r'-\xi_r'')\langle\xi_r''|\cdots|\alpha'\rangle\mathrm{d}\xi_r'' \\ &= \langle\xi_1'|\langle\xi_2'|\cdots\xi_r'\langle\xi_r'|\cdots|\alpha'\rangle \equiv \xi_r'\langle\xi'|\alpha'\rangle\end{aligned} \tag{10}$$

如果$F(\xi_r,\eta_r)$是ξ_r和它们共轭动量η_r的任何函数，F 函数的两种表象的矩阵元为

$$\langle\xi'|F(\xi_r,\eta_r)|\alpha'\rangle = F\left(\xi_r',-i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi_r'}\right)\langle\xi'|\alpha'\rangle \tag{11}$$

如果 F 在(α)表象是对角矩阵，即$\langle\alpha'|F(\xi_r,\eta_r)|\alpha''\rangle = F(\alpha')\delta(\alpha'-\alpha'')$，式中$F(\alpha')$是单参数$\alpha'$的函数。(11)式插入单位算符$I=\int|\alpha''\rangle\langle\alpha''|\mathrm{d}\alpha''$可得

$$\begin{aligned}F\left(\xi_r',-i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi_r'}\right)\langle\xi'|\alpha'\rangle &= \langle\xi'|F(\xi_r,\eta_r)|\alpha'\rangle = \int\langle\xi'|\alpha''\rangle\langle\alpha''|F(\xi_r,\eta_r)|\alpha'\rangle\mathrm{d}\alpha'' \\ &= \int\langle\xi'|\alpha''\rangle F(\alpha')\delta(\alpha'-\alpha'')\mathrm{d}\alpha'' = F(\alpha')\langle\xi'|\alpha'\rangle\end{aligned} \tag{12}$$

(12)式中取 F 函数为系统的哈密顿量 H，广义位置为真实位置，广义动量为动量，就得到了定态薛定谔方程

$$H\left(q_r', -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_r'}\right)\langle q'|\alpha'\rangle = H(\alpha')\langle q'|\alpha'\rangle \tag{13}$$

由此我们看到薛定谔方程的本征函数就是两个表象的变换函数，该变换函数能将系统的哈密顿矩阵变换为对角矩阵，其对角元就是系统的能量本征值，其能级指标为α'。

如果系统的哈密顿量显含时间，则该系统的积分常量，如能量，也会随时间变化。一般情况下哈密顿量矩阵不是对角化的，我们可以用算符$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$带换积分常量$H(\alpha')$得到含时薛定谔方程。假设$q_t$为$t$时刻的位置，一组积分常量$\alpha$可以表示为位置 q，动量 p 和时间 t 的函数，下面可以证明这个关系$\langle q_t'|H|\alpha'\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle q_t'|\alpha'\rangle$成立。

设 f 为的 p_t 和 q_t 任何函数，p_t 和 q_t 不显含时间，并要求α满足条件$\langle\alpha'|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}|\alpha''\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha'|f|\alpha''\rangle$，此时$f$的海森堡运动方程为$i\hbar\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = fH_t - H_t f$。需要注意的是，三人文章中的海森堡运动方程中哈密顿量是对角的，很容易通过幺正变换得到一般情况下的海森堡运动方程，此时哈密顿量不要求是对角的。将海森堡方程两边取两种表象的矩阵元，并插入单位算符$I = \int|\alpha''\rangle\langle\alpha''|\mathrm{d}\alpha''$得

$$\begin{aligned}\langle q_t'|fH_t - H_t f|\alpha'\rangle &= i\hbar\langle q_t'|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}|\alpha'\rangle = i\hbar\int\langle q_t'|\alpha''\rangle\langle\alpha''|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}|\alpha'\rangle\mathrm{d}\alpha'' \\ &= i\hbar\int\langle q_t'|\alpha''\rangle\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha''|f|\alpha'\rangle\mathrm{d}\alpha'' \\ &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\int\langle q_t'|\alpha''\rangle\langle\alpha''|f|\alpha'\rangle\mathrm{d}\alpha'' - i\hbar\int\frac{\partial}{\partial t}\langle q_t'|\alpha''\rangle\langle\alpha''|f|\alpha'\rangle\mathrm{d}\alpha''\end{aligned} \tag{14}$$

(14)式收回单位算符$I = \int|\alpha''\rangle\langle\alpha''|\mathrm{d}\alpha''$，再插入单位算符$I = \int|q_t''\rangle\langle q_t''|\mathrm{d}q_t''$得

$$\begin{aligned}\langle q_t'|fH_t - H_t f|\alpha'\rangle &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\int\langle q_t'|f|q_t''\rangle\langle q_t''|\alpha'\rangle\mathrm{d}q_t'' - i\hbar\int\frac{\partial}{\partial t}\langle q_t'|\alpha''\rangle\langle\alpha''|f|\alpha'\rangle\mathrm{d}\alpha'' \\ &= i\hbar\int\langle q_t'|f|q_t''\rangle\frac{\partial}{\partial t}\langle q_t''|\alpha'\rangle\mathrm{d}q_t'' - i\hbar\int\frac{\partial}{\partial t}\langle q_t'|\alpha''\rangle\langle\alpha''|f|\alpha'\rangle\mathrm{d}\alpha''\end{aligned} \tag{15}$$

因为f为的 p_t 和 q_t 任何函数，p_t 和 q_t 不显含时间，$\langle q_t'|f|q_t''\rangle$也必然不显含时间，因此最后一行的第一项可以把对时间的偏微分移到积分号里面。另一方面

$$\langle q_t'|fH_t - H_t f|\alpha'\rangle = \int\langle q_t'|f|q_t''\rangle\langle q_t''|H_t|\alpha'\rangle\mathrm{d}q_t'' - \int\langle q_t'|H_t|\alpha''\rangle\langle\alpha''|f|\alpha'\rangle\mathrm{d}\alpha'' \tag{16}$$

(16)式与(15)式比较即得$\langle q_t'|H_t|\alpha'\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle q_t'|\alpha'\rangle$，去掉角标，即$\langle q'|H|\alpha'\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle q'|\alpha'\rangle$。消去定态薛定谔方程中的积分常量得到含时薛定谔方程，事实上

$$H\left(q_r, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_r}\right)\langle q'|\alpha'\rangle = \langle q'|H(q_r, p_r)|\alpha'\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle q'|\alpha'\rangle \tag{17}$$

(17)式即含时薛定谔方程。

如果用q_t表示坐标q在时刻t的值，用α_t表示变量α (假设是动量p和位置q的函数，p和q不显含时间)在时刻t的值，将单位算符$I = \int|\alpha_t'\rangle\langle\alpha_t'|\mathrm{d}\alpha_t'$插入变换函数$\langle q'|\alpha'\rangle$得

$$\langle q_t'|\alpha_0'\rangle = \int\langle q_t'|\alpha_t'\rangle\langle\alpha_t'|\alpha_0'\rangle\mathrm{d}\alpha_t' \tag{18}$$

波函数的玻恩规则知，展开系数$\left|\langle\alpha_t'|\alpha_0'\rangle\right|^2=\langle\alpha_t'|\alpha_0'\rangle\langle\alpha_0'|\alpha_t'\rangle$代表概率密度。

4. 小结

当变换矩阵的行和列可能为连续变量时，通过表象变换就能从矩阵力学推导出定态、含时薛定谔方程和波函数的玻恩规则，恰当地说波动力学是矩阵力学的自然延伸。当然涉及连续变量时狄拉克δ函数是一个不可缺少的数学工具。两种表象的变换函数，即行和列是连续变量的变换矩阵，起到联系矩阵力学和波动力学的桥梁和纽带作用，它既是矩阵力学中是的变换矩阵，又是波动力学中的波函数。表象变换理论显示原则上量子力学可以有很多的表象表示，矩阵力学和波动力学也分别是两个特殊的表象：能量表象和坐标表象的量子力学(波动力学严格说是能量表象和坐标表象变换函数或变换矩阵的量子力学)。表象变换理论真正实现了矩阵力学和波动力学的有机统一，使我们对量子力学理论框架有一个更高层次的认识。

基金项目

西安交通大学第二批“课程思政”示范课程项目(校 2019)。

参考文献

[1] Heisenberg, W. (1925) Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Zeitschrift für Physik*, **33**, 879-893. https://doi.org/10.1007/BF01328377

[2] Born, M. and Jordan, P. (1925) Zur Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, **34**, 858-888. https://doi.org/10.1007/BF01328531

[3] Born, M., Heisenberg, W. and Jordan, P. (1926) Zur Quantenmechanik. II. *Zeitschrift für Physik*, **35**, 557-615. https://doi.org/10.1007/BF01379806

[4] Schrödinger, E. (1926) Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, **79**, 361-376. https://doi.org/10.1002/andp.19263840404

[5] Schrödinger, E. (1926) Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, **79**, 489-527. https://doi.org/10.1002/andp.19263840602

[6] Schrödinger, E. (1926) Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, **80**, 437-490. https://doi.org/10.1002/andp.19263851302

[7] Schrödinger, E. (1926) Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, **81**, 109-139. https://doi.org/10.1002/andp.19263861802

[8] Schrödinger, E. (1926) Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinem. *Annalen der Physiks*, **79**, 734-756. https://doi.org/10.1002/andp.19263840804

[9] Eckart, C. (1926) Operator Calculus and the Solution of the Equations of Quantum Dynamics. *Physical Review*, **28**, 711-726. https://doi.org/10.1103/PhysRev.28.711

[10] Dirac, P. (1927) The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, **113**, 621-641. https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0012

[11] Jordan, P. (1927) Über eine neue Begrügndung der Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, **40**, 809-838. https://doi.org/10.1007/BF01390903