Modern Physics 现代物理, 2021, 11(4), 80-87
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2021.114011

Hans汉斯

分数维空间中的分数阶双δ-势

谭云杰[1]**，陈益隆**[2]**，董建平**[1*]

[1]南京航空航天大学理学院，江苏 南京
[2]埃默里大学埃默里艺术与科学学院，美国 亚特兰大
Email: tanyunjie@nuaa.edu.cn, edward.chen4@emory.edu, *dongjianping@nuaa.edu.cn

收稿日期：2021年6月12日；录用日期：2021年7月13日；发布日期：2021年7月22日

摘　要

本文主要研究分数维空间中的分数阶量子力学问题，考虑了$\lambda(0<\lambda\le 1)$维空间中含Riesz分数导数的分数阶薛定谔方程，利用分数维空间中的傅里叶变换，求解了分数维空间中的分数阶双δ-势的分数阶薛定谔方程，得到了含有Fox's H函数形式的波函数以及能量本征值。此外，本文利用Fox's H函数的性质研究了波函数在自变量及双δ-势间隔a在趋于零和无穷时的渐进性质，给出了具体的渐进表达式，发现在两种无穷趋势下波函数的性态都是含空间维数λ的负幂律函数，揭示了空间维数与波函数、分数阶微积分与负幂律间的紧密联系。

关键词

分数维空间，分数阶薛定谔方程，Fox's H函数，分数双δ-势

Fractional Double δ-Potential in Fractional Dimensional Space

Yunjie Tan[1]**, Yilong Chen**[2]**, Jianping Dong**[1*]

[1]College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu
[2]Emory College of Arts and Sciences, Emory University, Atlanta USA
Email: tanyunjie@nuaa.edu.cn, edward.chen4@emory.edu, *dongjianping@nuaa.edu.cn

Received: Jun. 12th, 2021; accepted: Jul. 13th, 2021; published: Jul. 22nd, 2021

Abstract

In this paper, we study the fractional-order quantum mechanics problems in the fractional dimensional space. The fractional Schrödinger equation with Riesz fractional derivative in $\lambda(0<\lambda\le 1)$

*通讯作者。

文章引用: 谭云杰, 陈益隆, 董建平. 分数维空间中的分数阶双 δ-势[J]. 现代物理, 2021, 11(4): 80-87.
DOI: 10.12677/mp.2021.114011

dimensional space is considered. By using the Fourier transform in the fractional dimensional space, the fractional Schrödinger equation with fractional double δ-potential well in λ fractional dimensional space is solved and obtained the wave function with the form of Fox's H functions and the energy eigenvalue. In addition, by using the properties of Fox's H functions, we study the asymptotic properties of the wave function when the independent variable and the double delta potential interval a tending to zero and infinity, and give the specific asymptotic expressions. It is found that the behavior of wave function is a negative power law function that contains space dimension λ under two kinds of infinite trends, the close relationship between space dimension and wave function, fractional calculus and negative power law is revealed.

Keywords

Fractional Dimension Space, Fractional Schrödinger Equation, Fox's H Function, Fractional Double δ-Potential

1. 引言

1918 年，Hausdorff 引入了分数维的概念，在 Mandelbrot 发现了分形几何之后，这个概念变得更加的重要，他利用分数的概念用标度法计算出了分数维和整数维之间的关系[1]。与分形几何和分数维空间相关的是分数导数和分数积分领域，这些研究最近已经在许多领域中得到应用，包括分数哈密顿系统、混沌动力学、分形和复杂介质物理学以及标度现象等的研究[2] [3] [4] [5] [6]。在量子物理学中，Feynman 首次将分形概念成功用于量子力学，Feynman 和 Hibbs 重新将非相对论性量子力学表述为布朗路径上的路径积分[7]。之后，Laskin 在路径积分中用 Lévy 路径代替布朗路径，将 Feynman 路径积分推广到 Lévy 路径积分，到得到了含有 Riesz 分数导数的空间分数阶薛定谔方程，建立了分数阶量子力学[8] [9] [10]。

虽然嵌入在我们世界中的空间是一个三维的欧几里得空间，但物质物体的运动并不总是三维的，维度取决于约束条件[11] [12]。关于整数维空间中含有分数阶导数项的分数阶薛定谔方程已经有了一些研究。例如，Dong 和 Xu [13]用动量表示法求解空间分数薛定谔方程求解了分数阶薛定谔方程，Naber [14]引入了时间 Caputo 分数阶导数提出了并求解了时间分数阶薛定谔方程，Wang 和 Xu [15]将空间分数阶薛定谔方程推广到了时空分数阶薛定谔方程。分数阶薛定谔方程是 Lévy 路径积在考虑更广泛的复杂系统条件下提出的，当物理空间结构发生变化时，可以更好地描述微观粒子的行为，帮助我们更好的刻画复杂量子体系的特征。对于非整数维空间，Stillinger [16]描述了在非整数维分数空间上积分的过程，并推广了该空间中的拉普拉斯算子。之后，Muslih 和 Baleanu [17]利用 Stillinger 定义的分数维拉普拉斯算子研究了分数维空间中的分数多极展开。Muslih 和 Agrawal [18]研究了具有 Riesz 分数导数的波动方程，证明了 α 阶 Riesz 导数与 D 维分数空间之间的联系。最近，Oliveira 等人[19]求解了整数维空间中的单 δ-势分数阶薛定谔方程，文献[20]利用分数维空间中的傅里叶变换，研究了分数维空间中的分数阶单 δ-势的分数阶薛定谔方程。在此基础上，本文进一步研究分数阶双 δ-势下分数阶薛定谔方程的解及其性质。

本文安排如下，第二节简要介绍了分数维空间中的傅里叶变换和分数薛定谔方程；第三节求解了分数阶双 δ-势势阱的薛定谔方程；第四节运用 Fox's H 函数的渐进性质，对波函数进一步研究；最后一节是本文的结论。

2. 傅里叶变换与薛定谔方程

在本节中，考虑分数体积元上高斯积分的分数维空间中的傅里叶变换方法，我们将考虑连续函数 $f(x)$ 的傅里叶变换 $g(k)$ 在分数阶的情况，利用

$$\mathrm{d}^{\lambda}x=\frac{\pi^{\lambda/2}|x|}{\Gamma(\lambda/2)}\mathrm{d}x \tag{1}$$

傅立叶变换被定义为

$$g(k)=F(f(x))=\int f(x)\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}^{\lambda}x \tag{2}$$

傅里叶逆变换 $f(x)$ 由下式给出

$$f(x)=F^{-1}(g(k))=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\lambda}\int g(k)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}^{\lambda}k \tag{3}$$

λ 维分数空间中的广义狄拉克 δ 函数定义为

$$\delta^{\lambda}(x-x')=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\lambda}\int \mathrm{e}^{ik(x-x')}\mathrm{d}^{\lambda}k \tag{4}$$

下面我们给出一个 δ 函数的定理并且进行证明：

定理广义狄拉克 δ 函数满足下列等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta^{\lambda}(x-x_0)\mathrm{d}^{\lambda}x=f(x_0) \tag{5}$$

证明当 $\lambda=1$ 时，显然成立。

当 $0<\lambda<1$，维分数空间中的广义狄拉克 δ 函数满足以下恒等式[20]

$$\delta^{\lambda}(x-x_0)=\lim_{\varepsilon\to\infty}\varepsilon^{\lambda}\mathrm{e}^{-\pi\varepsilon^2(x-x_0)^2} \tag{6}$$

我们可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta^{\lambda}(x-x_0)\mathrm{d}^{\lambda}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\varepsilon\to\infty}\varepsilon^{\lambda}\mathrm{e}^{-\pi\varepsilon^2(x-x_0)^2}f(x)\mathrm{d}^{\lambda}x \tag{7}$$

由下面的积分[16] [21]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}h(x+x_0)\mathrm{d}^{\lambda}x=\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)\mathrm{d}^{\lambda}x \tag{8}$$

把等式(7)写成如下的形式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta^{\lambda}(x-x_0)\mathrm{d}^{\lambda}x=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^{\lambda}\mathrm{e}^{-\pi\varepsilon^2x^2}f(x+x_0)\mathrm{d}^{\lambda}x \tag{9}$$

利用积分公式

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-kx^m}x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{m}k^{-(n+1)/m}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) \tag{10}$$

可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta^{\lambda}(x-x_0)\mathrm{d}^{\lambda}x=\frac{1}{\Gamma(\lambda/2)}\lim_{\varepsilon\to\infty}f(x_0)\int_0^{+\infty}y^{\lambda/2-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=f(x_0) \tag{11}$$

特别的，当 $x_0=0$ 时，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{\lambda}(x)\mathrm{d}^{\lambda}x = f(0) \tag{12}$$

当 $f(x)=1$ 时，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{\lambda}(x)\mathrm{d}^{\lambda}x = 1 \tag{13}$$

坐标空间和动量空间波函数通过分数维空间中的傅里叶变换相互关联

$$\phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{ipx/\hbar}\mathrm{d}^{\lambda}x \tag{14}$$

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p)\mathrm{e}^{-ipx/\hbar}\mathrm{d}^{\lambda}p \tag{15}$$

如引言中所述，Laskin 在路径积分中用 Lévy 路径代替布朗路径，得到了空间分数阶薛定谔方程。文献[15]研究了整数维空间中时间相关和独立分数阶薛定谔方程的解。之后，Muslih 给出了与时间无关的分数维空间中分数阶薛定谔方程[20]

$$(2\pi\hbar)^{\lambda} E\phi(p) = (2\pi\hbar)^{\lambda} D_{\alpha}|p|^{\alpha}\phi(p) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix(p-p')/\hbar}V(x)\mathrm{d}^{\lambda}x\phi(p')\mathrm{d}^{\lambda}p' \tag{16}$$

3. 分数阶双 δ-势

在本节中，我们考虑分数阶双 δ-势阱中的粒子，势 $V(x)$ 定义为

$$V(x) = -\gamma\left[\delta^{\lambda}(x) + \delta^{\lambda}(x-a)\right] \tag{17}$$

其中 $\delta^{\lambda}(x)$ 是方程(4)中定义的分数狄拉克 δ 函数，该粒子的时间无关分数薛定谔方程由下式给出

$$\begin{aligned}(2\pi\hbar)^{\lambda} E\phi(p) &= (2\pi\hbar)^{\lambda} D_{\alpha}|p|^{\alpha}\phi(p) - \gamma\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix(p-p')/\hbar}\delta^{\lambda}(x)\mathrm{d}^{\lambda}x\phi(p')\mathrm{d}^{\lambda}p' \\ &\quad - \gamma\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix(p-p')/\hbar}\delta^{\lambda}(x-a)\mathrm{d}^{\lambda}x\phi(p')\mathrm{d}^{\lambda}p'\end{aligned} \tag{18}$$

利用广义分数阶狄拉克 δ 函数方程(4)有

$$(2\pi\hbar)^{\lambda}\left(D_{\alpha}|p|^{\alpha} - E\right)\phi(p) = \gamma\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(p')\mathrm{d}^{\lambda}p' + \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ia(p-p')/\hbar}\phi(p')\mathrm{d}^{\lambda}p'\right] \tag{19}$$

则

$$\phi(p) = \frac{\gamma\left(K(0) + \mathrm{e}^{-iap/\hbar}K(a)\right)}{D_{\alpha}|p|^{\alpha} - E} \tag{20}$$

其中

$$K(a) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{iaq/\hbar}\phi(q)\mathrm{d}^{\lambda}q \tag{21}$$

$$K(0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(q)\mathrm{d}^{\lambda}q \tag{22}$$

将 $\phi(p)$ 代入方程(18)联立 $K(0)$， $K(a)$ 得

$$N^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-iap/\hbar}}{D_{\alpha}|p|^{\alpha} - E}\mathrm{d}^{\lambda}p = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{iap/\hbar}}{D_{\alpha}|p|^{\alpha} - E}\mathrm{d}^{\lambda}p \tag{23}$$

这里 $N = K(a)/K(0)$，利用 Fox's H 函数的性质以及其傅里叶余弦变换公式[22]，得到了能量本征值

E 满足方程

$$\frac{\pi\hbar}{aE\alpha}\left(\frac{D_\alpha}{-E}\right)^{-\left(\frac{\lambda-1}{\alpha}\right)} H_{2,3}^{2,1}\left[a\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\middle| \begin{matrix} (1-(\lambda-1)/\alpha,1/\alpha),(1,1/2) \\ (1,1),(1-(\lambda-1)/\alpha,1/\alpha),(1,1/2) \end{matrix}\right]=0 \tag{24}$$

将 $\phi(p)$ 表达式(19)代入到 $K(0)$， $K(a)$ 中有

$$K(0)=\frac{\gamma}{(2\pi\hbar)^2}\left[I(0)K(0)+I(a/\hbar)K(a)\right] \tag{25}$$

$$K(a)=\frac{\gamma}{(2\pi\hbar)^2}\left[I(0)K(a)+I(a/\hbar)K(0)\right] \tag{26}$$

其中

$$I(\omega)=\int_0^\infty \frac{\cos p\omega/\hbar}{D_\alpha|p|^\alpha-E}\mathrm{d}^\lambda p \tag{27}$$

联立方程(25)和(26)，有 $K(a)=K(0)$，则 $\phi(q)$ 的表达式可写为

$$\phi(p)=\frac{\gamma K(0)\left(1+\mathrm{e}^{-iap/t}\right)}{D_\alpha|p|^\alpha-E} \tag{28}$$

这时，波函数 $\varphi(x)$ 可以写为

$$\varphi(x)=\frac{\gamma K(0)}{(2\pi\hbar)^2}\left[\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ipx/\hbar}}{D_\alpha|p|^\alpha-E}\mathrm{d}^\lambda p+\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ip(x+a)/\hbar}}{D_\alpha|p|^\alpha-E}\mathrm{d}^\lambda p\right] \tag{29}$$

由上述可知，如果分数阶单 δ-势的波函数已经确定，则分数阶双 δ-势的波函数可以表示为

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_1(x+a) \tag{30}$$

这里 $\varphi_1(x)$ 表示分数阶单 δ-势的波函数，单 δ-势的波函数的表达式[20]

$$\varphi_1(x)=C_\alpha^\lambda\frac{\pi\hbar}{\alpha}H_{2,3}^{2,1}\left[|x|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\middle| \begin{matrix} ((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2) \\ (0,1),((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2) \end{matrix}\right] \tag{31}$$

$$C_\alpha^\lambda=\frac{\gamma K(0)}{(2\pi\hbar)^{2\lambda}}\frac{2\pi^\lambda/2}{\Gamma(\lambda/2)}\frac{1}{(D_\alpha)^{\lambda-1/\alpha}(-E)^{\alpha+1-\lambda/\alpha}}$$

则分数阶双 δ-势的波函数为

$$\begin{aligned}\varphi(x)=&C_\alpha^\lambda\frac{\pi\hbar}{\alpha}H_{2,3}^{2,1}\left[|x|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\middle| \begin{matrix} ((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2) \\ (0,1),((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2) \end{matrix}\right]\\ &+C_\alpha^\lambda\frac{\pi\hbar}{\alpha}H_{2,3}^{2,1}\left[|x+a|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\middle| \begin{matrix} ((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2) \\ (0,1),((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2) \end{matrix}\right]\end{aligned} \tag{32}$$

4. 波函数的渐进性质

上一节，我们给出了 λ 维分数空间中分数阶双 δ-势的波函数，波函数由 Fox's H 函数表示，在这一

节中我们考虑利用 Fox's H 函数的渐进性质来进一步研究波函数的性质。

当 $|x|\to\infty$ 时，利用 Fox's H 函数的渐进性质[22]

$$H_{2,3}^{2,1}\left[|x|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\middle|\begin{matrix}((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2)\\(0,1),((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2)\end{matrix}\right]\approx\left(|x|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^{-\lambda}\tag{33}$$

$$H_{2,3}^{2,1}\left[|x+a|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\middle|\begin{matrix}((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2)\\(0,1),((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2)\end{matrix}\right]\approx\left(|x+a|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^{-\lambda}\tag{34}$$

则这时方程(31)转变为

$$\varphi(x)\approx C_\alpha^\lambda\frac{\pi\hbar}{\alpha}\left[\left(|x|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^{-\lambda}+\left(|x+a|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^{-\lambda}\right]\tag{35}$$

进一步，当 $|x|\to0$， $a\to0$ 时，我们再次运用 Fox's H 函数以下的渐进性质[22]，此时

$$H_{2,3}^{2,1}\left[|x|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\middle|\begin{matrix}((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2)\\(0,1),((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2)\end{matrix}\right]\approx\left(|x|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^{0}\tag{36}$$

$$H_{2,3}^{2,1}\left[|x+a|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\middle|\begin{matrix}((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2)\\(0,1),((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2)\end{matrix}\right]\approx\left(|x+a|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^{0}\tag{37}$$

从而，波函数可近似为

$$\begin{aligned}\varphi(x)&\approx C_\alpha^\lambda\frac{\pi\hbar}{\alpha}\left[\left(|x|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^{0}+\left(|x+a|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^{0}\right]\\&\approx\frac{\gamma\pi\hbar K(0)}{\alpha(2\pi\hbar)^{2\lambda}}\frac{2\pi^\lambda/2}{\Gamma(\lambda/2)}\frac{1}{(D_\alpha)^{\lambda-1/\alpha}(-E)^{\alpha+1-\lambda/\alpha}}\end{aligned}\tag{38}$$

当 $|x|\to0$ 时， $a\to\infty$ 时，由 Fox's H 函数的渐进性质我们得到

$$H_{2,3}^{2,1}\left[|x|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\middle|\begin{matrix}((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2)\\(0,1),((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2)\end{matrix}\right]\approx\left(|x|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^{0}\tag{39}$$

$$H_{2,3}^{2,1}\left[|x+a|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\middle|\begin{matrix}((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2)\\(0,1),((\alpha-\lambda)/\alpha,1/\alpha),(1/2,1/2)\end{matrix}\right]\approx\left(|x+a|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^{-\lambda}\tag{40}$$

这样，波函数转换为

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\approx C_\alpha^\lambda \frac{\pi\hbar}{\alpha}\left[\left(|x|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^0+\left(|x+a|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^{-\lambda}\right] \\ &\approx C_\alpha^\lambda \frac{\pi\hbar}{\alpha}\left[1+\left(|x+a|\left(\frac{D_\alpha\hbar^\alpha}{-E}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^{-\lambda}\right]\end{aligned} \tag{41}$$

从上述表达式，我们可以看到，λ 维分数空间中分数阶双 δ-势的波函数的渐进性质与分数空间的维数 λ 有着密切的联系。

5. 结论

本文考虑了 λ 维分数空间中分数阶双 δ-势的问题，引入了分数维空间的傅里叶变换的方法来求解分数维空间中的分数阶薛定谔方程，并借助 Fox's H 函数的性质研究了解的渐进性质。我们精确求解了在 λ 维分数空间中分数阶双 δ-势阱内运动粒子的分数阶薛定谔方程，得到了含有 Fox's H 函数形式的分数阶双 δ-势的能量本征值的方程(24)以及波函数的表达式(32)。之后，利用 Fox's H 函数的渐进性质我们进一步研究了波函数在自变量 x 及双 δ-势间隔 a 在趋于 0 和无穷时的渐进性态，当 $|x|\to\infty$ 时，波函数的渐进表达式由(35)给出，这时波函数趋于一个有限常数；当 $|x|\to 0$，$a\to 0$ 以及 $|x|\to 0$，$a\to\infty$ 时的波函数渐进表达式分别由(38)及(41)给出，在这两种无穷趋势下波函数的渐进性态是与空间维数相关联的，都含有空间维数 λ 的负幂律函数，对渐进性态的研究揭示了波函数与空间维数的密切关系以及分数阶微积分与负幂律性质间的紧密联系。

基金项目

本项目感谢国家自然科学基金(项目号：11701278)，中央高校基本科研业务费(项目号：NZ2019008)的资助。

参考文献

[1] Mandelbrot, B. (1982) The Fractal Geometry of Nature. Freeman, San Francisco.

[2] Agrawal, O.P. (2002) Formulation of Euler-Lagrange Equations for Fractional Variational Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **272**, 368-379. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00180-4

[3] Zaslavsky, G.M. (2002) Fractional Kinetics and Anomalous Transport. *Physics Reports*, **371**, 461-580. https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00331-9

[4] Carpinteri, A. and Mainardi, F. (1997) Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2664-6

[5] Nonnenmacher, Y.F. (1990) Fractional Integral and Differential Equations for a Class of Lévy-Type Probability Densities. *Journal of Physics A Mathematical and General*, **23**, L697. https://doi.org/10.1088/0305-4470/23/14/001

[6] Metzler, R., Glockle, W.G. and Nonnenmacher, T.F. (1994) Fractional Model Equation for Anomalous Diffusion. *Physica A*, **211**, 13-24. https://doi.org/10.1016/0378-4371(94)90064-7

[7] Feynman, R.P. and Hibbs, A.R. (1965) Quantum and Path Integrals. McGraw-Hill, New York.

[8] Laskin, N. (2017) Time Fractional Quantum Mechanics. *Chaos*, *Solitons and Fractals*, **102**, 16-28. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.04.010

[9] Laskin, N. (2007) Lévy Flights over Quantum Paths. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **12**, 2-18. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2006.01.001

[10] Laskin, N. (2000) Fractional Quantum Mechanics. *Physical Review E*, **62**, 3135-3145. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.3135

[11] He, X. (1990) Anisotropy and Isotropy: A Model of Fraction-Dimensional Space. *Solid State Communications*, **75**, 111.

https://doi.org/10.1016/0038-1098(90)90352-C

[12] He, X. (1991) Excitons in Anisotropic Solids: The Model of Fractional-Dimensional Space. *Physical Review B*, **43**, 2063. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.43.2063

[13] Dong, J.P. and Xu, M.Y. (2007) Some Solutions to the Space Fractional Schrödinger Equation Using Momentum Representation Method. *Journal of Mathematical Physics*, **48**, Article ID: 072105. https://doi.org/10.1063/1.2749172

[14] Naber, M. (2004) Time Fractional Schrödinger Equation. *Journal of Mathematical Physics*, **45**, 3339-3352. https://doi.org/10.1063/1.1769611

[15] Wang, S.W. and Xu, M.Y. (2007) Generalized Fractional Schrödinger Equation with Space-Time Fractional Derivatives. *Journal of Mathematical Physics*, **48**, Article ID: 043502. https://doi.org/10.1063/1.2716203

[16] Stillinger, F.H. (1977) Axiomatic Basis for Spaces with Non-Integer Dimension. *Journal of Mathematical Physics*, **18**, 1224-1234. https://doi.org/10.1063/1.523395

[17] Muslih, S. and Baleanu, D. (2007) Fractional Multipoles in Fractional Space. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **8**, 198-203. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2005.07.001

[18] Muslih, S. and Agrawal, O. (2010) A Fractional Schrödinger Equation and Its Solution. *International Journal of Theoretical Physics*, **49**, 270. https://doi.org/10.1007/s10773-009-0200-1

[19] Oliveira, E.C.D., Costa, F.S. and Vaz, J. (2010) The Fractional Schrödinger Equation for Delta Potentials. *Journal of Mathematical Physics*, **51**, Article ID: 123517. https://doi.org/10.1063/1.3525976

[20] Muslih, S.I. (2010) Solutions of a Particle with Fractional δ-Potential in a Fractional Dimensional Space. *International Journal of Theoretical Physics*, **49**, 2095-2104. https://doi.org/10.1007/s10773-010-0396-0

[21] Willson, K.G. (1973) Quantum Field Theory Models in Less than 4 Dimensions. *Physical Review D*, **7**, 2911-2926. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2911

[22] Mathai, A.M., Saxena, R.K. and Haubold, H.J. (2010) The H-Function: Theory and Applications. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0916-9