

一种基于单目标分数规划模型的扶助资源分配方法

童珂凡

同济大学, 经济与管理学院, 上海

收稿日期: 2022年11月27日; 录用日期: 2022年12月17日; 发布日期: 2022年12月29日

摘要

过去的几十年内, 中国的经济快速增长, 并已于2020年脱离绝对贫困。随着经济整体增速放缓, 促进区域间的均衡发展成为了重要的议题。在此背景下, 本文以最小化地区发展差异性为目标, 建立了一个单目标分数规划数学模型, 基于该模型可以得到一系列扶助资源的定量分配方案。通过使用甘肃省各县市的实际经济数据进行数值实验模拟, 证明了若基于本文的分配方案对各个区域进行扶助资源分发, 可以促进区域均衡发展的同时帮助子区域提升整体发展水平。本文的方法可以应用于实际的非盈利性管理机构中, 为制定促进区域均衡协调发展的分配方案提供实质性的管理建议。

关键词

区域均衡发展, 变异系数, 分数规划模型

A Method of Allocating Assistance Resources Based on Single-Objective Fractional Model

Kefan Tong

School of Economics and Management, Tongji University, Shanghai

Received: Nov. 27th, 2022; accepted: Dec. 17th, 2022; published: Dec. 29th, 2022

Abstract

Over the past few decades, China's economy has grown rapidly and it has gotten rid of absolute poverty in 2020. With the overall economic growth slowing down, promoting balanced development among regions has become an important issue. Under this background, this paper establishes a single-objective fractional programming mathematical model to minimize the regional de-

velopment difference. Based on this model, a series of quantitative allocation schemes of assistance resources can be obtained. By using the actual economic data of counties and cities in Gansu province to carry out numerical simulation, it is proved that if we distribute the assistance resources based on an allocation scheme in this paper, it can promote the balanced development of the region, and at the same time promote overall development. Therefore, the method of this paper can be applied to the actual non-profit organizations to provide substantive management suggestions, so as to promote balanced and coordinated development of regions.

Keywords

Regional Balanced Development, Fractional Programming, Coefficient of Variance

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近 40 年来,中国经济快速增长,城镇化快速发展,其主要原因是资源和要素的大量密集投入。改革开放后,中国中央政府通过连续五年规划实施区域发展战略,实现了中国经济的快速发展,这可以分为三个阶段。第一个时期是 1978~1994 年,区域发展战略不平衡,重点发展中国东部沿海地区。在这一时期,政府通过开放沿海城市,建立东部经济技术开发区,鼓励东部沿海地区率先发展,让一部分人、一部分地区富裕起来。这一战略极大地促进了中国的经济增长,同时也使东部地区与中西部地区的发展差距逐渐扩大。第二个时期是 1995~2008 年,是以缩小区域差距为目标的区域协调发展战略时期。实施西部大开发战略、东北老工业基地振兴战略、中部崛起战略,促进中西部地区发展。然而,随着经济的快速发展,城乡发展差距不断扩大,社会经济发展与资源利用、环境保护之间的矛盾日益突出。第三个时期是 2009 年至今,以均衡发展为目标的区域全面协调发展战略。区域协调发展不仅是解决发展不平衡不充分问题的内在要求,更是构建新发展格局的重要途径。党的十九大报告将“区域协调发展”列为建设现代化经济体系的重要内容,提出“建立更加有效的区域协调发展新机制”。改革开放以来,东部沿海地区快速发展,中国区域差距出现了持续扩大的趋势。在此背景下,党的十六届三中全会提出了“区域协调发展战略”。此后,各类资源开始向中西部地区引导和倾斜[1][2]。

新中国成立 70 年来,中国区域经济发展经历了由低水平的区域均衡发展 to 区域非均衡发展,再到强调区域协调发展的转变。展现了中国政府想要实现“共同富裕”目标的决心。目前东中西部地区之间的发展差异依旧较大,体现在经济、政治、生态等各个方面。当前和未来一段时期内,中国区域政策的重心仍是进一步促进区域协调发展,为高质量发展奠定基础[3]。在完成 2020 年“全面消除绝对贫困”之后,原国务院扶贫办正式更名,挂牌为乡村振兴局。困扰我国千百年的绝对贫困问题得到了历史性解决,贫困治理的重心和难点由显性的绝对贫困转为隐形的相对贫困[4]。服务对象从贫困地区、贫困人口,拓展到了所有农村、全体农民。未来,国家乡村振兴局的职能,也将因此进一步拓展。从脱贫攻坚战开始,各个省份,地级市的扶贫办都一套指标体系来确定扶助资源的分配方案。因此,本研究想基于当前对于中国相对贫困状况的研究成果,通过建立一个扶助资源分配数学模型,量化扶助决策效果,通过模型求解为决策层提供辅助资金分配策略,提高资源分配策略,促进区域均衡发展。

2. 文献综述

目前对区域发展的研究范围十分广泛,最本地,文献研究已经从简单地注重经济发展变得更全面化,比如从经济与人类福祉的相关关系,经济可持续发展等角度出发。在区域发展与人类福祉之间的关系的研究文献中,它们与新古典主义中普遍将人类福利解释称国内生产总值,就业以及家庭收入等量化指标的行为区别开来。文献对福祉的概念不尽相同,主要是通过诸如幸福,生活满意度,积极心理功能,人类发展,生活质量,平衡和亚里士多德的幸福观联系在一起。对该领域的文章, Maree Fudge [5] 等人为这一系列的文献提供了非常详尽的综述。

在可持续发展议题中,许多文献从空间均衡度出发,不同的文献对其定期不仅经济、资源、环境之间的关系出发,研究如何使得三者能够保持相对均衡,为决策者提供在有效利用资源,合理保护环境的同时促进经济长久发展的建议。Hongyan Shen 等人指出了目前中国区域发展不协调所带来的不同程度的人口、经济、资源和环境的空间失衡,也即是人口和资源都过度集中于经济水平较好的区域,并且较快的经济发展会对环境的承载能力造成挑战。主基于此,他们构建了综合考虑经济、社会、资源、环境、生态等因素的评价指标体系,测度了中国 290 个地级市的空间平衡状况[6]。

各个区域的空间不平衡意味着各类资源在区域之间分布不合理,其背后是各个区域之间巨大的发展差异。2015 年 10 月 29 日,习近平在党的十八届五中全会第二次全体会议上的讲话鲜明提出了创新、协调、绿色、开放、共享的发展理念。2012 年以来,中国的共享发展水平、创新发展水平、开放发展水平都得到了大幅提升,绿色发展水平有一定提高,而协调发展水平则出现了较大幅度的下降[7]。其中区域协调发展也就是意味着区域均衡发展,是中国目前急需解决的重大问题之一。此外,区域均衡问题是区域发展问题中非常重要的一部分。

许多文献进行不同层次的区域不平等评估指标的建立。一部分文献将地区间经济增长的差距视作区域不平等的基本来源[8],研究主要涉及三个“如何”问题:如何空间不平衡的出现,空间不平衡如何演变,以及空间不平衡如何消除。1965 年,威廉姆森观察到区域经济增长不平衡呈倒 U 型分布[9]。Pan 等人基于厦门-漳州-泉州城市群区的可见光红外成像辐射仪夜间光影像数据和多维社会经济数据,采用主成分分析(PCA)和泰尔指数分解方法建立了综合贫困指数(IPD)和区域不平等指数[10]。Shu Hui 等人考虑到区域经济和生态效益指标分布差异结合地区差异性,建立了一个综合基尼系数衡量中国区域均衡发展程度[11]。Li 和 Wei 采用变异系数(CV)、基尼系数和泰尔指数这三个统计指标探讨了中国的区域间、省际和区域内的不平衡[12]。Tirado 等人基于地区 GDP 数据,计算人口加权变异系数(WCV)来研究西班牙十年以来的区域不均衡程度演变过程[13]。

也有许多文献对国内外的区域差异来源,区域发展中的均衡发展的影响变量进行了各类的研究,并且提出相应的政策性建议。Su Yi 等人使用面板门槛回归模型进行定量分析,发现区域科技创新对较低经济水平的地区的可持续发展有明显促进作用[14]。孙荣臻使用方差分解法,基于新古典主义区域空间均衡理论,研究了我国东中西部区域内和区域间的经济差距来源,为推动区域均衡发展提供了政策性建议[15]。Ren Ding 研究同一货币政策下区域经济发展的分化,证明货币政策适应区域实际对平衡区域经济发展具有重要意义[16]。

针对区域发展不均衡的问题,急需通过外部有效的政策支持与经济援助来改变现状。目前也有一系列的研究探索了资源扶助方案。Lei Chen 等人使用逆数据包络法,根据实际的需求制定促进空间平衡的具体到金额的投资方案[17]; Lijing Tang 等人通过从可持续发展角度,构建县域在农业和非农业用地之间土地资源分配效率的评估模型,并以一个县级市案例,阐述了如果采取对应政策提高配置效率,从而优化土地资源分配,促进区域均衡发展[18]。赵扶扬等人研究东西部间建设用地指标分配对我国经济增长,

即“效率方面”和区域发展均衡，即“公平”两方面的影响，他们通过量化空间模型，证明了中国当前土地配置策略能够在“效率”和“公平”上找到了一个良好的平衡点，既实现了 GDP 和总福利的显著提升，又明显缩小了区域的人均收入差距。为了进一步促进我国的区域均衡发展，他们在生产要素配置优化，以及产品和服务的流通方面提出了具体的政策建议[19]。

综上所述可以发现目前大部分关于区域均衡的问题都处于区域经济学或实证分析领域，多采用实证分析方法，并运用一定的计量经济学模型。很少有文献从运筹学角度建立数学规划模型来研究如何通过资源的合理分配，进而有效扶助欠发达地区的经济增长。本文将在第 3 章提出一个以最小化区域间发展差异的单目标数学规划模型，在第 4 章节中介绍了一个通用的分数模型的求解方法。本文的研究成果未来可以应用于实际的资源分配场景中，基于待分配对象具体经济情况来针对性地确定定量的资源分配方案，提高资源分配效率和资源扶助效率，促进地区区域均衡发展，进而促进区域的可持续发展。

3. 建立模型

基于上述提到的问题，本文旨在建立了一个研究扶助资源分配的单目标数学规划模型，能够产生理想的扶助资源分配方案，将有限的资源可以通过有效且公平的方式分配给目标地区。不同于普通资源分配问题中仅仅考虑将现有的资源进行下发，本模型引入扶助资源效用参数 $c_j (j \in J)$ 来衡量扶助资源对于被援助地区在经济发展上产生的影响，以最小化扶助资源分配后被援助地区间发展差异水平为模型目标。

假设当前有总额为 b 的可量化扶助资源需要分配给地区 J 。地区 J 下有多个子区域。用 $g_j (j \in J)$ 来量化子区域 j 当前的发展水平。如该地区的农村可支配收入与人均 GDP 水平。

假设每个地区需要的扶助资金 p_j 是相互独立的且与该地区当前经济发展水平呈正相关。引入 0~1 变量 f_j 表示对地区的资助情况，若取值为 1 表示资助，反之不资助。因此，对于所有地区的分配的资助金额应该满足下式：

$$\alpha_2 b \leq \sum_{j \in J} f_j p_j \leq b$$

其中， $\alpha_2 \in (0,1)$ 为扶助资金的使用比例下限。取值可以按照实际要求确定。

不同地区获得资助后，经济发展水平的增速不一定相同，如上述使用 c_j 表示。用连续变量 t_j 表示在扶助资源分配后地区 j 的经济发展水平。由此可以获得 t_j 的计算公式：

$$t_j = g_j + g_j f_j c_j, j \in |J|$$

通过分配扶助资源降低地区发展差异的同时，也应该建立约束来保证地区的整体发展水平基数，式子如下：

$$\left(\sum_{j \in J} t_j - \sum_{j \in J} g_j \right) / \sum_{j \in J} t_j \geq lb$$

在统计学中，变异系数是衡量数值差异程度的代表性指标，且被排除了量纲的影响。本文研究的问题为通过有效的资源分配方案使得扶助资源生效后各个地区的发展水平差异能够有所降低。因此可以通过构建基于分配后各个地区的发展状况 t_j 建立变异系数指标，表达式如下：

$$CV = \frac{\sqrt{\sum_{j \in J} (t_j - \mu)^2 / |J|}}{\sum_{j \in J} t_j / |J|} = \frac{\sqrt{\sum_{j \in J} (t_j - \mu)^2 |J|}}{\sum_{j \in J} t_j}$$

$$\mu = \frac{\sum_{j \in J} t_j}{|J|}$$

其中， μ 为各地区被援助后发展状况 t_j 的均值。

综上，以被扶助资源分配后，得到具体模型如下：

$$\min \frac{\sqrt{\sum_{j \in J} (t_j - \mu)^2 |J|}}{\sum_{j \in J} t_j}$$

s.t

$$t_j = g_j + g_j f_j c_j, j \in |J| \quad (1)$$

$$\left(\sum_{j \in J} t_j - \sum_{j \in J} g_j \right) / \sum_{j \in J} g_j \geq lb \quad (2)$$

$$\alpha_2 b \leq \sum_{j \in J} f_j p_j \leq b \quad (3)$$

$$0 < \alpha_2 \leq 1 \quad (4)$$

$$t_j \geq 0, j \in |J| \quad (5)$$

$$f_j \in \{0, 1\}, j \in |J| \quad (6)$$

目标函数为最小化地区经济发展水平差异。约束(1)为扶助资源分配后各个地区发展水平计算式；约束(2)限制了扶助资源能后实现的区域最低发展水平；约束(3)与约束(4)规定了扶助资源的利用率应该处于 $(\alpha_2, 1]$ 之间；约束(5)，(6)为决策变量的数值类型约束。

4. 求解方法

在第3章中，本研究建立的数学规划模型为单目标分数规划模型。本章节整理了当前的分数规划模型的求解研究，汇总得到一种单目标分数规划模型的求解方法。

设有问题P，构造如下：

$$\min \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

s.t.

$$x \in X$$

同时有问题 $P(q)$ ，构造如下：

$$\min f_1(x) - qf_2(x)$$

s.t.

$$x \in X$$

设 $F(q) = \min_{x \in X} \{f_1(x) - qf_2(x)\}$ 。当且仅当 x^* 为 $P(q^*)$ 的最优解时(此时需满足 $F(q^*) = 0$)， x^* 为问题P的最优解[20]。因此为了能够找到 x^* ，首先需要找到 q^* ，现在引入定理1[21]，如下：

定理1： 设 x^* 为问题P的最优解，且 $q^* = \frac{f_1(x^*)}{f_2(x^*)}$ ，那么

1) 当且仅当 $q < q^*$ 时，有 $F(q) > 0$

2) 当且仅当 $q = q^*$ 时，有 $F(q) = 0$

3) 当且仅当 $q > q^*$ 时，有 $F(q) < 0$

基于定理1，可以使用牛顿法[22]来确定 q^* 。其主要思想是生成一系列递增的 q_i 作为下界来逼近 q^* ，

迭代算法的具体步骤如下:

输入: 一个连续且单调递减的凸函数 $F(q)$, 任意的 q_0 满足 $F(q_0) > 0$ 。存在可行解集 X 的问题 P 。
令 $i = 0$, 进入步骤 1

步骤 1: 令 $q_{i+1} = \frac{f_1(x_i)}{f_2(x_i)}$, 其中 $x_i = \arg \min_{x \in X} \{f_1(x) - q_i f_2(x)\}$;

步骤 2: 若 $F(q_{i+1}) = 0$, 则令 $x^* = x_{i+1}$, 运算结束;

步骤 3: 若 $F(q_{i+1}) > 0$, 则令 $i = i + 1$, 返回步骤 1;

输出: 此时 q^* 即为问题 P 的最优目标函数值, x^* 为问题 P 的最优解, 算法结束。

基于上述方法, 将问题 P 转化成问题 $P(q)$, 针对 $P(q)$ 进行迭代求解, 得到 x^* 与 q^* , 即可得到单目标分数规划问题 P 的解及最优目标函数值。

5. 数值实验

在本章节中, 将对模型中的具体参数进行合理的假设, 并基于现实的县市经济数据进行案例研究, 通过本文数据模型确定具体的资源分配方案。

本章节的相关数据来源于《2020年甘肃省统计年鉴》中甘肃省 86 个县(最小行政单元)的经济发展数据指标(相关数据缺失的县已被略去)。在本次实验中, 使用各县的农村人均可支配收入作为地区发展水平 g_j 的量化指标, 这也是中国脱贫攻坚战中衡量地区扶贫进展的重要指标, 方差为 0.4413。此外假设一个地区需要的扶助资金数额 p_j 与该地区的 GDP 成正相关, 在本数值实验中, 设 $p_j = 0.1GDP_j$ 。进一步地, 假设本数值实验中的可分配扶助资金计算表达式如下:

$$b = \alpha_3 \sum_{j \in J} p_j = \alpha_3 \sum_{j \in J} 0.1 * GDP_j$$

其中 $\alpha_3 \in (0,1)$ 衡量扶助资金的紧缺性, 在本数值实验中 $\alpha_3 = 0.6$ 。

基于各个地区的经济发展状况 g_j , 可以按照合理的贫困标准线对各县市的贫困状况进行分类。本数值试验中的分类标准基于 2019 年程蹊等人关于中国的贫困线标准的研究[23]。第一个分界点为 10,609.2, 为全国人均可支配收入中位数的 40%, 这是中国在摆脱绝对贫困问题后, 一个合理的用来衡量相对贫困状况的标准线。例如, 农村人均可支配收入在(0, 10,609.2)区间的县市, 在本研究问题中即属于第 1 类。第二个分界点为 15,366.5, 为全国人均可支配收入的 50%。类似地, 农村人均可支配收入在(10,609.2, 15,366.5)区间、(15,366.5, +∞)区间的县市分别属于第 2 类和第三类。基于以上两个分界点, 可以将甘肃省 86 个县市分成三个主要的贫困等级。

在此基础上, 假设经济发展水平较差的县市在得到资助之后能够产生的增速较大。例如, 若第 1 类中的子区域获得资助, 资源生效后其农村人均可支配收入能获得 7% 的增速。而相同情况下, 处于第 2 类中的子区域经济水平相对第 1 类中的更好, 获得资助时可以获得 5% 的增速。下表 1 列出了各个类别下的子区域数量, 以及不同类别下子区域获得资助后能够得到的增速:

Table 1. Poverty classifications of counties and cities in Gansu province

表 1. 甘肃省各县市贫困水平分类情况

类别	农村人均可支配收入范围	县市数量	数量占比	扶助资源效率
1	(0, 10,609.2)	55	7	7%
2	(10,609.2, 15,366.5)	13	5	5%
3	(15,366.5, +∞)	18	7	3%

通过设置增长速率约束中的下限，可以通过本文的模型获得一系列的资源分配方案。不同的分配方案可以帮助地区实现不同程度的区域均衡发展，具体的方案效果见下表 2。

Table 2. The effects of different assistance schemes

表 2. 资源分配方案的效果

方案编号	经济水平方差	整体发展增速(%)	资金利用率(%)
1	0.4073	37.434	82.79
2	0.4074	38.163	84.47
3	0.4079	40.102	90.03
4	0.4085	42.095	98.01

基于实验结果，下文分析了不同的方案及其方案的实际效果特点，并给出了一定管理上的建议：

- 甘肃各县级市经济发展水平的原始方差为 0.4413。在本次数值实验中，得到的 4 个不同的资源分配方案，均可以不同程度地促进地区发展均衡。其中方案 1 可以将子区域的经济水平方差降低至 0.4073，降低幅度达 8.35%；
- 通过设置增长速率约束中的下限，可以发现扶助资金分配方案能帮助地区在保持一定整体发展增速的同时，促进区域发展均衡性。但两者为反相关关系，如图 1，即一个资源分配方案最终能够实现的子区域间经济水平差异越小，其对子区域的整体发展增速的提升作用也越小；

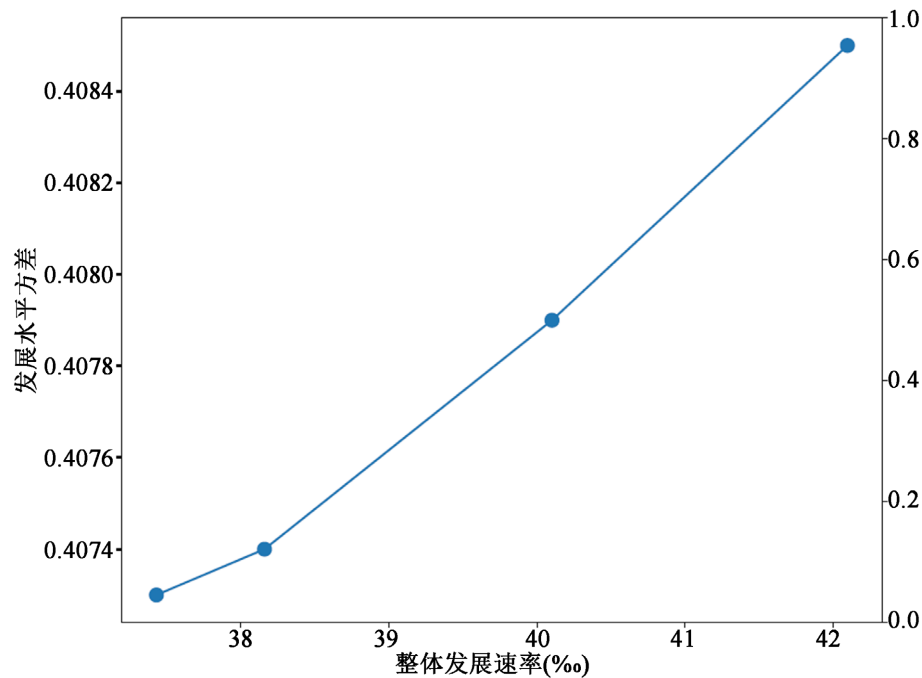


Figure 1. Trade-off curve between coefficient of variance and overall development rate

图 1. 发展水平方差与整体发展速率的折线图

- 基于第 2 点的结论，可以总结到若子区域间均衡发展视为最重要的目标时，得到方案的资金利用率也会较低，因为此时会通过放弃资助部分经济发展水平较高的子区域的方式实现均衡。此时针对未被利用的部分资金，可以通过本模型确定进一步的分配方案，将该部分的剩余资源优先分配给经济

发展较差的地区, 进而进一步缩小各区域间的经济发展水平。

6. 总结

本文基于单目标数学规划模型, 提出了一种可以确定区域内扶助资源定量分配方案的研究方法。本模型以最小化区域发展差异为模型目标, 并结合区域整体发展水平约束。基于本模型产生的资源分配方案可以促进子区域发展均衡, 并帮助被援助的目标地区提升整体发展水平。针对该模型本文也整理得到了单目标分数规划模型的求解方法, 通过该方法可以得到单目标模型的最优解。本文后续通过数值实验证明了模型的有效性, 基于实际经济数据, 通过调整不同的区域整体发展水平下限要求, 得到了一系列的不同效果的资源分配方法。进一步地, 本文基于各方案的特点给出了管理实践上的建议。综上, 面对实际非盈利性组织中的可量化扶助资源, 均可应用本文模型来制定可以促进区域均衡协调发展的资源分配方案。

参考文献

- [1] 薄文广, 安虎森. 我国区域发展思路的演进与未来展望[J]. 南开学报(哲学社会科学版), 2016(3): 115-124.
- [2] 孙久文, 孙翔宇. 培育经济带: 重塑当代中国区域发展战略[J]. 河北学刊, 2017, 37(2): 114-120.
- [3] 周长城. 着力补齐全面建成小康社会的短板和弱项[J]. 中国党政干部论坛, 2020(2): 24-28.
- [4] 姜安印. 论相对贫困的成因、属性及治理之策[J]. 南京农业大学学报(社会科学版), 2021, 21(3): 127-139.
- [5] Fudge, M., Ogier, E. and Alexander, K.A. (2021) Emerging Functions of the Wellbeing Concept in Regional Development Scholarship: A Review. *Environmental Science & Policy*, **115**, 143-150. <https://doi.org/10.1016/j.envsci.2020.10.005>
- [6] Shen, H., Teng, F. and Song, J. (2018) Evaluation of Spatial Balance of China's Regional Development. *Sustainability*, **10**, 3314. <https://doi.org/10.3390/su10093314>
- [7] 周绍东. 论基于五大发展理念的全面小康社会建成度[J]. 财会月刊(会计版), 2020(6): 7-11.
- [8] Williamson, J.G. (1965) Regional Inequality and the Process of National Development: A Description of the Patterns. *Economic Development & Cultural Change*, **13**, 1-84. <https://doi.org/10.1086/450136>
- [9] Combes, P.P., Lafourcade, M., Thisse, J.F., et al. (2011) The Rise and Fall of Spatial Inequalities in France: A Long-Run Perspective. *Explorations in Economic History*, **48**, 243-271. <https://doi.org/10.1016/j.eeh.2010.12.004>
- [10] Pan, W., Fu, H. and Zheng, P. (2020) Regional Poverty and Inequality in the Xiamen-Zhangzhou-Quanzhou City Cluster in China Based on Npp/Viirs Night-Time Light Imagery. *Sustainability*, **12**, 2547. <https://doi.org/10.3390/su12062547>
- [11] Shu, H. and Xiong, P. (2018) The Gini Coefficient Structure and Its Application for the Evaluation of Regional Balance Development in China. *Journal of Cleaner Production*, **199**, 668-686. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2018.07.224>
- [12] Li, Y. and Wei, Y.D. (2010) The Spatial-Temporal Hierarchy of Regional Inequality of China. Social Science Electronic Publishing, Rochester.
- [13] Tirado, D.A., Diez-Minguela, A. and Martinez-Galarraga, J. (2016) Regional Inequality and Economic Development in Spain, 1860-2010. *Journal of Historical Geography*, **54**, 87-98. <https://doi.org/10.1016/j.jhg.2016.09.005>
- [14] Yi, S, Xiao-Li A. (2018) Application of Threshold Regression Analysis o Study the Impact of Regional Technological Innovation Level of Sustainable Development. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, **89**, 27-32. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2018.03.005>
- [15] 孙荣臻. 全面建成小康社会与区域经济均衡发展——基于新古典主义区域空间均衡理论[J]. 经济问题探索, 2021(7): 10-19.
- [16] Ren, D. (2017) Diversified Monetary Policies Based on the Coordinated Development of Regional Economy. *Agro Food Industry Hi Tech*, **28**, 3415-3418.
- [17] Chen, L., Wang, Y., Lai, F., et al. (2016) An Investment Analysis for China's Sustainable Development Based on Inverse Data Envelopment Analysis. *Journal of Cleaner Production*, **2016**, 1638-1649.
- [18] Tang, L. and Wang, D. (2018) Optimization of County-Level Land Resource Allocation through the Improvement of Allocation Efficiency from the Perspective of Sustainable Development. *International Journal of Environmental Research & Public Health*, **15**, 2638. <https://doi.org/10.3390/ijerph15122638>

-
- [19] 赵扶扬, 陈斌开. 土地的区域间配置与新发展格局——基于量化空间均衡的研究[J]. 中国工业经济, 2021(8): 94-113.
- [20] Schaible, S. (1976) Fractional Programming. II, on Dinkelbach's Algorithm. *Management Science*, 22, 868-873. <https://doi.org/10.1287/mnsc.22.8.868>
- [21] Stancu-Minasian, I. (1997) Fractional Programming: Theory, Methods and Applications. Springer Science & Business Media, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-0035-6>
- [22] Dinkelbach, W. (1967) On Nonlinear Fractional Programming. *Management Science*, 13, 492-498. <https://doi.org/10.1287/mnsc.13.7.492>
- [23] 程蹊, 陈全功. 较高标准贫困线的确定: 世界银行和美英澳的实践及启示[J]. 贵州社会科学, 2019(6): 141-148.