

Research on Harmonic Retrieval Method in Additive Noise without Components Number

Shanshan Feng, Kun Qian

School of Mathematics & Physics, China University of Geosciences, Wuhan Hubei
Email: 1201712237@cug.edu.cn

Received: May 22nd, 2020; accepted: Jun. 5th, 2020; published: Jun. 12th, 2020

Abstract

The retrieval of harmonic signal is a classic problem in signal processing. Consider harmonic signals in additive noise, among the proposed schemes in related literatures, the MUSIC (Multiple Signal Classification) algorithm can achieve good retrieval performance. However, it can't play its super-resolution performance when the number of harmonic components is unknown. In this paper, we combine the super-resolution of real-value MUSIC algorithm and the step-by-step estimation of step-by-step LSE algorithm, a step-by-step MUSIC algorithm is proposed. Our algorithm has good estimation performance when the number of components is known. When the number of components is unknown, we use the algorithm to estimate a model set, and estimate the number of harmonic components with the Bayesian Information Criterion (BIC). Finally, the performance of the proposed method is verified by simulation experiments.

Keywords

Harmonic Retrieval, Additive Noise, MUSIC Algorithm, Number of Harmonic Components

加性噪声中未知分量数的谐波恢复方法研究

冯珊珊, 钱 坤

中国地质大学(武汉)数学与物理学院, 湖北 武汉
Email: 1201712237@cug.edu.cn

收稿日期: 2020年5月22日; 录用日期: 2020年6月5日; 发布日期: 2020年6月12日

摘 要

谐波恢复问题是信号处理中的经典问题, 对于被加性噪声污染的谐波信号, 现有的多重信号分类(MUSIC)方法可以实现良好的恢复效果, 但在谐波分量数未知的情况下无法发挥其超分辨率性能。本文结合实值

MUSIC算法的超分辨率和逐步LSE算法的逐步估计的特点, 提出了一种逐步MUSIC算法, 该算法在分量数已知的情况下具有良好的估计性能。在分量数未知的情况下, 我们利用该算法估计出一个模型集, 并采用BIC准则估计谐波分量数。最后通过仿真实验对所提方法的性能进行了验证。

关键词

谐波恢复, 加性噪声, MUSIC算法, 谐波分量数

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

谐波信号是一种特殊的随机信号, 它的分析与处理是统计信号处理中的一个典型问题。其参数估计在很多领域都有广泛的应用, 包括: 雷达目标波达角估计[1]、传感器阵列信号处理[2]、图像处理[3]等。根据背景噪声的复杂程度可以分为加性噪声中的谐波参数估计与乘性和加性噪声中的谐波参数估计两大类。当加性噪声为白噪声时, 已有一些算法如超逼近方法[4]、旋转不变子空间(Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT)方法[5]、预滤波 ESPRIT 方法[6]、多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)方法[7]和高阶统计量方法[8] [9] [10]等, 这些算法都具有高分辨率, 可以取得良好的参数估计效果。

谐波参数估计问题中, 分量数是谐波信号的一个重要参数, 它是建立谐波模型以及估计频率等参数的基础。考察具有代表性的 MUSIC 算法, 准确的分量数是发挥其超分辨率的前提, 而对分量数的欠估计或过估计, 会导致谱峰的估计偏差。

本文考虑 MUSIC 算法和 Prasad 等[11]提出的逐步 LSE 算法的逐步估计相结合, 提出了一种基于改进 MUSIC 算法的加性噪声中的谐波参数估计算法, 该算法不需要预先判定谐波分量数, 同时在低信噪比、样本量小的情况下依然保持较高的频率分辨能力。利用该算法可逐步的估计出一个模型集, 并利用模型选择方法中的 BIC 准则估计谐波分量数。最后通过仿真实验对所提方法的性能进行了验证。

2. 实谐波模型

实际应用中的谐波信号通常为多个实值正弦信号与噪声信号的叠加, 即

$$x(t) = \sum_{k=1}^p A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) + n(t) \quad (1)$$

其中, p 称为谐波的分量个数, A_k, ω_k, φ_k 分别为第 k 个谐波分量的振幅、频率和相位; $t=1, \dots, N$ 。 N 为采样数; $n(t)$ 为加性噪声。

利用三角函数和差公式可将(1)式表示为

$$x(t) = \sum_{k=1}^p [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)] + n(t) \quad (2)$$

其中 $a_k = A_k \cos(\varphi_k)$, $b_k = -A_k \sin(\varphi_k)$ 。

关于上述谐波信号模型的假设如下:

AS1: $\omega_k \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi), k = 1, \dots, p$, 并且 ω_k 互不相等;

AS2: φ_k 是 $(-\pi, \pi]$ 上的确定性常数;

AS3: 加性噪声 $\{n(t), t = 1, \dots, N\}$ 为 i.i.d. 零均值且方差为 σ^2 的高斯随机变量序列。

为分析方便, 定义一个长度为 $m(m > 2p)$ 的观测量和噪声量分别表示为观测向量 $\mathbf{y}(t)$ 和噪声向量 $\mathbf{n}(t)$:

$$\begin{cases} \mathbf{y}(t) = [y(t), y(t+1), \dots, y(t+m-1)]^T \\ \mathbf{n}(t) = [n(t), n(t+1), \dots, n(t+m-1)]^T \end{cases} \quad (3)$$

则观测向量可表示为:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (4)$$

式中:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}) = [\mathbf{B}(\omega_1), \mathbf{B}(\omega_2), \dots, \mathbf{B}(\omega_p)]_{m \times 2p} \quad (5)$$

$$\mathbf{B}(\omega_k) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_k) & \cdots & \cos[(m-1)\omega_k] \\ 0 & -\sin(\omega_k) & \cdots & -\sin[(m-1)\omega_k] \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \vdots \\ A_p \cos(\omega_p t + \varphi_p) \\ A_p \sin(\omega_p t + \varphi_p) \end{bmatrix}_{2p \times 1} \quad (7)$$

3. 基于逐步 MUSIC 算法的谐波参数估计

文献[12]提出了一种实数形式的 MUSIC 算法, 相较于常规的音乐算法, 无需将信号转换为复频率, 降低了计算量和计算复杂度。

因为 $\mathbf{n}(t)$ 与 $\mathbf{y}(t)$ 相互独立, 于是可对观测向量 $\mathbf{y}(t)$ 的自相关矩阵 $\mathbf{R}_{yy} = E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t)\}$ 做特征值分解为:

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}_{ss}\mathbf{C}^T(\boldsymbol{\omega}) + \sigma^2\mathbf{I}_M = \sum_{k=1}^M \lambda_k \boldsymbol{\mu}_k \boldsymbol{\mu}_k^T = \mathbf{U}_s \boldsymbol{\Sigma}_s \mathbf{U}_s^T + \sigma^2 \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T \quad (8)$$

其中 $\mathbf{R}_{ss} = E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^T(t)\}$ 是 $\mathbf{s}(t)$ 的自相关矩阵, \mathbf{I}_M 是 $m \times m$ 单位矩阵。 λ_k 和 $\boldsymbol{\mu}_k$ 分别为 \mathbf{R}_{yy} 第 k 个特征值及其对应的特征向量, 且满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{2p+1} = \dots = \lambda_m = \sigma^2$ 。 $\boldsymbol{\Sigma}_s$ 为 \mathbf{R}_{yy} 的前 $2p$ 个特征向量构成的对角矩阵。 \mathbf{U}_s 称为 \mathbf{R}_{yy} 的信号子空间, 由 \mathbf{R}_{yy} 的前 $2p$ 个特征向量构成; \mathbf{U}_n 称为 \mathbf{R}_{yy} 的噪声子空间, 由 \mathbf{R}_{yy} 的后 $m - 2p$ 个特征矢量构成。

由于特征向量相互正交, 可得 \mathbf{U}_s 与 \mathbf{U}_n 正交, 将式(8)右乘 \mathbf{U}_n 得:

$$\mathbf{R}_{yy}\mathbf{U}_n = \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}_{ss}\mathbf{C}^T(\boldsymbol{\omega})\mathbf{U}_n + \sigma^2\mathbf{U}_n = \sigma^2\mathbf{U}_n \quad (9)$$

于是有:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}_{ss}\mathbf{C}^T(\boldsymbol{\omega})\mathbf{U}_n = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{U}_n^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}_{ss}\mathbf{C}^T(\boldsymbol{\omega})\mathbf{U}_n = \mathbf{O} \quad (10)$$

进而可以得到:

$$\mathbf{C}^T(\boldsymbol{\omega})\mathbf{U}_n = \mathbf{O} \quad (11)$$

即 $\mathbf{C}^T(\boldsymbol{\omega})$ 与 \mathbf{U}_n 正交。

将式(5)代入式(11)即有:

$$\mathbf{B}^T(\boldsymbol{\omega})\mathbf{U}_n = \mathbf{O}_{2 \times (m-2p)}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_1, \dots, \omega_p \quad (12)$$

显然, 当 $\boldsymbol{\omega} \neq \omega_1, \dots, \omega_p$ 时, $\mathbf{B}^T(\boldsymbol{\omega})\mathbf{U}_n \neq \mathbf{O}$ 。

将式(12)改写为标量形式, 即定义如下实值 MUSIC 伪谱函数:

$$P(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\text{tr}[\mathbf{B}^T(\boldsymbol{\omega})\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^T\mathbf{B}(\boldsymbol{\omega})]} \quad (13)$$

于是, 若谐波模型具有 p 个分量, 则可选取实值 MUSIC 伪谱函数 $P(\boldsymbol{\omega})$ 所对应的 p 个峰值点作为频率的估计。

在求解得各谐波频率的估计后, 可将非线性的信号模型转为简单的线性模型, 进而采用最小二乘法估计各谐波振幅。

引入以下记号:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= [y(1), y(2), \dots, y(N)]^T \\ \boldsymbol{\alpha} &= (a_1, b_1, \dots, a_p, b_p)^T \\ \mathbf{E} &= [n(1), n(2), \dots, n(N)]^T \\ \mathbf{D}(\omega_k) &= \begin{bmatrix} \cos(\omega_k) & \cos(2\omega_k) & \dots & \cos(N\omega_k) \\ \sin(\omega_k) & \sin(2\omega_k) & \dots & \sin(N\omega_k) \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{G}(\boldsymbol{\omega}) &= [\mathbf{D}(\omega_1), \mathbf{D}(\omega_2), \dots, \mathbf{D}(\omega_p)]_{m \times 2p} \end{aligned}$$

则谐波模型(2)可改写为如下的矩阵形式:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{E} \quad (14)$$

于是, 在求解得频率 $\boldsymbol{\omega}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 后, 上式的最小二乘解为:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = [\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\omega})\mathbf{G}(\boldsymbol{\omega})]^{-1} \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\omega})\mathbf{Y} \Big|_{\boldsymbol{\omega}=\hat{\boldsymbol{\omega}}} \quad (15)$$

在实际应用中, 通常会出现低信噪比、样本量小或频率差小的情形, 此时信号往往会被淹没掉, 导致一些谱峰消失。此外, MUSIC 算法需要给定准确的分量数才可以发挥其超分辨率, 在分量数未知的情况下, 若估计的分量数比实际的要少(即欠估计), 进行信号子空间和噪声子空间的划分时, 由于部分信号子空间会被错分到噪声子空间中去, 导致信号子空间的维数降低, 从而也会使得一些谱峰消失。同样的, 若估计的分量数比实际的要多(即过估计), 那么部分噪声子空间会被错分到信号子空间中去, 导致噪声子空间的维数降低, 信号子空间维数变多, 此时谱峰会增加, 即出现一些伪峰。

为在分量数未知的情况下也可以取得良好的凸峰效果, 文献[13]考虑利用自相关矩阵的全部特征向量, 利用权值控制不同特征向量对特征谱的作用, 而适当的权系数可以减弱信号特征向量的作用, 加强权值的信号特征向量即相当于常规的 MUSIC 方法中只利用噪声特征向量的情形。

定义数据自相关矩阵的加权特征向量矩阵为:

$$\mathbf{U} = \left[\frac{1}{\lambda_1^c} \boldsymbol{\mu}_1, \frac{1}{\lambda_2^c} \boldsymbol{\mu}_2, \dots, \frac{1}{\lambda_m^c} \boldsymbol{\mu}_m \right] \quad (16)$$

其中, 指数 c 用来调节加权的效应。

于是新的 MUSIC 空间谱表示为:

$$H(\omega) = \frac{1}{\text{tr}[\mathbf{B}^T(\omega)\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{B}(\omega)]} \quad (17)$$

利用上式, 我们结合 Prasad 等[11]提出的逐步 LSE 算法, 提出了一个简单的逐步估计算法, 在谐波分量数未知情况下也可以取得良好的估计效果。

对原始数据 \mathbf{Y} 的自相关矩阵做特征值分解, 并构造加权左奇异矩阵 $\mathbf{U}^{(1)}$ 。接着搜索对应的 MUSIC 空间谱的最大峰值, 并利用式(15)求解得到振幅的估计, 即:

$$\hat{\omega}_1 = \arg \max_{\omega} \frac{1}{\text{tr}[\mathbf{B}^T(\omega)\mathbf{U}^{(1)}\mathbf{U}^{(1)T}\mathbf{B}(\omega)]} \quad (18)$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} = [\mathbf{D}^T(\omega)\mathbf{D}(\omega)]^{-1} \mathbf{D}^T(\omega)\mathbf{Y} \Big|_{\omega=\hat{\omega}_1} \quad (19)$$

则有 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} = [\hat{a}_1^{(1)}, \hat{b}_1^{(1)}]^T$, $(\hat{a}_1^{(1)}, \hat{b}_1^{(1)}, \hat{\omega}_1)$ 是 $(a_1^0, b_1^0, \omega_1^0)$ 的估计量。接着对原始数据做调整, 即如下残差序列:

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y} - \mathbf{B}(\hat{\omega}_1)\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} \quad (20)$$

对调整后的数据 $\mathbf{Y}^{(1)}$ 的自相关矩阵做特征值分解, 并构造加权特征向量矩阵 $\mathbf{U}^{(2)}$ 。接着搜索对应的 MUSIC 空间谱的最大峰值, 即:

$$\hat{\omega}_2 = \arg \max_{\omega} \frac{1}{\text{tr}[\mathbf{B}^T(\omega)\mathbf{U}^{(2)}\mathbf{U}^{(2)T}\mathbf{B}(\omega)]} \quad (21)$$

根据已有的频率估计量 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(2)} = (\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)$, 利用式(22)求解前两个分量的振幅的估计量:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} = [\mathbf{G}^T(\omega)\mathbf{G}(\omega)]^{-1} \mathbf{G}^T(\omega)\mathbf{Y}^{(1)} \Big|_{\omega=\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(2)}} \quad (22)$$

则有 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} = [\hat{a}_1^{(2)}, \hat{b}_1^{(2)}, \hat{a}_2^{(2)}, \hat{b}_2^{(2)}]^T$ 。接着对原始数据做调整, 即如下残差序列:

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{Y} - \mathbf{C}(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(2)})\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} \quad (23)$$

若谐波分量数 p 已知, 我们将继续这一过程到第 p 步。加性噪声方差 σ^2 的估计给出为:

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{N} [\mathbf{Y}^{(p)}]^T \mathbf{Y}^{(p)} \quad (24)$$

若 p 未知, 我们将拟合到一个 q 阶模型, 并给出对应的加性噪声方差的估计。然而 q 可能不等于 p , 且通常是一个大于 p 的整数。于是, 我们可根据 BIC 准则选择分量数, 针对加性高斯白噪声中的谐波模型, 可给出 BIC 的形式如下:

$$\text{BIC}(k) = N \ln \hat{\sigma}_k^2 + 3k \ln N \quad (25)$$

对 $k=1, \dots, q$, 选取使得上式最小的 k 作为谐波分量数的估计。

4. 仿真实验

在上节中, 提出了加性噪声中谐波恢复的一种新方法——逐步 MUSIC 算法。本节将采用 Mont Carol 方法进行仿真实验, 以展示我们算法的有效性。所有仿真实验均有 MATLAB 编写运行。

实验一 考虑以下谐波信号:

$$x_1(t) = \sum_{k=1}^3 [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)] + n(t)$$

其中, $a_1 = 5$, $b_1 = 3$, $\omega_1 = 0.4$; $a_2 = 4$, $b_2 = 2$, $\omega_2 = 0.43$; $a_3 = 3$, $b_3 = 1.8$, $\omega_3 = 0.5$ 。 $n(t)$ 是零均值的高斯白噪声。

在谐波分量数已知的情况下, 为考察本文算法在不同噪声情形下的性能, 取不同信噪比分别为 0 和 5, 其中信噪比定义为:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{\min\{a_k^2 + b_k^2\}}{2\sigma^2}$$

为考察本文算法在不同样本下的性能, 取不同样本量分别为 $N = 200, 300$ 。

实验参数设置上, 取观测向量长度为 0.4 倍样本量, 频率估计采用峰值搜索法, 取步长为 0.0001。逐步 MUSIC 算法的权重参数 c 取 0.5。进行 200 次 Mont Carol 实验。

Table 1. Frequency estimation results with a SNR of 0 dB

表 1. 信噪比为 0 dB 时的频率估计结果

算法	样本量	$N = 200$			$N = 300$		
		Fr	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2
实值 MUSIC	Real	0.400000	0.430000	0.500000	0.400000	0.430000	0.500000
	AE	0.393588	0.430925	0.503629	0.400014	0.429950	0.500068
	RMSE	2.94894e-2	1.36568e-2	2.17523e-2	7.39087e-4	8.64465e-4	8.06443e-4
逐步 MUSIC	Real	0.400000	0.430000	0.500000	0.400000	0.430000	0.500000
	AE	0.400581	0.430229	0.499508	0.400266	0.429150	0.499930
	RMSE	2.84268e-3	1.28117e-3	1.62281e-3	7.64199e-4	1.13932e-3	8.41665e-4

Table 2. Frequency estimation results with a SNR of 5 dB

表 2. 信噪比为 5 dB 时的频率估计结果

算法	样本量	$N = 200$			$N = 300$		
		Fr	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2
实值 MUSIC	Real	0.400000	0.430000	0.500000	0.400000	0.430000	0.500000
	AE	0.399311	0.429568	0.499856	0.399998	0.429971	0.500018
	RMSE	9.91469e-3	2.96737e-3	1.05010e-3	4.24853e-4	5.05371e-4	4.65510e-4
逐步 MUSIC	Real	0.400000	0.430000	0.500000	0.400000	0.430000	0.500000
	AE	0.400115	0.430139	0.499498	0.400091	0.429628	0.499960
	RMSE	1.60374e-3	6.62684e-4	1.05387e-3	4.42493e-4	5.92284e-4	4.65510e-4

在谐波分量数已知的情况下, 从实验结果(表 1 和表 2)得知, 逐步 MUSIC 算法在高信噪比、样本量大时具有和实值 MUSIC 算法相当的估计性能; 而在低信噪比、样本量小时, 逐步 MUSIC 算法的估计性能超过了实值 MUSIC 算法。

实验二 考虑以下谐波信号:

$$x_2(t) = \sum_{k=1}^3 [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)] + n(t)$$

其中, $a_1 = 5$, $b_1 = 3$, $\omega_1 = 0.4$; $a_2 = 4$, $b_2 = 2$, $\omega_2 = 0.6$; $a_3 = 3$, $b_3 = 1.8$, $\omega_3 = 0.45$ 。 $n(t)$ 是零均值的高斯白噪声。

在谐波分量数未知的情况下, 我们将对 $k = 1, \dots, 10$ 拟合谐波模型, 取不同信噪比分别为 -5 dB 和 0 dB, 取样本量从 $N = 30$ 逐次递增 10 个到 $N = 300$, 最后采用 BIC 准则估计谐波分量数。

实验参数设置同实验一, 进行 500 次 Mont Carol 实验。

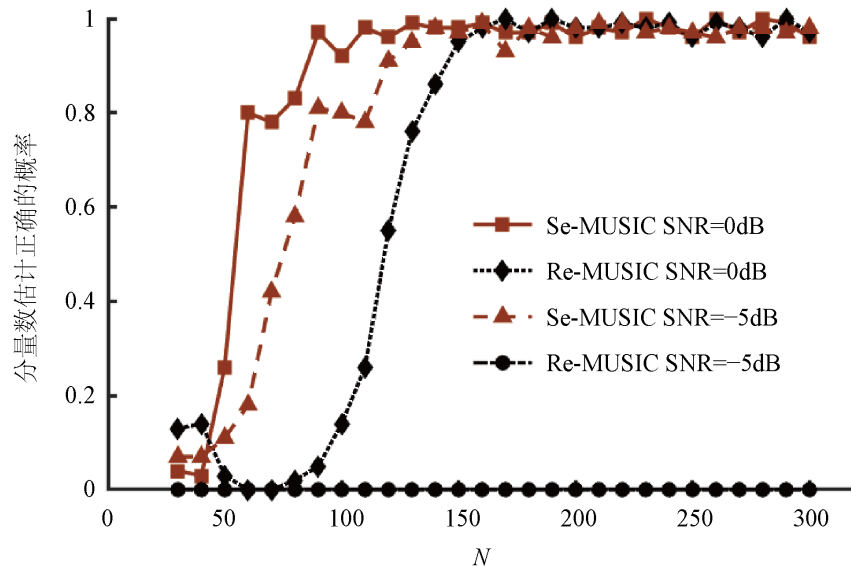


Figure 1. Probability of correct estimation of the number of components under different SNR and sample sizes

图 1. 不同信噪比和样本量情况下的分量数估计正确的概率

从图 1 的实验结果得知, 在信噪比为 0 dB 时, 逐步 MUSIC 算法相较于实值 MUSIC 算法具有更好的估计性能, 且随着样本量增大分量数估计正确的概率接近于 1。而在信噪比为 -5 dB 时, 逐步 MUSIC 算法仍具有不错的估计准确率, 但此时实值 MUSIC 算法已经完全失效。

综合实验一与实验二, 可以得出本文所提出的逐步 MUSIC 算法相较于实值 MUSIC 算法具有更好的恢复效果。

5. 结论

本文将加性噪声中的实值 MUSIC 算法与逐步 LSE 算法相结合, 提出了一种新的谐波恢复方法——逐步 MUSIC 算法, 在谐波分量数未知的情况下, 可利用该算法逐步估计出一个模型集, 进而运用 BIC 准则估计出谐波分量数。仿真实验说明, 与原有的实值 MUSIC 算法相比, 逐步 MUSIC 算法具有更好的谐波恢复效果。

参考文献

- [1] 田野, 史佳欣, 王彦茹. 增益相位误差下基于部分校准嵌套阵列的 DOA 估计[J]. 电子学报, 2019, 47(12): 2465-2471.
- [2] 桂宇风, 饶伟. 基于张量分解的二维互质矢量传感器阵列信号处理[J]. 南昌工程学院学报, 2019, 38(4): 83-91.
- [3] 吕晨杰, 王斌, 王开勋. 采用图像处理的跳频信号参数盲估计[J]. 电讯技术, 2015, 55(8): 842-847.
- [4] Zhang, X. and Liang, Y. (1995) Prefiltering-Based ESPRIT for Estimating Sinusoidal Parameters in Non-Gaussian ARMA Noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **43**, 349-353. <https://doi.org/10.1109/78.365327>
- [5] Zhang, X., Liang, Y. and Li, Y. (1994) A Hybrid Approach to Harmonic Retrieval in Non-Gaussian ARMA Noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, **40**, 1220-1226. <https://doi.org/10.1109/18.335951>
- [6] Roy, R., Paulraj, A. and Kailath, T. (1986) ESPRIT—A Subspace Rotation Approach to Estimation of Parameters of Cisoids in Noise. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, **34**, 1340-1342. <https://doi.org/10.1109/TASSP.1986.1164935>
- [7] Schmidt, R.O. (1986) Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **34**, 276-280. <https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143830>
- [8] Swami, A. and Mendel, J.M. (1991) Cumulant-Based Approach to Harmonic Retrieval and Related Problems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **39**, 1099-1109. <https://doi.org/10.1109/78.80965>
- [9] Shi, Z. and Fairman, F.W. (1994) Harmonic Retrieval via State Space and Fourth-Order Cumulants. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **42**, 1109-1119. <https://doi.org/10.1109/78.295207>
- [10] Zhang, Y. and Wang, S. (2000) Harmonic Retrieval in Colored Non-Gaussian Noise Using Cumulants. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **48**, 982-987. <https://doi.org/10.1109/78.827532>
- [11] Prasad, A., Kundu, D. and Mitra, A. (2008) Sequential Estimation of the Sum of Sinusoidal Model Parameters. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138**, 1297-1313. <https://doi.org/10.1016/j.jspi.2007.04.024>
- [12] 蔡涛, 段善旭, 刘方锐. 基于实值 MUSIC 算法的电力谐波分析方法[J]. 电工技术学报, 2009, 24(12): 149-155.
- [13] 田园, 张曙. 未知信源数目的 MUSIC 算法研究[J]. 信息技术, 2006, 30(6): 116-118.