

# Study on the Active Control of Vertical Nonlinear Suspension System

Yongchun Liu, Yanying Zhao\*

School of Aircraft Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi  
Email: [yanyingzhao@nchu.edu.cn](mailto:yanyingzhao@nchu.edu.cn)

Received: Jul. 30<sup>th</sup>, 2018; accepted: Aug. 8<sup>th</sup>, 2018; published: Aug. 15<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

The vehicle suspension system can be simplified into a single-degree-of-freedom vibration model. Five nonlinear stiffness factors are considered in this model, and a time-delay damper is used to control its vertical vibration. Using multi-scale analysis, the theoretical approximate solution of the system is obtained. The effects of nonlinear stiffness coefficient, damping coefficient, feedback gain coefficient and time delay on vertical vibration reduction are studied, and the regularity is analyzed, which can provide theoretical guidance for vibration reduction projects in engineering applications.

## Keywords

Higher Order Nonlinearity, Vertical Vibration, Active Control, Vibration Damping Effect

---

# 高阶非线性减振系统的主动控制的研究

刘永春, 赵艳影\*

南昌航空大学飞行器工程学院, 江西 南昌  
Email: [yanyingzhao@nchu.edu.cn](mailto:yanyingzhao@nchu.edu.cn)

收稿日期: 2018年7月30日; 录用日期: 2018年8月8日; 发布日期: 2018年8月15日

---

## 摘要

列车减振系统可简化成单自由度振动模型, 在这个模型中考虑五次非线性刚度因素, 采用时滞阻尼器来控制其竖向振动。采用多尺度法分析, 得出系统的理论近似解, 研究非线性刚度系数、阻尼系数、反馈增益系数和时滞量等因素对竖向振动的减振效果, 并分析其规律, 为工程应用中的减振项目提供理论指导。

\*通讯作者。

## 关键词

高阶非线性, 竖向振动, 主动控制, 减振效果

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

列车运行过程中有很多振动形式, 竖向振动是其振动的主要方式之一。竖向振动也会影响乘坐列车的体验[1] [2]。之前对列车减振系统的研究一般会简化成线性模型进行分析[3] [4] [5]; 但是所有的列车减振系统基本上都存在非线性特性[6] [7] [8]。随着非线性振动理论的发展, 越来越多的学者开始研究列车减振系统的非线性特性[9] [10]。特别是近年来, 对列车竖向非线性减振系统的研究越来越多, 这属于典型的非线性系统案例。为了更加精确地减振系统, 本文考虑列车的五阶非线性刚度, 分析在这种情况下非线性刚度系数、阻尼系数、反馈增益系数和时滞量等因素对竖向振动的减振效果, 并分析其规律, 为工程应用中的减振项目提供理论指导。

## 2. 力学模型

本文研究的单自由度的列车减振系统模型有质量块、非线性弹簧、和时滞半主动阻尼器组成。采用的是时滞反馈减振技术, 如图 1 所示, 减振体系的运动方程为:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + \delta x^5(t) + c\dot{x}(t) + f_{sc}\ddot{x}(t-\tau) = F_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

式中,  $m$  表示质量块的质量,  $k$  是线性弹簧的刚度系数,  $\delta$  是非线性弹簧的刚度系数, 力和位移之间的关系为  $F_k = kx + \delta x^5$ , 系统所承受外激励可简化为  $f(t) = F_0 \cos(\omega t)$ , 时滞反馈力为  $f_{sc}\ddot{x}(t-\tau)$ ,  $f_{sc}$  为时滞反馈系数,  $\tau$  是时滞量。

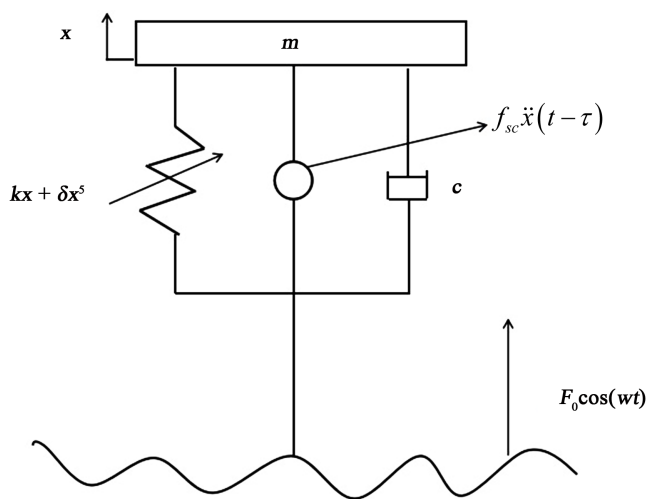


Figure 1. Illustration of model  
图 1. 模型图

### 3. 摄动分析

首先进行求导换元:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{wx_c}{\Omega} \cdot \frac{dy}{dT}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{w^2x_c}{\Omega^2} \cdot \frac{d^2y}{dT^2}, \quad \frac{d^2x(t-\tau)}{dt^2} = \frac{w^2x_c}{\Omega^2} \cdot \frac{d^2y(T-\tau_c)}{dT^2} \quad (2)$$

其中  $\Omega$  为无量纲频率[3]。

对(1)式进行的系统变量进行无量纲化处理, 令:

$$y = \frac{x}{x_c}, \quad T = \frac{w}{\Omega}t, \quad \tau_c = \frac{w}{\Omega}\tau, \quad w_0 = \sqrt{\frac{k\Omega^2}{mw^2}}, \quad \xi_1 = \frac{\delta x_c^4 \Omega^2}{mw^2}, \quad \xi_2 = \frac{c\Omega}{mw}, \quad f_s = \frac{f_{sc}}{m_c}, \quad F = \frac{F_0 \Omega^2}{mx_c w^2} \quad (3)$$

将式(2)和式(3)代入式(1), 可以得出以下无量纲方程:

$$\ddot{y}(T) + w_0^2 y(T) + \xi_1 y^5(T) + \xi_2 \dot{y}(T) + f_s \dot{y}(T - \tau_c) = F \cos(\Omega T) \quad (4)$$

为了便于分析, 将系统变量进行重新标定, 其中  $0 < \varepsilon \leq 1$ :

$$\xi_1 = \varepsilon \hat{\xi}_1, \quad \xi_2 = \varepsilon \hat{\xi}_2, \quad f_s = \varepsilon \hat{f}_s, \quad F = \varepsilon \hat{F}, \quad \tau = \tau_c = \hat{\tau}, \quad y_\tau = y(T - \hat{\tau}), \quad \Omega = w_0 + \varepsilon \sigma$$

将上式代入(4)式, 可得如下方程:

$$\ddot{y}(T) + w_0^2 y(T) = \varepsilon \left[ -\hat{\xi}_1 y^5(T) - \hat{\xi}_2 \dot{y}(T) - \hat{f}_s \dot{y}_\tau + \hat{F} \cos(\Omega T) \right] \quad (5)$$

根据泰勒展开式, 方程(5)的解可近似表示为:

$$y(T, \varepsilon) = y_0(T_0, T_1) + \varepsilon y_1(T_0, T_1), \quad y_\tau(T, \varepsilon) = y_{0\tau}(T_0, T_1) + \varepsilon y_{1\tau}(T_0, T_1) \quad (6)$$

根据多尺度法将式(6)代入式(5), 比较  $\varepsilon$  的零次幂和一次幂可得:

$$\varepsilon^0: D_0^2 y_0 + w_0^2 y_0 = 0 \quad (7)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 y_1 + w_0^2 y_1 = -2D_0 D_1 y_0 + \left[ -\hat{\xi}_1 y_0^5 - \hat{\xi}_2 D_0 y_0 - \hat{f}_s \dot{y}_{0\tau} + \hat{F} \cos(w_0 T_0 + \sigma T_1) \right] \quad (8)$$

式(7)的通解可以表示为:

$$y_0 = a(T_1) \cos[w_0 T_0 + \varphi(T_1)] = A(T_1) e^{i w_0 T_0} + cc \quad (9)$$

其中:  $A(T_1) = \frac{a(T_1)}{2} e^{i\varphi(T_1)}$ ,  $cc$  代表其前面各项的共轭, 后不赘述。

外激励项和时滞项可以表示成如下的复数形式:

$$\hat{F} \cos(w_0 T_0 + \sigma T_1) = \frac{1}{2} \hat{F} e^{i(w_0 T_0 + \sigma T_1)} + cc \quad (10)$$

$$y_{0\tau} = A_\tau(T_1) e^{i w_0 (T_0 - \tau)} + cc \quad (11)$$

在假设  $\tau$  和  $\varepsilon$  都很小的前提下,  $A_\tau$  可以按照泰勒级数展开为如下的形式

$$A_\tau = A(T_1) - \varepsilon \tau A'(T_1) + \frac{(\varepsilon \tau)^2}{2} A''(T_1) + \dots \quad (12)$$

将(9)~(12)式代入到式(8)中, 可以得到:

$$\begin{aligned} (D_0^2 + \Omega^2) y_1 = & \left[ -i2w_0 D_1 A - 10\hat{\xi}_1 A^3 \bar{A}^2 - iw_0 \hat{\xi}_2 A - iw_0 \hat{f}_s A e^{-i w_0 \tau} + \frac{\hat{F}}{2} e^{i \sigma T_1} \right] e^{i w_0 T_0} \\ & - \hat{\xi}_1 A^5 e^{i 5 w_0 T_0} - 5\hat{\xi}_1 A^4 \bar{A} e^{i 3 w_0 T_0} + cc \end{aligned} \quad (13)$$

由此可得式(13)的可解性条件:

$$-i2w_0D_1A - 10\hat{\xi}_1A^3\bar{A}^2 - iw_0\hat{\xi}_2A - iw_0\hat{f}_sAe^{-iw_0\hat{\tau}} + \frac{\hat{f}}{2}e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (14)$$

将  $A(T_1) = \frac{a(T_1)}{2}e^{i\varphi(T_1)}$  代入(14)

$$-iw_0D_1a + aw_0D_1\varphi - \frac{5}{16}\hat{\xi}_1a^5 - iw_0\hat{\xi}_2\frac{a}{2} - iw_0\hat{f}_s\frac{a}{2}e^{-iw_0\hat{\tau}} + \frac{\hat{f}}{2}e^{i(\sigma T_1 - \varphi)} = 0 \quad (15)$$

分离实部和虚部可得:

$$D_1a = -\frac{a}{2}\hat{\xi}_2 - \hat{f}_s\frac{a}{2}\cos(w_0\hat{\tau}) + \frac{\hat{f}}{2w_0}\sin(\sigma T_1 - \varphi) \quad (16)$$

$$aD_1\varphi = \frac{5}{16w_0}\hat{\xi}_1a^5 + \hat{f}_s\frac{a}{2}\sin(w_0\hat{\tau}) - \frac{\hat{f}}{2w_0}\cos(\sigma T_1 - \varphi) \quad (17)$$

令  $\phi = \sigma T_1 - \varphi$ , 则上式为:

$$D_1a = -\frac{a}{2}\hat{\xi}_2 - \hat{f}_s\frac{a}{2}\cos(w_0\hat{\tau}) + \frac{\hat{f}}{2w_0}\sin\phi \quad (18)$$

$$a\sigma - aD_1\phi = \frac{5}{16w_0}\hat{\xi}_1a^5 + \hat{f}_s\frac{a}{2}\sin(w_0\hat{\tau}) - \frac{\hat{f}}{2w_0}\cos\phi \quad (19)$$

对于稳态的主共振响应, 令上两式中的  $D_1a = D_1\phi = 0$ , 得到与振幅和相位满足的代数方程组:

$$\frac{\hat{f}}{2}\sin\phi = \frac{a}{2}w_0\hat{\xi}_2 + \hat{f}_sw_0\frac{a}{2}\cos(w_0\hat{\tau}) \quad (20)$$

$$\frac{\hat{f}}{2}\cos\phi = \frac{5}{16}\hat{\xi}_1a^5 + \hat{f}_sw_0\frac{a}{2}\sin(w_0\hat{\tau}) - a\sigma w_0 \quad (21)$$

两式平方相加可得:

$$\frac{\hat{f}^2}{4} = \left[ \frac{a}{2}w_0\hat{\xi}_2 + \hat{f}_sw_0\frac{a}{2}\cos(w_0\hat{\tau}) \right]^2 + \left[ \frac{5}{16}\hat{\xi}_1a^5 + \hat{f}_sw_0\frac{a}{2}\sin(w_0\hat{\tau}) - a\sigma w_0 \right]^2 \quad (22)$$

两边同时乘以  $4\epsilon^2$ , 且将  $\Omega = w_0 + \epsilon\sigma$  代入可得到与  $\Omega$ 、 $\tau$ 、 $a$  相关的无量纲方程:

$$F^2 = \left[ aw_0\hat{\xi}_2 + f_sw_0a\cos(w_0\tau) \right]^2 + \left[ \frac{5}{8}\hat{\xi}_1a^5 + f_sw_0a\sin(w_0\tau) - 2aw_0\Omega + 2aw_0^2 \right]^2 \quad (23)$$

#### 4. 系统参数对减振性能的影响

本文主要研究非线性刚度系数  $\xi_1$ 、阻尼系数  $\xi_2$ 、反馈增益系数  $f_{sc}$  和时滞量  $\tau$  对系统的减振效果, 并研究其规律。

当反馈增益系数  $f_{sc}$  和时滞量  $\tau$  都为零时对应被动减振系统。式(23)变为:

$$F^2 = [aw_0\hat{\xi}_2]^2 + \left[ \frac{5}{8}\hat{\xi}_1a^5 - 2aw_0\Omega + 2aw_0^2 \right]^2 \quad (24)$$

选取参数  $w_0 = 1.75, F = 0.2$ , 当阻尼系数  $\xi_2$  不变时取  $\xi_2 = 0.1$ , 改变系统的非线性刚度系数  $\xi_1$ , 可以得到图 2, 从图 2 可以得出, 非线性因子会使振幅峰值发生偏离, 非线性刚度系数  $\xi_1$  越大, 共振峰值

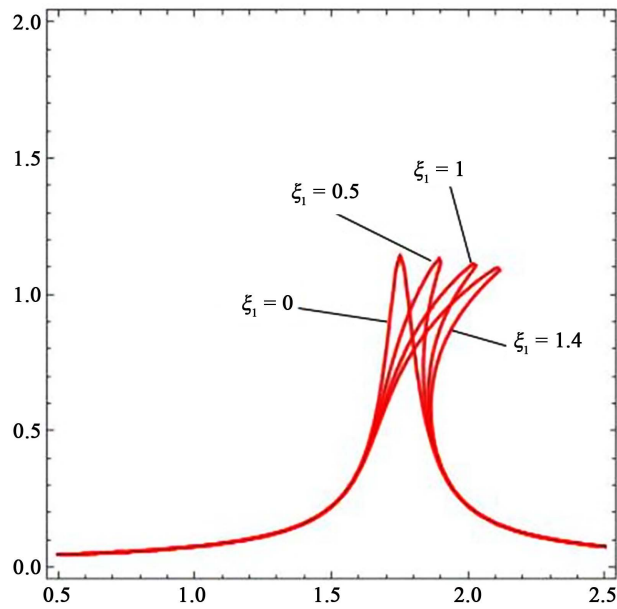


Figure 2. Stiffness versus amplitude  
图 2. 刚度与振幅

频率向右偏移越多, 同时同一频率所对应的峰值出现了多值情况, 系统会出现跳跃现象, 不利于结构的稳定。当非线性刚度系数  $\xi_1$  不变时取  $\xi_1 = 0.5$ , 改变系统的阻尼系数  $\xi_2$ , 可以得出图 3, 从图 3 可以得出, 阻尼可以使振幅减小, 阻尼越大, 振幅越小, 但是当阻尼增大到一定程度时, 阻尼的增大的减振效果不是很明显。

当反馈增益系数  $f_s$  和时滞量  $\tau$  都不为零时对应主动减振系统, 对应的频响函数为式(23), 选取参数  $\xi_1 = 0.4, \xi_2 = 0.1, F = 0.2, w_0 = 1.75, \Omega = 1.6$ , 当反馈增益系数  $f_s$  不变时, 分别取  $f_s = 0.75, 1, 1.6$ , 可得图 4, 从图 4 可以看出, 振幅随时滞量呈周期性变化, 在振幅的最大处出现跳跃现象。当时滞量不变时, 分别取  $\tau = 0.5, 1, 1.5$ , 可得图 5, 从图 5 可以看出,  $f_s = -0.3$  左右, 系统的振幅达到最大, 因此在该种情况下要避免选择反馈增益系数在  $f_s = -0.3$  附近工作。

## 5. 系统的稳定性与分岔

对于稳态的主共振响应, 令  $D_1 a = f_1(a, \phi)$ ,  $a D_1 \phi = f_2(a, \phi)$ , 则设:

$$S_1 = \frac{\partial f_1}{\partial a} = -\frac{\hat{\xi}_2}{2} - \frac{\hat{f}_s}{2} \cos(w_0 \hat{\tau}), \quad S_2 = \frac{\partial f_1}{\partial \phi} = \frac{\hat{f}}{2w_0} \cos \phi = \frac{5}{16w_0} \hat{\xi}_1 a^5 + \frac{\hat{f}_s}{2} a \sin(w_0 \hat{\tau}) - a\sigma$$

$$S_3 = \frac{\partial f_2}{\partial a} = \frac{1}{a} \left[ \sigma - \frac{25}{16w_0} \hat{\xi}_1 a^4 - \hat{f}_s \frac{1}{2} \sin(w_0 \hat{\tau}) \right], \quad S_4 = \frac{\partial f_2}{\partial \phi} = \frac{\hat{f}}{2w_0} \sin \phi = -\frac{1}{2} \hat{\xi}_2 - \hat{f}_s \frac{1}{2} \cos(w_0 \hat{\tau})$$

$$cr = \left[ \frac{5}{16w_0} \hat{\xi}_1 a^4 + \hat{f}_s \frac{1}{2} \sin(w_0 \hat{\tau}) - \sigma \right] \left[ \sigma - \frac{25}{16w_0} \hat{\xi}_1 a^4 - \hat{f}_s \frac{1}{2} \sin(w_0 \hat{\tau}) \right]$$

微分方程(18)、(19)的 Frechet 导数为:  $\text{Frechet} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix}$ , 其特征矩阵为:

$$\det \begin{bmatrix} S_1 - \lambda & S_2 \\ S_3 & S_4 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (25)$$

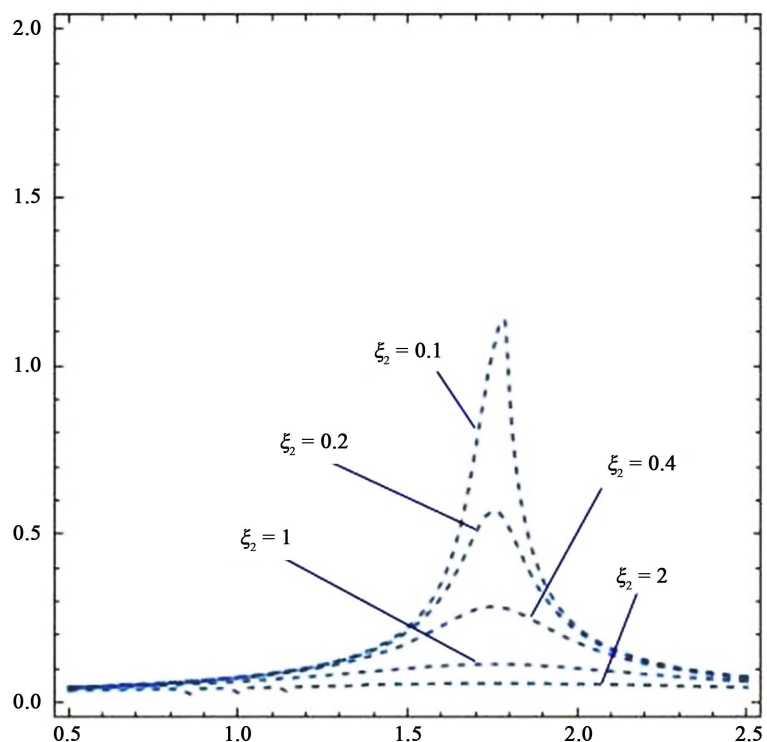


Figure 3. Damping versus amplitude  
图 3. 阻尼与振幅

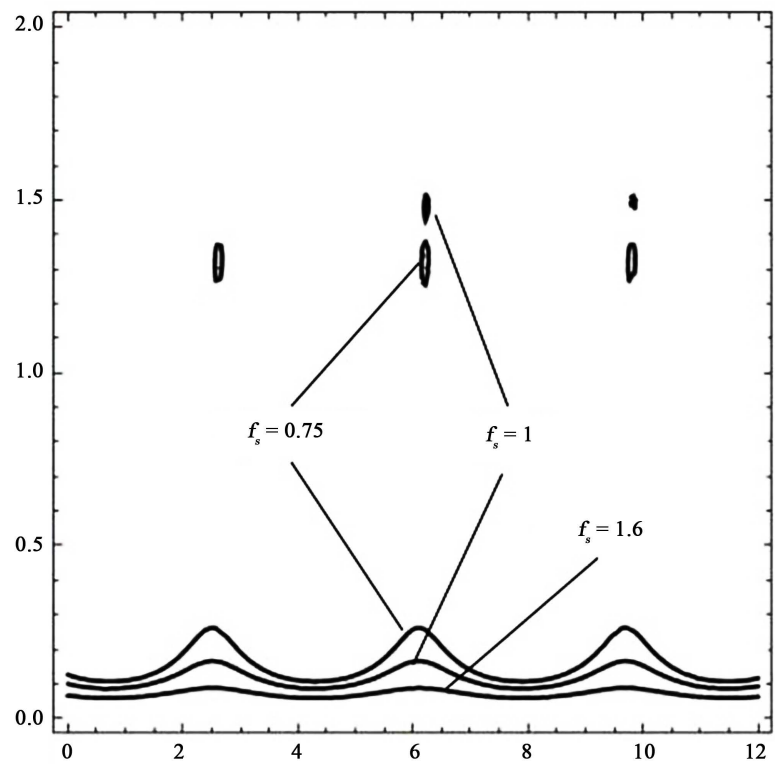


Figure 4. Time delay versus amplitude  
图 4. 时滞与振幅

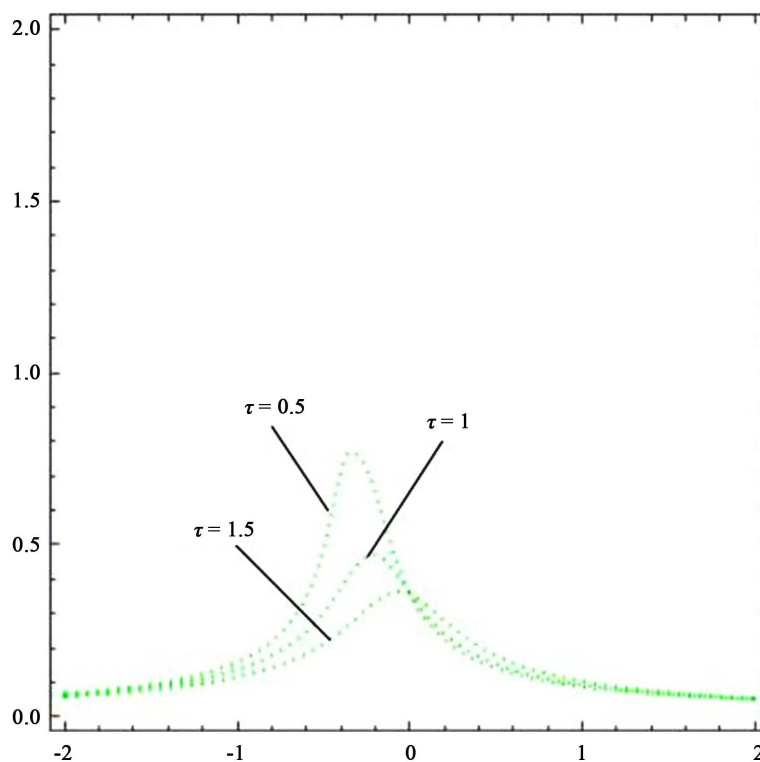


Figure 5. Feedback gain versus amplitude  
图 5. 反馈增益与振幅

其特征方程为  $\lambda^2 + [\hat{\xi}_2 + \hat{f}_s \cos(w_0 \hat{\tau})] \lambda + S_1 S_4 - S_2 S_3 = 0$ , 根据罗斯准则, 系统稳定的充分必要条件是:

$$B = [\hat{\xi}_2 + \hat{f}_s \cos(w_0 \hat{\tau})] > 0$$

$$A = \left[ \frac{\hat{\xi}_2}{2} + \frac{\hat{f}_s}{2} \cos(w_0 \hat{\tau}) \right]^2 - \left[ \frac{5}{16w_0} \hat{\xi}_1 a^4 + \hat{f}_s \frac{1}{2} \sin(w_0 \hat{\tau}) - \sigma \right] \left[ \sigma - \frac{25}{16w_0} \hat{\xi}_1 a^4 - \hat{f}_s \frac{1}{2} \sin(w_0 \hat{\tau}) \right] > 0$$

将相应的参数代入后, 如果  $\hat{\xi}_2 + \hat{f}_s \cos(w_0 \hat{\tau}) > 0$  不总成立说明存在不稳定的解, 因此调节时滞和反馈增益系数时, 可能会发现跳跃现象, 破坏系统的稳定性; 如果

$\left[ \frac{\hat{\xi}_2}{2} + \frac{\hat{f}_s}{2} \cos(w_0 \hat{\tau}) \right]^2 - \left[ \frac{5}{16w_0} \hat{\xi}_1 a^4 + \hat{f}_s \frac{1}{2} \sin(w_0 \hat{\tau}) - \sigma \right] \left[ \sigma - \frac{25}{16w_0} \hat{\xi}_1 a^4 - \hat{f}_s \frac{1}{2} \sin(w_0 \hat{\tau}) \right] < 0$  系统的响应可能会无限发散, 最终导致结构破坏。

选取参数  $\xi_1 = 0.4, \xi_2 = 0.1, F = 0.2, w_0 = 1.75, f_s = 1, \tau = 0.8$ , 将稳定性方程、被动减振方程、时滞减振方程的函数曲线图放到一个坐标系下, 如图 6, 分析其稳定性

根据图 6 可知, 区域 1 包含在区域 2 内, 为不稳定区域, 被动减振方程和时滞减振方程均处于稳定区域。在时滞的作用下, 共振点向右移动, 时滞振动曲线的峰值降低, 这说明时滞起到了很好的减振作用。

## 6. 结论

非线性刚度会使振幅峰值发生偏移, 系统出现跳跃现象, 但对减振没有很大的帮助, 因此尽可能地选择线性弹簧或者非线性刚度小的弹簧作为减振器的部件; 阻尼可以使振幅减小, 但是到一定程度时,

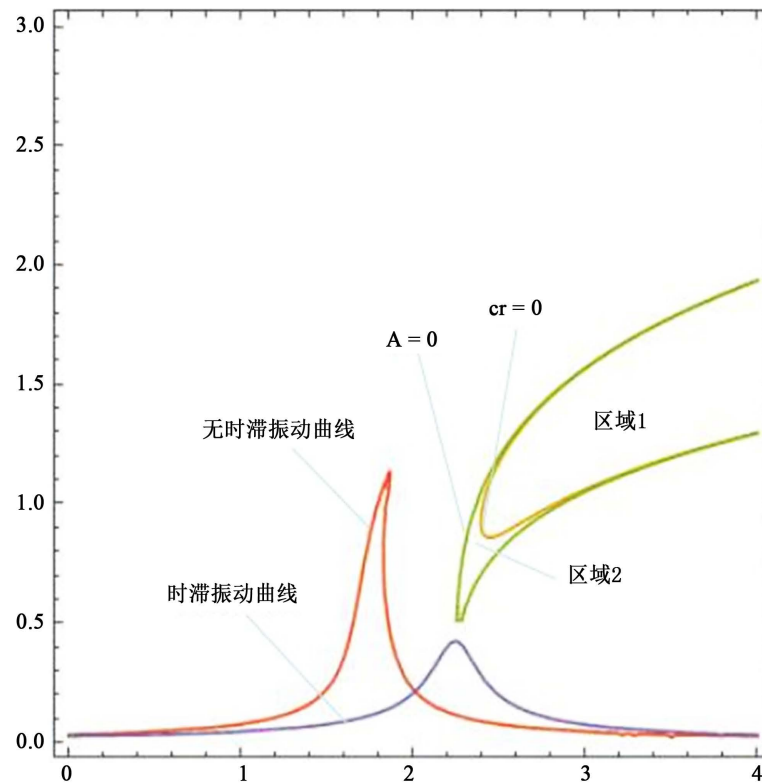


Figure 6. Stability domain versus oscillating curve  
图 6. 稳定区域与振动曲线

阻尼的减振效果不是很明显, 因此在实际中要结合经济因素和使用要求来选择合适的阻尼材料; 时滞量随外激励的频率呈周期性变化, 表明时滞在部分区间对减振有促进效果, 部分区间使振动恶化, 在振幅的最大处还出现跳跃现象, 因此在实际工程应用中, 要选择合理的时滞量来减小系统的振动, 避免系统振动的跳跃失稳; 反馈增益系数在某个固定值及其附近减振效果最差, 因此要合理的选择反馈增益系数, 避免阻尼减振器的反馈增益系数在这个值附近起作用。

## 基金项目

本论文受到以下基金的资助: 国家自然科学基金资助项目(11372125), 江西省自然科学基金资助项目(20161BAB101005), 航空科学基金资助项目(2017ZA56001)。

## 参考文献

- [1] Margolis, D.L., Tyle, J.L. and Hrovat, D. (1997) Heave Mode Dynamics of a Tracked Air Cusion Vehicle with Semi-Active Airbag Secondary Suspension. *ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, **119**, 399-407. <https://doi.org/10.1115/1.3426956>
- [2] Elmadany, M.M. and Abduljabbar, Z. (1991) Alternative Control Laws for Active and Semi-Active Automotive Suspensions—A Comparative Study. *Computers & Structures*, **39**, 3-4.
- [3] 胡海岩, 王在华. 非线性时滞动力系统的研究进展[J]. *力学进展*, 1999, 29(4): 501-512.
- [4] 陈泽深, 王成国. 车辆-轨道系统高中低频动力学模型的理论特征及其应用范围的研究[J]. *中国铁道科学*, 2004, 25(4): 1-10.
- [5] 金景云. 高速列车用油压减振器的研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海交通大学, 2000.
- [6] 陈龙, 汪若尘, 江浩斌, 等. 含时滞半主动悬架及其控制系统[J]. *机械工程学报*, 2006, 42(1): 130-133.



- 
- [7] 金善玉. 高速列车转向架自振频率测试方法研究[D]: [硕士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2012.
- [8] 马新娜, 杨绍普. 时滞在磁流变主动控制系统中的影响[J]. 动力学与控制学报, 2012, 10(3): 228-233.
- [9] 朱茂飞, 陈无畏, 祝辉. 基于磁流变减振器的半主动悬架时滞变结构控制[J]. 机械工程学报, 2010, 46(12): 113-120.
- [10] 赵剡水, 周孔亢, 李仲兴, 等. 磁流变减振器半主动悬架的系统时滞[J]. 机械工程学报, 2009, 45(7): 221-227.

**知网检索的两种方式:**

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2328-0530, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [ojav@hanspub.org](mailto:ojav@hanspub.org)