Operations Research and Fuzziolgy 运筹与模糊学, 2013, 3, 1-6
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2013.31001 Published Online February 2013 (http://www.hanspub.org/journal/orf.html)

Subgradient Algorithm for a Form of Mixed Variational Inequalities

Chao Zheng, Hongyou Yin, Yuanping Wang

College of Sciences, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing
Email: xuzhouzhengchao@sina.com, zhengchao_math@163.com

Received: Dec. 9th, 2012; revised: Jan. 7th, 2013; accepted: Jan. 18th, 2013

Abstract: This paper studies a form of mixed variational inequalities problem. When disturbance function is nonsmooth, the optimal condition of these mixed variational inequalities is proposed. Then subgradient is offered and its convergence is proved.

Keywords: Mixed Variational Inequalities; Nonsmooth; Optimal Condition; Subgradient

一类混合变分不等式的次梯度法

郑　超，殷洪友，王园萍

南京航空航天大学理学院，南京
Email: xuzhouzhengchao@sina.com, zhengchao_math@163.com

收稿日期：2012 年 12 月 9 日；修回日期：2013 年 1 月 7 日；录用日期：2013 年 1 月 18 日

摘　要：本文研究了一类混合变分不等式问题.在扰动泛函非光滑的情况下，给出了这类混合变分不等式的最优性条件，设计了次梯度算法，并证明了该算法的收敛性。

关键词：混合变分不等式；非光滑；最优性条件；次梯度法

1. 引言

“变分不等式”是计算数学与运筹学的一个交叉研究领域，与非线性规划、互补问题、最优化理论、广义方程、对策论、不动点理论等分支有密切的联系。它作为一类数学模型应用在如力学、工程学、经济学和运筹学等诸多领域。对于经典的 Hartman-Stampacchia 变分不等式的理论与算法方面的研究可见文献[1]和文献[2]。设 R^n 是一个实线性空间，$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle},\forall x\in R^n$， K 是 R^n 中的一个闭凸锥，映射 $f:K\to R^n$， $F:K\to R$ 是 R^n 中的凸泛函，本文考虑广泛应用在弹性塑料学领域的混合变分不等式问题[3]：求 $x^*\in K$，使得

$$\left\langle x-x^*,f\left(x^*\right)\right\rangle+F\left(x\right)-F\left(x^*\right)\geq 0,\forall x\in K \tag{1}$$

显然，若 F 是零泛函，则(1)就是经典 Hartman 变分不等式：求 $x^*\in K$，使得

$$\left\langle x-x^*,f\left(x^*\right)\right\rangle\geq 0,\forall x\in K$$

混合变分不等式问题比一般的变分不等式问题更加具有代表性，从而研究混合变分不等式问题具有更广泛的适用范围。对于混合变分不等式问题的研究一般分为理论与算法，前者主要研究解的存在性、唯一性；后者则主要建立在有效的算法及收敛性分析。文献[4]给出了在 Banach 空间混合变分不等式与 F-互补问题的等价性，文献[5]提供了混合变分不等式的投影算法，文献[6]假设扰动泛函 F 非光滑的情况下，给出了投影梯度算法。

本文在扰动泛函非光滑的情况下，第二章给出了所需的定义和引理，第三章证明了这类混合变分不等式问题的最优性条件，第四章设计了次梯度算法并对算法的收敛性进行了理论证明。

本文记凸规划问题：求 $x^* \in K$，使得

$$P\left(x^*\right)+F\left(x^*\right)=\min_{x\in K}\left\{P\left(x\right)+F\left(x\right)\right\} \tag{2}$$

2. 预备知识

定义 2.1 设 $\Gamma \subset R^n$ 是非空凸集，若 $\lambda\Gamma \subset \Gamma, \forall \lambda > 0$，则称 Γ 是锥。若还有 $\Gamma+\Gamma \subset \Gamma$，则称 Γ 是凸锥。

定义 2.2 设 $K \subset R^n$ 是非空开凸集，f 是 K 上的凸函数，$x \in K$，称集合

$$\partial f\left(x\right)=\left\{v\in R^n \middle| f\left(y\right)-f\left(x\right)\ge\left\langle v,y-x\right\rangle,\forall y\in K\right\}$$

是 f 在 x 处的次微分，称 $v\in\partial f\left(x\right)$ 是 f 在 x 处的次梯度。

定义 2.3 设 $K \subset R^n$ 是非空开凸集且 $x_0 \in K$，记 $\gamma\left(x_0\right)=\left\{v=\lambda\left(x-x_0\right)\middle|\lambda>0,x\in K\right\}$，则称 $\Gamma\left(x_0\right)=\overline{\gamma\left(x_0\right)}$ 是 K 在点 x_0 处的可行方向锥。

定义 2.4 设 $\Gamma \subset R^n$ 是锥，则集合 $\Gamma^+=\left\{y\in R^n\middle|\left\langle x,y\right\rangle\ge 0,\forall x\in\Gamma\right\}$ 称为 Γ 的共轭锥。

引理 2.1 设 f 是 K 上的凸函数，则 ∂f 在 K 的每一点都上半连续。

引理 2.2[7] 假设 $P'=f$，若 x^* 是(1)的解，且 P' 是凸函数，则 x^* 是(2)的解；反之，若 x^* 是(2)的解，则 x^* 也是(1)的解。

3. 最优性条件

为方便叙述，本节记凸规划问题：

$$\min_{x\in K}\left\{\left\langle x,f\left(x^*\right)\right\rangle+F\left(x\right)\right\}=\min_{x\in K}\left\{P\left(x\right)+F\left(x\right)\right\} \tag{3}$$

定理 3.1 $x^* \in K$ 是(3)的最优解当且仅当

$$\min_{g\in\Gamma\left(x^*\right),\|g\|=1}\left\{P'\left(x^*;g\right)+F'\left(x^*;g\right)\right\}\ge 0 \tag{4}$$

证：设 x^* 是(3)的最优解，若(4)不成立，则存在单位向量 $g_0\in\gamma\left(x^*\right)$，使得

$$P'\left(x^*;g_0\right)+F'\left(x^*;g_0\right)=\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{P\left(x^*+\alpha g_0\right)-P\left(x^*\right)}{\alpha}+\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{F\left(x^*+\alpha g_0\right)-F\left(x^*\right)}{\alpha}<0$$

由极限的保号性，存在 $\alpha_0>0$，使得

$$\frac{P\left(x^*+\alpha g_0\right)-P\left(x^*\right)}{\alpha}+\frac{F\left(x^*+\alpha g_0\right)-F\left(x^*\right)}{\alpha}<0,\forall\alpha\in\left(0,\alpha_0\right]$$

即

$$P\left(x^*+\alpha g_0\right)+F\left(x^*+\alpha g_0\right)<P\left(x^*\right)+F\left(x^*\right),\forall\alpha\in\left(0,\alpha_0\right]$$

由于 $g_0\in\gamma\left(x^*\right)$，因此 $g_0=\lambda\left(x-x^*\right),\lambda>0,x\in K$

于是当 α 充分小时有

$$x^*+\alpha g_0=x^*+\alpha\lambda\left(x-x^*\right)=\left(1-\alpha\lambda\right)x^*+\alpha\lambda x\in K$$

这与 x^* 是(3)的最优解矛盾。

反之，设(3)成立，$\forall x\in K,x\ne x^*$，有

$$\begin{aligned}&P(x)+F(x)\\&\ge P(x^*)+\max_{v\in\partial P(x^*)}\langle v,x-x^*\rangle+F(x^*)+\max_{u\in\partial F(x^*)}\langle u,x-x^*\rangle\\&=P(x^*)+\|x-x^*\|\max_{v\in\partial P(x^*)}\left\langle v,\frac{x-x^*}{\|x-x^*\|}\right\rangle+F(x^*)+\|x-x^*\|\max_{u\in\partial F(x^*)}\left\langle u,\frac{x-x^*}{\|x-x^*\|}\right\rangle\end{aligned}\tag{5}$$

记 $g_0=\dfrac{x-x^*}{\|x-x^*\|}$，则 $\|g_0\|=1$，且 $g_0\in\Gamma(x^*)$，有(4)和(5)得

$$\begin{aligned}&P(x)+F(x)\\&\ge P(x^*)+\|x-x^*\|\max_{v\in\partial P(x^*)}\langle v,g_0\rangle F(x^*)+\|x-x^*\|\max_{u\in\partial F(x^*)}\langle u,g_0\rangle\\&=P(x^*)+\|x-x^*\|\cdot P'(x^*;g_0)+F(x^*)+\|x-x^*\|\cdot F'(x^*;g_0)\\&\ge P(x^*)+\|x-x^*\|\cdot\min_{g_0\in\Gamma(x^*),\|g_0\|=1}P'(x^*;g_0)+F(x^*)+\|x-x^*\|\cdot\min_{g_0\in\Gamma(x^*),\|g_0\|=1}F'(x^*;g_0)\\&\ge P(x^*)+F(x^*)+\|x-x^*\|\cdot\min_{g_0\in\Gamma(x^*),\|g_0\|=1}\left\{P'(x^*;g_0)+F'(x^*;g_0)\right\}\\&\ge P(x^*)+F(x^*)\end{aligned}$$

即 x^* 是(3)的最优解。

引理 3.1 设 $C\subset R^n$ 是闭凸集，且 $C_{fr}\ne\Phi$，令 $\varphi=\min\limits_{\|g\|=1}\sup\limits_{v\in C}\langle v,g\rangle, d=\min\limits_{v\in C}\|v\|,\rho=\min\limits_{v\in C_{fr}}\|v\|$

则 a)当 $d>0$ 时，有 $\varphi=-d$；b)当 $d=0$ 时，有 $\varphi=\rho$。

证：a) 当 $d>0$ 时，有 $0\notin C$，从而存在 $v_0\in C$，使 $d=\min\limits_{v\in C}\|v\|=\|v_0\|$，

即 v_0 是 $x=0$ 在 C 上的投影，于是 $\langle v,v_0\rangle\ge\|v_0\|^2,\forall v\in C$。

令 $g_0=-\dfrac{v_0}{\|v_0\|}$，即 $\langle v,g_0\rangle\le-\|v_0\|,\forall v\in C$，

从而

$$\varphi=\min_{\|g\|=1}\sup_{v\in C}\langle v,g\rangle\le\sup_{v\in C}\langle v,g_0\rangle\le-\|v_0\|=-d\ .$$

另一方面，$\forall g\in R^n,\|g\|=1$，有 $\sup\limits_{v\in C}\langle v,g\rangle\ge\langle v_0,g\rangle\ge-\|v_0\|\cdot\|g\|=-\|v_0\|=-d$。

从而

$$\varphi\ge-\|v_0\|=-d.$$

综上所述，有 $\varphi=-\|v_0\|=-d$。

b) 当 $d=0$，有 $0\in C$，从而 $\varphi=\min\limits_{\|g\|=1}\sup\limits_{v\in C}\langle v,g\rangle\ge0$。

如果 $0\in C_{fr}$，则 $\rho=0$，由边界点的凸集分离定理，存在单位向量 $g_0\in R^n$，使得 $\langle v,g_0\rangle\le0,\forall v\in C$，从而 $0\le\varphi\le\sup\limits_{v\in C}\langle v,g_0\rangle\le0$，因此 $\varphi=0=\rho$。

如果 $0\in\operatorname{int}C$，则 $S_\rho(0)\subset C$，于是 $\forall g\in R^n,\|g\|=1$，有 $\rho=\max\limits_{v\in S_\rho(0)}\langle v,g\rangle\le\sup\limits_{v\in C}\langle v,g\rangle$，

从而 $\rho\le\min\limits_{\|g\|=1}\sup\limits_{v\in C}\langle v,g\rangle=\varphi$。

以下证明 $\varphi=\rho$。

如果 $\rho<\varphi$，则 $S_\rho(0)\subset S_\varphi(0)$，则存在向量 v_0，使 $v_0\in S_\varphi(0)$，但 $v_0\notin C$，根据凸集分离定理，存在单位

向量 $g_0 \in R^n$ 和数 $\alpha > 0$，使得 $\langle v - v_0, g_0 \rangle \le -\alpha, \forall v \in C$。

于是 $\varphi = \min_{\|g\|=1} \sup_{v\in C} \langle v, g\rangle \le \sup_{v\in C}\langle v, g_0\rangle \le \langle v_0, g_0\rangle - \alpha \le \|v_0\| - \alpha$，即 $\|v_0\| \ge \varphi + \alpha$，这与 $v_0 \in S_\varphi(0)$ 相矛盾，因此 $\varphi = \rho$。□

推论 3.1 在引理 1 的条件下，如果 $\|v_0\| = \min_{v\in C}\|v\| = d > 0, g_0 = -\dfrac{v_0}{\|v_0\|}$，则 $\varphi = \sup_{v\in C}\langle v, g_0\rangle = -\|v_0\| = -d$。

推论 3.2 在引理 1 的条件下，$\varphi \ge 0 \Leftrightarrow d = 0 \Leftrightarrow 0 \in C$。

引理 3.2 设 $B \subset R^n$ 是紧凸集，$\Gamma \subset R^n$ 是闭凸锥，Γ^+ 是 Γ 的共轭锥，令

$$C = B - \Gamma^+, \psi = \min_{g\in\Gamma, \|g\|=1} \max_{v\in B}\langle v, g\rangle, \varphi = \min_{\|g\|=1}\sup_{v\in C}\langle v, g\rangle$$

则 $\psi = \varphi$。

证：已知 B 是紧凸集，则 $\sup_{v\in C}\langle v, g\rangle = \max_{v_1\in B}\langle v_1, g\rangle + \max_{v_2\in -\Gamma^+}\langle v_2, g\rangle$。

当 $g \in \Gamma$ 时，有 $\langle v_2, g\rangle \le 0$，从而 $\max_{v_2\in-\Gamma^+}\langle v_2, g\rangle = 0$。

当 $g \notin \Gamma$ 时，则存在 $v_2' \in -\Gamma^+$，使 $\langle v_2', g\rangle > 0$，

从而 $\sup_{v_2\in\Gamma^+}\langle v_2, g\rangle \ge \langle \lambda v_2', g\rangle = \lambda\langle v_2', g\rangle \to +\infty, (\lambda \to +\infty)$，于是 $\sup_{v\in C}\langle v, g\rangle = \begin{cases} \max_{v_1\in B}\langle v_1, g\rangle, g \in \Gamma \\ +\infty, g \notin \Gamma \end{cases}$，

因此 $\varphi = \min_{\|g\|=1}\sup_{v\in C}\langle v, g\rangle = \min_{g\in\Gamma,\|g\|=1}\max_{v\in B}\langle v, g\rangle = \psi$。□

推论 3.3 在引理 3.2 的条件下，如果 $\sup_{v\in C}\langle v, g\rangle < +\infty$，则 $g \in \Gamma$ 且 $\sup_{v\in C}\langle v, g\rangle = \max_{v\in B}\langle v, g\rangle$。

定理 3.2 设 $x^* \in K$ 是凸规划(3)的最优解当且仅当 $0 \in f(x^*) + \partial F(x^*) - \Gamma^+(x^*)$。

证：在引理 3.2 中取 $B = \partial P(x^*) + \partial F(x^*), \Gamma = \Gamma(x^*), C = B - \Gamma^+$，注意到 $P(x) = \langle x, f(x^*)\rangle$ 以及 $\langle\ \rangle$ 的光滑性，则

$$\min_{g\in\Gamma(x^*),\|g\|=1}\left\{P'(x^*; g) + F(x^*; g)\right\} = \min_{g\in\Gamma,\|g\|=1}\max_{f(x^*)+v\in B}\left\langle f(x^*) + v, g\right\rangle = \psi = \varphi = \min_{\|g\|=1}\sup_{f(x^*)+v\in C}\left\langle f(x^*) + v, g\right\rangle。$$

根据定理 3.1，x^* 是凸规划(3)的最优解的充要条件是 $\min_{g\in\Gamma(x^*),\|g\|=1}\left\{P'(x^*; g) + F'(x^*; g)\right\} \ge 0$，

即 $\varphi \ge 0$。根据推论 3.2，有 $\varphi \ge 0 \Leftrightarrow d = 0 \Leftrightarrow 0 \in C$。于是 x^* 是凸规划问题(3)的最优解 $\Leftrightarrow 0 \in f(x^*) + \partial F(x^*) - \Gamma^+(x^*)$。□

推论 3.4 设 $x^* \in \operatorname{int} K$，则 x^* 是(3)的最优解当且仅当 $0 \in f(x^*) + \partial F(x^*)$。

设 x_0 不是(3)的最优解，根据定理 3.2，有 $0 \notin f(x_0) + \partial F(x_0) - \Gamma^+(x_0)$，于是存在向量 $v_0 \in \partial F(x_0)$，$w_0 \in \Gamma^+(x_0)$，使得 $d(x_0) = \min_{v\in\partial F(x_0), w\in\Gamma^+(x_0)}\|f(x_0) + v - w\| = \|f(x_0) + v_0 - w_0\| > 0$。

定义 3.1 设 $x_0 \in K$ 不是(3)的最优解，若存在单位向量 $g_0 \in \Gamma(x_0)$，使得

$$P'(x_0; g_0) + F'(x_0; g_0) = \min_{g\in\Gamma(x_0),\|g\|=1}\left\{P'(x_0; g) + F'(x_0; g)\right\}$$

则称 g_0 是(3)在 x_0 处的最速下降方向。

定理 3.3 设 $x_0 \in K$ 不是(3)的最优解，向量 $v_0 \in \partial F(x_0), w_0 \in \Gamma^+(x_0)$ 满足条件

$$d(x_0) = \min_{v\in\partial F(x_0), w\in\Gamma^+(x_0)}\|f(x_0) + v - w\| = \|f(x_0) + v_0 - w_0\| > 0$$

则 $g_0 = -\dfrac{f(x_0)+v_0-w_0}{\|f(x_0)+v_0-w_0\|}$ 是(3)在 x_0 处的最速下降方向，且

$$-d(x_0)=\langle f(x_0),g_0\rangle+F'(x_0;g_0)$$

证：设 $B=f(x_0)+\partial F(x_0),\Gamma=\Gamma(x_0),C=B-\Gamma^+$，根据引理 3.2，有

$$\min_{g\in\Gamma(x_0),\|g\|=1}\{\langle f(x_0),g\rangle+F'(x_0;g)\}=\min_{g\in\Gamma,\|g\|=1}\max_{f(x_0)+v\in B}\langle f(x_0)+v,g\rangle=\psi=\varphi$$

由于 x_0 不是最优解，则 $d=d(x_0)>0$。

根据推论 3.1 有 $\varphi=\sup\limits_{f(x_0)+v\in C}\langle f(x_0)+v,g_0\rangle=-d<+\infty$。

根据推论 3.3 有 $g_0\in\Gamma=\Gamma(x_0)$，且

$$\sup_{f(x_0)+v\in C}\langle f(x_0)+v,g_0\rangle=\max_{f(x_0)+v\in B}\langle f(x_0)+v,g_0\rangle=\langle f(x_0),g_0\rangle+\max_{v\in\partial F(x_0)}\langle v,g_0\rangle=\langle f(x_0),g_0\rangle+F'(x_0;g_0)。$$

因此 $\langle f(x_0),g_0\rangle+F'(x_0;g_0)=\sup\limits_{f(x_0)+v\in C}\langle f(x_0)+v,g_0\rangle=\varphi=\min\limits_{g\in\Gamma(x_0),\|g\|=1}\{\langle f(x_0),g\rangle+F'(x_0;g)\}$，即 g_0 是(3)的最速下降方向。□

4. 算法及收敛性

算法

Step1 取初始点 $x_0\in K,k=0$，选取数列 $\{\lambda_k\}$ 满足 $\lambda_k>0,\lambda_k\to 0,k\to\infty,\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k=+\infty$；

Step2 若 $0\in f(x_k)+\partial F(x_k)-\Gamma^+(x_k)$，则停止；否则，转 Step3；

Step3 计算向量 $v_k\in\partial F(x_k),w_k\in\Gamma^+(x_k)$，满足

$$d(x_k)=\min_{v\in\partial F(x_k),w\in\Gamma^+(x_k)}\|f(x_k)+v-w\|=\|f(x_k)+v_k-w_k\|>0$$

并且计算 $g_k=-\dfrac{f(x_k)+v_k-w_k}{\|f(x_k)+v_k-w_k\|}$；

Step4 令 $x_{k+1}=x_k-\lambda_k g_k$，$k=k+1$，转 Step2。

引理 4.1 $\partial F-\Gamma^+$ 是单调映射。

定理 4.1 设 f 是单调映射，$\{x_k\}$ 是由算法 4.1 产生的点列，若 x_k 不是凸规划问题的解，则对任意(3)的解 x^*，且 $g_k\in f(x_k)+\partial F(x_k)-\Gamma^+(x_k)$，必存在常数 $T_k>0$，使得 $\|x_{k+1}-x^*\|\le\|x_k-x^*\|,\forall\lambda\in(0,T_k)$；且若凸规划问题有最优解，则 $\{x_k\}$ 的任一极限点都是凸规划问题的解；若还有扰动泛函 F 是严格凸函数，则混合变分不等式有唯一的最优解。

证：注意到 $g_k\in f(x_k)+\partial F(x_k)-\Gamma^+(x_k),0\in f(x^*)+\partial F(x^*)-\Gamma^+(x^*)$，且由 $\partial F-\Gamma^+$ 的单调性可知

$$\langle g_k-f(x_k)+f(x^*),x_k-x^*\rangle\ge 0$$

即

$$\langle g_k,x_k-x^*\rangle\ge\langle f(x_k)-f(x^*),x_k-x^*\rangle\ge 0$$

直接计算

$$\|x_{k+1}-x^*\|^2=\|x_k-\lambda_k g_k-x^*\|^2=\|x_k-x^*\|^2+\lambda_k^2-2\lambda_k\langle g_k,x_k-x^*\rangle。$$

若取 $\lambda_k \le 2\left\langle g_k, x_k - x^* \right\rangle$，则有 $\left\| x_{k+1} - x^* \right\| \le \left\| x_k - x^* \right\|$。

令 $T_k = 2\left\langle g_k, x_k - x^* \right\rangle$，则 $T_k > 0$，且 $\left\| x_{k+1} - x^* \right\| \le \left\| x_k - x^* \right\|$，从而序列 $\left\{ x_k \right\}$ 有界，则必存在聚点，下证 $\left\{ x_k \right\}$ 的任一聚点都是凸规划问题(3)的解。

设 $\left\{ x_{k_i} \right\}$ 是 $\left\{ x_k \right\}$ 的任一收敛子列，且 $\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i} = x^*$，从而有

$$0 \in f\left(x_{k_i}\right) + \partial F\left(x_{k_i}\right) - \Gamma^+\left(x_{k_i}\right)$$

于是 $0 \in f\left(x^*\right) + \partial F\left(x^*\right) - \Gamma^+\left(x^*\right)$。

即 x^* 是凸规划问题(3)的最优解。当扰动泛函 F 为严格凸函数时，凸规划问题有唯一解，从而混合变分不等式只有唯一解。□

5. 结论

本文通过将混合变分不等式问题转化为凸规划问题，在扰动泛函 F 非光滑的情况下，给出了混合变分不等式的最优性条件，设计了次梯度算法并证明了该算法的收敛性。从算法步骤可以看出，次梯度算法迭代简单，比较容易实现，在每一迭代点处只要能够计算到目标函数次微分中一个元素就可以。另一方面，次梯度法不需要线搜索，步长 λ_k 事先给出，只要满足条件

$$\lambda_k > 0, \lambda_k \to 0, k \to \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty$$

即可。在这里，条件 $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty$ 是要使点列 $\left\{ x^k \right\}$ 全局收敛所必须的。但是作为最早提出的非光滑优化算法，次梯度法有许多不足之处，一是收敛速度慢；二是次梯度法甚至不是下降方向。所以是否可以在迭代过程中通过预测－校正的思想进行调整，从而加快迭代速度也有待深入探索。最后，作者对审稿人提出的修改意见表示感谢。

参考文献 (References)

[1] P. T. Harker, J. S. Pang. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms and applications. Mathematica Programming, 1900, 48(2): 161-220.

[2] F. Facchinei, J. S. Pang. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. New York: Springer-Verlag, 2003.

[3] W. Han, B. Reddy. On the finite element method for mixed variational inequalities arising in elastoplasticity. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1995, 32(6): 1778-1807.

[4] 殷洪友, 徐成贤, 张忠秀. *F*-互补问题及其与极小元问题的等价性[J]. 数学学报, 2001, 4: 679-686.

[5] 何诣然. 一个关于混合变分不等式问题的投影算法[J]. 数学物理学报, 2007, 27A(2): 215-220.

[6] 唐国吉, 黄南京. 非 Lipschitz 集值混合变分不等式的一个投影次梯度法法[J]. 应用数学和力学, 2011, 32(10): 1254-1263.

[7] 李娟. *F*-互补问题的算法设计[D]. 南京航空航天大学, 2010.

[8] 韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2006.

[9] 高岩. 非光滑优化[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

