Operations Research and Fuzziolgy 运筹与模糊学, 2013, 3, 40-44
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2013.34007 Published Online November 2013 (http://www.hanspub.org/journal/orf.html)

Generated (λ,μ)-Fuzzy Subgroups

Xiaoling Wang

Department of Mathematics, Teachers College, Eastern Liaoning University, Dandong, China
Email: wangxiaoling777@163.com

Received: Jul. 14th, 2013; revised: Oct. 15th, 2013; accepted: Oct. 20th, 2013

Abstract: Based on the concept of (λ,μ)-fuzzy subgroup, the concepts of (λ,μ)-fuzzy subgroup and (λ,μ)-fuzzy normal subgroup generated by a fuzzy subset in a group were introduced and their constructions were established. Then some properties of generated (λ,μ)-fuzzy subgroup and fuzzy normal subgroup were discussed.

Keywords: (λ,μ)-Fuzzy Subgroup; (λ,μ)-Fuzzy Normal Subgroup; Subsemigroup; Subgroup

生成(λ,μ)-模糊子群

王晓玲

辽东学院师范学院数学系，丹东
Email: wangxiaoling777@163.com

收稿日期：2013 年 7 月 14 日；修回日期：2013 年 10 月 15 日；录用日期：2013 年 10 月 20 日

摘　要：在(λ,μ)-模糊子群概念的基础上，引入生成(λ,μ)-模糊子群与生成(λ,μ)-模糊正规子群概念，给出了这种生成模糊子群与模糊正规子群的构造，并讨论了他们的一些性质。

关键词：(λ,μ)-模糊子群；(λ,μ)-模糊正规子群；子半群；子群

1. 引言

由 Zadeh[1]在 1965 年创立的模糊集理论，已经在各个领域得到了广泛应用，如决策理论、风险投资理论、拓扑学、控制论等。1971 年，Rosenfeld[2] 将模糊集理论应用到代数学，开始了模糊代数的研究，并首次引入了模糊群的概念。从此，模糊集理论被广泛地应用到代数学的各个分支。如 Liu[3]通过引入模糊子环与模糊理想概念，建立了环的模糊理论。随着模糊代数的深入研究，各种模糊代数概念，都从不同的侧面得到了推广。特别值得指出的是，Bhakat 与 Das[4,5] 通过利用模糊点与模糊子集的“属于或拟重于”关系，给出了$(\in,\in\vee q)$-模糊子群和$(\in,\in\vee q)$-模糊理想概念。为了进一步推广这些概念，Yuan[6]给出了基于阈值的模糊子群，即(λ,μ)-模糊子群[7]。本文就是将 Rosenfeld 意义下的生成模糊子群概念，推广到(λ,μ)-模糊子群的情形，并进一步研究这种生成模糊子群的构造和性质。

在下面的讨论中，G总表示一个群，$F(G)$表示G的所有模糊子集的集合。λ与μ是两个常数，且满足

$0\le\lambda<\mu\le 1$。

2. 预备知识

定义 2.1：设 A 为群 G 的模糊子集. 若对任意的 $x,y\in G$, $A(xy)\ge A(x)\wedge A(y)$，则称 A 为群 G 的模糊子半群. 若 G 的模糊子半群 A 还满足：对任意的 $x\in G, A(x^{-1})\ge A(x)$，则称 A 为群 G 的模糊子群。

设 A 与 B 为 G 的模糊子集，我们定义模糊子集 AB 与 $A^{(-1)}$ 分别为[8]：

$$AB(x)=\sup\left\{A(x_1)\wedge B(x_2)\middle| x=x_1x_2\right\},\ A^{(-1)}(x)=A(x^{-1}),\ \forall x\in G.$$

显然，对于 G 的模糊子集 A 及任意的正整数 n，我们有

$$A^n(x)=\sup\left\{A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\cdots\wedge A(x_n)\middle| x=x_1x_2\cdots x_n\right\},\ \forall x\in G.$$

定理 2.1[8]:设 A 为 G 的模糊子集，则

1) A 为 G 的模糊子半群的充分必要条件为：$A^2\subseteq A$；

2) A 为 G 的模糊子群的充分必要条件为：$A^2\subseteq A$，$A^{(-1)}\subseteq A$。

设 A 为群 G 的模糊子集, 那么 A 为 G 的模糊子群(Rosenfeld 意义下)，当且仅当 $\forall\alpha\in(0,1]$，A_α 非空时是 G 的子群；而 A 为 G 的 $(\in,\in\vee q)$-模糊子群，当且仅当 $\forall\alpha\in(0,0.5]$，A_α 非空时是 G 的子群。自然会想，当 α 属于 $[0,1]$ 的任意一个子区间 $(\lambda,\mu]$ 时，会对应一个什么样的模糊子群。

定义 2.2：设 A 为 G 的模糊子集。若对任意的 $x,y\in G$，$A(xy)\vee\lambda\ge(A(x)\wedge A(y))\wedge\mu$，则称 A 为 G 的一个 (λ,μ)-模糊子半群。

定义 2.3：设 A 为 G 的 $(\lambda,\mu)-$ 模糊子半群。若对任意的 $x\in G$，$A(x^{-1})\vee\lambda\ge A(x)\wedge\mu$，则称 A 为 G 的一个 (λ,μ)-模糊子群。

显然，G 的一个模糊子集 A 为 G 的 (λ,μ)-模糊子群的充分必要条件是：对任意的 $x,y\in G$，

1) $A(xy)\vee\lambda\ge(A(x)\wedge A(y))\wedge\mu$，

2) $A(x^{-1})\vee\lambda\ge A(x)\wedge\mu$。

该条件也可等价地表述为：G 的一个模糊子集 A 为 G 的 (λ,μ)-模糊子群的充分必要条件是：对任意的 $x,y\in G$，$A(x^{-1}y)\vee\lambda\ge(A(x)\wedge A(y))\wedge\mu$。

定义 2.4：设 A 为 G 的模糊子集，如果对任意的 $x,y\in G$，$A(xyx^{-1})\vee\lambda\ge A(y)\wedge\mu$，则称 A 为 G 的 (λ,μ)-模糊正规子集。当 $A(xyx^{-1})\ge A(y)$ 时，则称 A 为 G 的模糊正规子集。

定义 2.5：若 A 既是 G 的 (λ,μ)-模糊子群，也是 G 的 (λ,μ)-模糊正规子集，则称 A 为 G 的 (λ,μ)-模糊正规子群。

易知，G 的模糊子集 A 为 G 的 (λ,μ)-模糊正规子群的充分必要条件是：对任意的 $x,y\in G$，

1) $A(x^{-1}y)\vee\lambda\ge(A(x)\wedge A(y))\wedge\mu$，

2) $A(xyx^{-1})\vee\lambda\ge A(y)\wedge\mu$。

3. 生成(λ,μ)-模糊子群

对于 G 的模糊子集 A 及数 $a\in[0,1]$，我们定义模糊子集 $A\bigcup\alpha$ 与 $A\bigcap\alpha$ 分别为：

$$(A\cup\alpha)(x)=A(x)\vee\alpha,\ (A\cap\alpha)(x)=A(x)\wedge\alpha,\ \forall x\in G.$$

定理 3.1：设 $A\in F(G)$，$B=\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A^n\right)\cup\lambda\right)\cap\mu$。则

1) $B\supseteq(A\cup\lambda)\cap\mu$，

2) B 是 G 的模糊子半群，从而是 G 的 (λ,μ)-模糊子半群，

3) $\forall x\in G$， $B(x)=\left(\sup\left\{A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\cdots\wedge A(x_n)\middle| x=x_1x_2\cdots x_n, n\in\mathbb{N}\right\}\vee\lambda\right)\wedge\mu.$

4) 若C是G的(λ,μ)-模糊子半群，且满足$C\cup\lambda\supseteq A\cap\mu$，则$C\cup\lambda\supseteq B$。

证：1) 由于$\bigcup_{n=1}^{\infty}A^n\supseteq A$，所以$\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A^n\right)\cup\lambda\right)\cap\mu\supseteq(A\cup\lambda)\cap\mu$。即$B\supseteq(A\cup\lambda)\cap\mu$。

2) 显然$B^2=\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A^n\right)\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A^n\right)\cup\lambda\right)\cap\mu=\left(\left(\bigcup_{n=2}^{\infty}A^n\right)\cup\lambda\right)\cap\mu\subseteq B$。因此，$B$是$G$的模糊子半群，当然也是$G$的$(\lambda,\mu)$-模糊子半群。

3) 对任意的$x\in G$，由于$A^n(x)=\sup\left\{A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\cdots\wedge A(x_n)\middle| x=x_1x_2\cdots x_n\right\}$，所以

$$\begin{aligned}B(x)&=\left(\sup\left\{\sup\left\{A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\cdots\wedge A(x_n)\middle| x=x_1x_2\cdots x_n\right\}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}\vee\lambda\right)\wedge\mu\\&=\left(\sup\left\{A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\cdots\wedge A(x_n)\middle| x=x_1x_2\cdots x_n, n\in\mathbb{N}\right\}\vee\lambda\right)\wedge\mu\end{aligned}$$

4) 对任意的$x\in G$，若有$x_1,x_2,\cdots,x_n\in G$，使$x=x_1x_2\cdots x_n$，则

$$\begin{aligned}(C\cup\lambda)(x)&=C(x)\vee\lambda=\left(C(x_1x_2\cdots x_n)\vee\lambda\right)\vee\lambda\\&\geq\left(\left(C(x_1)\wedge C(x_2)\wedge\cdots\wedge C(x_n)\right)\vee\lambda\right)\wedge\mu.\\&\geq\left(\left(A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\cdots\wedge A(x_n)\right)\vee\lambda\right)\wedge\mu\end{aligned}$$

所以$(C\cup\lambda)(x)\geq\left(\sup\left\{A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\cdots\wedge A(x_n)\middle| x=x_1x_2\cdots x_n\right\}\vee\lambda\right)\wedge\mu=B(x)$。因此，$C\cup\lambda\supseteq B$。

定义 3.1：设$A\in F(G)$，称定理3.1中的模糊子集B为由A生成的(λ,μ)-模糊子半群，并记为(A)。

定理 3.2：设$A\in F(G)$，$B=\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A\cup A^{(-1)}\right)^n\right)\cup\lambda\right)\cap\mu$。则

1) $B\supseteq(A\cup\lambda)\cap\mu$，

2) B是G的模糊子群，从而是G的(λ,μ)-模糊子群,

3) $\forall x\in G$，

$$B(x)=\left(\sup\left\{\left(A(x_1)\vee A(x_1^{-1})\right)\wedge\left(A(x_2)\vee A(x_2^{-1})\right)\wedge\cdots\wedge\left(A(x_n)\vee A(x_n^{-1})\right)\middle| x=x_1x_2\cdots x_n, n\in\mathbb{N}\right\}\wedge\lambda\right)\vee\mu$$

4) 若C是G的(λ,μ)-模糊子群，且满足$C\cup\lambda\supseteq A\cap\mu$，则$C\cup\lambda\supseteq B$。

证：仅证2)与4)。

2) 由于$B^{(-1)}=\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left(A\cup A^{(-1)}\right)^{(-1)}\right)^n\right)\cup\lambda\right)\cap\mu=\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A\cup A^{(-1)}\right)^n\right)\cup\lambda\right)\cap\mu=B,$

$$B^2=\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A\cup A^{(-1)}\right)^n\right)\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A\cup A^{(-1)}\right)^n\right)\cup\lambda\right)\cap\mu=\left(\left(\bigcup_{n=2}^{\infty}\left(A\cup A^{(-1)}\right)^n\right)\cup\lambda\right)\cap\mu\subseteq B$$

所以B是G的模糊子群，从而是G的(λ,μ)-模糊子群。

4) 对任意的$x\in G$，若有$x_1,x_2,\cdots,x_n\in G$，使$x=x_1x_2\cdots x_n$，则

$$\begin{aligned}(C\cup\lambda)(x)&=C(x)\vee\lambda=\left(C(x_1x_2\cdots x_n)\vee\lambda\right)\vee\lambda\\&\geq\left(\left(C(x_1)\wedge C(x_2)\wedge\cdots\wedge C(x_n)\right)\vee\lambda\right)\wedge\mu\geq\left(\left(A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\cdots\wedge A(x_n)\right)\vee\lambda\right)\wedge\mu.\end{aligned}$$

$$\text{而}\quad \begin{aligned} &C(x)\vee\lambda\ge\left(C\left(x^{-1}\right)\vee\lambda\right)\wedge\mu \\ &\ge\left(\left(C\left(x_1^{-1}\right)\wedge C\left(x_2^{-1}\right)\wedge\cdots\wedge C\left(x_n^{-1}\right)\right)\vee\lambda\right)\wedge\mu\ge\left(A\left(x_1^{-1}\right)\wedge A\left(x_2^{-1}\right)\wedge\cdots\wedge A\left(x_n^{-1}\right)\right)\vee\lambda\wedge\mu \end{aligned}$$

所以，

$$(C\cup\lambda)(x)\ge\left(\sup\left\{\left(A(x_1)\vee A\left(x_1^{-1}\right)\right)\wedge\left(A(x_2)\vee A\left(x_2^{-1}\right)\right)\wedge\cdots\wedge\left(A(x_n)\vee A\left(x_n^{-1}\right)\right)\middle| x=x_1x_2\cdots x_n,n\in\mathbb{N}\right\}\vee\lambda\right)\wedge\mu=B(x).$$

因此，$C\cup\lambda\supseteq B$。

定义 3.2：设$A\in F(G)$，称定理3.2中的模糊子集B为由A生成的(λ,μ)-模糊子群，并记为$\langle A\rangle$。

由此定理3.2及定义3.2可知，Rosenfeld意义下的生成模糊子群就是生成$(0,1)$-模糊子群，因此，生成(λ,μ)-模糊子群是一般生成模糊子群的推广。

由定理3.2立即可得下列推论。

推论 3.1 设$A\in F(G)$，则

1) $\langle A\rangle=\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A\cup A^{(-1)}\right)^n\right)\cup\lambda\right)\cap\mu$，

2) $$\begin{aligned}\langle A\rangle(x)=&\left(\sup\left\{\left(A(x_1)\vee A\left(x_1^{-1}\right)\right)\wedge\left(A(x_2)\vee A\left(x_2^{-1}\right)\right)\right.\right.\\ &\left.\left.\wedge\cdots\wedge\left(A(x_n)\vee A\left(x_n^{-1}\right)\right)\middle| x=x_1x_2\cdots x_n,n\in\mathbb{N}\right\}\vee\lambda\right)\wedge\mu\quad\forall x\in G\end{aligned}$$

定理 3.3：设$A\in F(G)$。对任意的$x\in G$，令$B(x)=\sup\left\{A\left(yxy^{-1}\right)\middle| y\in G\right\}$，则$B$是$G$的模糊正规子集。

证：$\forall x_1,x_2\in G$，

$$\begin{aligned}B\left(x_1x_2x_1^{-1}\right)&=\sup\left\{A\left(yx_1x_2x_1^{-1}y^{-1}\right)\middle| y\in G\right\}\\&=\sup\left\{A\left((yx_1)x_2(yx_1)^{-1}\right)\middle| y\in G\right\}=B(x_2).\end{aligned}$$

即B是G的模糊正规子集.

定理 3.4：设$A\in F(G)$，$B(x)=\sup\left\{A\left(yxy^{-1}\right)\middle| y\in G\right\}$，则

1) $\langle B\rangle$是G的模糊正规子群，从而是G的(λ,μ)-模糊正规子群，

2) $\langle B\rangle\supseteq(A\cup\lambda)\cap\mu$

3）若C是G的(λ,μ)-模糊正规子群，且满足$C\cup\lambda\supseteq A\cap\mu$，则$C\cup\lambda\supseteq\langle B\rangle$。

证 1) $\forall x,y\in G$，由于
$$\begin{aligned}B\left(yxy^{-1}\right)&=\sup\left\{A\left(z\left(yxy^{-1}\right)z^{-1}\right)\middle| z\in G\right\}=\sup\left\{A\left((yz)x\left(zy^{-1}\right)\right)\middle| z\in G\right\}\\&=\sup\left\{A\left(gxg^{-1}\right)\middle| g\in G\right\}=B(x),\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}\langle B\rangle\left(xyx^{-1}\right)&=\left(\sup\left\{\inf_{1\le i\le n}\left[B\left(xy_ix^{-1}\right)\vee B\left(xy_i^{-1}x^{-1}\right)\right]\middle| y=y_1y_2\cdots y_n,n\in\mathbb{N}\right\}\vee\lambda\right)\wedge\mu\\&=\left(\sup\left\{\inf_{1\le i\le n}\left[B(y_i)\vee B\left(y_i^{-1}\right)\right]\middle| y=y_1y_2\cdots y_n,n\in\mathbb{N}\right\}\vee\lambda\right)\wedge\mu=\langle B\rangle(y).\end{aligned}$$

又因为$\langle B\rangle$是G的模糊子群，所以$\langle B\rangle$是G的模糊正规子群，从而是G的(λ,μ)-模糊正规子群。

2) 显然$B\supseteq A$。故$\langle B\rangle\supseteq(B\cup\lambda)\cap\mu\supseteq(A\cup\lambda)\cap\mu$。

3）对任意的$x\in G$, 若有$x_1,x_2,\cdots,x_n\in G$，使$x=x_1x_2\cdots x_n$，则对任意的$y\in G$，有

$$C(x)\vee\lambda=C\left(y^{-1}\left(yxy^{-1}\right)y\right)\vee\lambda=C\left(y^{-1}\left(yx_1y^{-1}\cdot yx_2y^{-1}\cdots yx_ny^{-1}\right)y\right)\vee\lambda\geq\left(C\left(yx_1y^{-1}\cdot yx_2y^{-1}\cdots yx_ny^{-1}\right)\vee\lambda\right)\wedge\mu$$

$$\geq\left(C\left(yx_1y^{-1}\right)\wedge C\left(yx_2y^{-1}\right)\wedge\cdots\wedge C\left(yx_ny^{-1}\right)\vee\lambda\right)\wedge\mu\geq A\left(yx_1y^{-1}\right)\wedge A\left(yx_2y^{-1}\right)\wedge\cdots\wedge A\left(yx_ny^{-1}\right)\wedge\mu$$

所以

$$\begin{aligned}C(x)\vee\lambda&\geq\left(\sup\left\{A\left(yx_1y^{-1}\right)\wedge A\left(yx_2y^{-1}\right)\wedge\cdots\wedge A\left(yx_ny^{-1}\right)\middle|\,y\in G,x=x_1x_2\cdots x_n,n\in\mathbb{N}\right\}\vee\lambda\right)\wedge\mu\\&=\left(\sup\left\{B(x_1)\wedge B(x_2)\wedge\cdots\wedge B(x_n)\middle|\,x=x_1x_2\cdots x_n,n\in\mathbb{N}\right\}\vee\lambda\right)\wedge\mu\\&=\langle B\rangle(x)\end{aligned}$$

即$C\cup\lambda\supseteq\langle B\rangle$。

定义 3.3：设$A\in F(G)$，称定理 3. 4 中的模糊子集$\langle B\rangle$为由A生成的(λ,μ)-模糊正规子群，并记为$[A]$。

显然，生成(λ,μ)-模糊正规子群概念是一般生成模糊正规子群概念的推广，因为一般生成模糊正规子群就是生成$(0,1)$-模糊正规子群。

4. 结论

对于由一个模糊子集生成的模糊子群或模糊正规子群，在 Rosenfeld 意义下已有结论[8]，并且可用不同的式子刻画。本文将这种模糊子群推广到(λ,μ)-模糊子群，给出了生成(λ,μ)-模糊子群与生成(λ,μ)-模糊正规子群的特征刻画。关于生成(λ,μ)-模糊子群与生成(λ,μ)-模糊正规子群的进一步研究，我们将另文讨论。

参考文献 (References)

[1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets. *Information and Control*, **8**, 338-353.
[2] Rosenfeld, A. (1971) Fuzzy groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **35**, 512-517.
[3] Liu, W. (1992) Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals. *Fuzzy Sets and Systems*, **18**, 133-139.
[4] Bhakat, S.K. and Das, P. (1992) On the definition of a fuzzy subgroup. *Fuzzy Sets and Systems*, **51**, 235-241.
[5] Bhakat, S.K. and Das, P. (1996) (∈,∈∨q)-fuzzy subgroup. *Fuzzy Sets and Systems*, **80**, 359-368.
[6] Yuan, X. Zhang, C. and Ren, Y. (2003) Generalized fuzzy groups and many-valued implications. *Fuzzy Sets and Systems*, **138**, 205-211.
[7] Yao, B. (2005) (λ,μ)-fuzzy normal subgroups and (λ,μ)-fuzzy quotient subgroups. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **13**, 695-705.
[8] 姚炳学 (2008) 群与环上的模糊理论. 科学出版社, 北京, 41-44.