Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2018, 8(2), 39-44
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2018.82005

On-Line 4-Choosable Planar Graphs

Huihui Yan

Department of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: yanhuihuiedu@163.com

Received: Mar. 27th, 2018; accepted: Apr. 11th, 2018; published: Apr. 20th, 2018

Abstract

On-line list coloring of a graph (is also called Painting Game) is an online version of list coloring. The on-line list coloring game on planar graph G is played by two players: Lister and Painter. We say G is on-line f-choosable if Painter has a winning strategy in this game. The on-line list coloring number of G is denoted by $\chi_p(G)$; it is the minimum positive integer k such that G is on-line k-choosable. This paper proves that the planar graphs containing no cycles of certain lengths k are on-line 4-choosable (or called 4-paintable) by using Alon-Tarsi Theorem, where $k = 3, 4, 5$ or 6.

Keywords

Planar Graph, Alon-Tarsi Theorem, Cycle, On-Line List Coloring

平面图的在线4列表染色

颜慧慧

浙江师范大学数理与信息工程学院，浙江 金华
Email: yanhuihuiedu@163.com

收稿日期：2018年3月27日；录用日期：2018年4月11日；发布日期：2018年4月20日

摘 要

图的在线列表染色(也叫Painting博弈)是图的列表染色的在线版本，近年来得到广泛的研究。平面图G上的f列表染色游戏有两位玩家：Lister和Painter。如果Painter在图G上的f列表染色游戏中有一个赢的策略，我们说图G是在线f-可选的。如果图G是在线f可选的且$f = 4$，则称图G是在线4-可选的。图G的在线选择数用$\chi_p(G)$表示，是最小的正整数k使得图G是在线k-可选的。本文结合Alon-Tarsi定理证明了当$k = 3, 4, 5$或6时，不含k圈的平面图是在线4-可选的(或叫4-可涂的)。

文章引用: 颜慧慧. 平面图的在线 4 列表染色[J]. 运筹与模糊学, 2018, 8(2): 39-44.
DOI: 10.12677/orf.2018.82005

关键词

平面图，Alon-Tarsi定理，圈，在线列表染色

1. 引言

图的染色是图论研究领域中相当活跃的一部分，也是非常重要的研究课题，其研究的问题来源于著名的四色猜想。如今，图的经典染色这一概念已经向很多方面进行推广和延伸，平面图的列表染色问题便是其中之一。1976 年，Vizing [1]提出了图的列表染色的概念，1979 年由 Erdős [2]等人推广了列表染色定义，后被广泛研究。

令 N 表示正整数集合。设图 G 的一个映射 $f:V(G)\to N$。G 的 f-列表配置是给图 G 的点集合的列表配置 L，每个点 v 有一个颜色集合 $L(v)$，集合 $L(v)$ 有 $f(v)$ 个颜色。对于 G 的列表配置 L，我们说 G 是 L-可染的如果存在 G 的一个真染色 ϕ 使得对于任意一个顶点 v，都有 $\phi(v)\in L(v)$。图 G 的染色数用 $\chi(G)$ 表示，是指最小的正整数 k 使得图 G 是 k-可染的。如果对于 G 的任意一个 f-列表配置 L，图 G 是 L 可染的，则称图 G 是 f-可选的。如果图 G 是 f-可选的，当 f 是一个常数函数即 $f\equiv k$ 时，我们就说 G 是 k-可选。图 G 的选择数用 $\chi_l(G)$ 表示，是指最小的正整数 k 使得图 G 是 k-可选的。

关于平面图的可选性问题，1979 年 Erdős [2]等人全面分析了 2-可选图。1994 年，Thomassen [3]证明了每一个平面图都是 5-可选的。对于一个给定的图能否判断出是 3-可选或 4-可选的还未解决。1996 年，Gutner [4]证明了这些问题是 NP-困难的。

Schauz [5]于 2009 年在图的列表染色基础上，介绍了一种新型动态列表染色方法——图的在线列表染色。定义如下。

定义 1： 设图 G 的一个映射 $f:V(G)\to N$。图 G 上的 f 列表染色游戏定义如下：该游戏有两位玩家：Lister 和 Painter。起初，图 G 中所有点均未被染色，且任意顶点 v 有 $f(v)$ 个筹码。在任意一个回合，Lister 选择图 G 中未染色顶点集的一个非空子集 M，M 中每一个顶点减少一个筹码。Painter 选择 M 中一个独立集 I 且 I 中的顶点被染色。若某一回合后，存在一个点 v 未被染色且没有筹码了，则 Lister 赢得比赛。若某一回合后，所有点均被染色了，则 Painter 赢得比赛。

定义 2： 设映射 $f:V(G)\to N$。如果 Painter 在图 G 上的 f 列表染色游戏中有一个赢的策略，我们称图 G 是在线 f 可选的。如果图 G 是在线 f 可选的且常数函数 $f=k$ (k 是常数)，则称图 G 是在线 k-可选的。图 G 的在线选择数用 $\chi_p(G)$ 表示，是指最小的正整数 k 使得 G 是在线 k-可选的。

由列表染色的定义和在线列表染色的定义易知，若平面图 G 是在线 f-可选的，则图 G 是 f-可选的，因此有 $\chi(G)\le\chi_p(G)$。在另一方面，$\chi_p(G)-\chi(G)$ 这一差值也可以任意大。

关于平面图的在线可选性问题，2012 年，Chang 和 Zhu [6]证明了若 G 是不含 3 圈的平面图，且没有 4 圈与 4 圈或 4 圈与 5 圈相邻，则图是 G 在线 3-可选的。2015 年，Han 和 Zhu [7]证明了局部平面图是在线 5-可选的。

本文，我们研究的图均为有限，简单(无环，无重边)图。设 G 是一个平面图，$V(G)$ 是图 G 的顶点集，$E(G)$ 是图 G 的边集，$|E(G)|$ 表示边集的大小。$d_G(x)$ 表示顶点 x 在图中 G 的度。令 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别图 G 的最大度和最小度，$\Delta^+(G)$ 表示图 G 的最大出度。对于 $S\subseteq V(G)$，我们令 $G[S]$ 表示由 S 诱导的子图。图 G 是 d-

退化的若图 G 的每一个子图 H 有一个顶点的度在图 H 中至多为 d。易知每一个 d-退化的图是 $(d+1)$-可选的。

2. 不含 3, 5 或 6 圈的平面图

使用欧拉公式可知，不含 3 圈的平面图是 3-退化的。2002 年 Wang 和 Lih [8] [9]证明了不含 5 圈的平面图是 3-退化的。同年，Juvan 和 Mohar [9]证明了不含 6 圈的平面图是 3-退化的。于是我们有了下面的定理 3。

定理 3：[8] [9]令 k 是一个整数，其中 $k=3,5$ 或 6。若平面图 G 不含 k 圈，则图 G 是 3-退化的。

下面我们将给出本节要证的主要结论，即下述定理 4。

定理 4：令 k 是一个整数，其中 $k=3,5$ 或 6。若平面图 G 不含 k 圈，则图 G 是在线 4-可选的。

为证明定理 4，需要下述几个引理的支持。引理 5 是证明在线列表染色问题中一个非常有用的命题，[10]中的推论 8 是比引理 5 更强的结论且已被证明。这里我们重新说明一下引理 5 的证明，后面我们将利用引理 5 证明引理 6。

引理 5：设 A 是一个集合，其中 $A=\{x \mid f(x)>\deg_G(x)\}$。若 $G-A$ 是在线 f 可选的，则图 G 是在线 f-可选的。

证明：因为 $G-A$ 是在线 f-可选的，所以 Painter 在 $G-A$ 上有一个赢的策略。

首先，Lister 选择 $V(G)$ 的任意一个顶点子集 X，然后 Painter 按照赢的策略先将 $(G-A)\cap X$ 中的顶点染好颜色。接下来 Painter 染 $A\cap X$ 中的顶点。对于 $A\cap X$ 中的顶点，Painter 需要一个一个的查看，查看 $A\cap X$ 中的顶点有没有邻点被染色的。若 $A\cap X$ 中的顶点的邻点未被染色，则将该点染色；若 $A\cap X$ 中的顶点的邻点被染色，则该顶点不染色且失去一个筹码。也就是说，若存在某个顶点 u，$u\in A\cap X$，顶点 u 的筹码数减少 1，但顶点 u 未被染色，则说明 u 的邻点被染色了。当 u 的邻点都已染好时，因为 $f(u)>d_G(u)$，所以在剩余的图中，顶点 u 的筹码数总是大于 0 的，即游戏这样进行下去，$A\cap X$ 中的点都会被染色。所以 Painter 在图 G 有一个赢的策略，即图 G 是在线 f-可选的。 □

引理 6：若平面图 G 是 3-退化的，则图 G 是在线 4-可选的。

证明：对图 G 的点数作归纳法。设 v 是图 G 中一个度数小于等于 3 的顶点，即 $d_G(v)\le 3$，由归纳法假设可知，$G-v$ 是 3-退化的，则 $G-v$ 是在线 4-可选的。设集合 $A=\{v\}$，因此由引理 5 可知，图 G 是在线 4-可选的。 □

由定理 3 和引理 6 易知，定理 4 成立。

3. 不含 4 圈的平面图

Lam，Xu 和 Liu 在[11]证明了不含 4 圈的平面图是 4-可选的，即下述定理 7。

定理 7：[11]不含 4 圈的平面图是 4-可选的。

[11]中令 F_5^3 表示一个特殊的不含 4 圈的平面图，即 F_5^3 是由一个 5 面和一个外部相邻三角形组成的。令 H 是图 G 的一个子图，若 H 同构于 F_5^3 且对于任意 $v\in V(H)$ 都有 $d_G(v)=4$，则 H 叫做 F_5^3-子图。

引理 8: [11]设图 G 是不含 4 面且不含相邻三角形的平面图。若 $\delta(G)=4$，则图 G 包含一个 F_5^3-子图。

易知，若一个图不含 4 圈，则该图不含 4 面且不含有相邻三角形。本节我们主要证明下述定理 9。

定理 9：若平面图 G 不含 4 圈，则图 G 是在线 4-可选的。

显然定理 9 是定理 7 的在线版本，是比定理 7 更强的结论。对于定理 9 的证明，我们采用 Alon 和 Tarsi [12]的方法，找到图 G 的一个好的定向。在证明主要结论之前，我们先给出一些已知定义及结论，以便我们的证明。

3.1. 已有结论简介

假设 D 是图 G 的定向图，用 $E(D)$ 表示在 D 中已定向的边或弧的集合。若 $(x,y)\in E(D)$，则 x 是 y 的入邻点且 y 是 x 的出邻点。顶点 v 的出度 $d_D^+(v)$ 和入度 $d_D^-(v)$ 分别是顶点 v 在定向图 D 中出邻点的个

数和入邻点的个数。

设 D' 是 D 的一个子图，若对于 D 中的每一个顶点 v，有 $d_{D'}^{+}(v)=d_{D'}^{-}(v)$，则 D' 是一个欧拉子图。若 $|E(D')|$ 是奇数，则 D' 是奇的欧拉子图；若 $|E(D')|$ 是偶数，则 D' 是偶的欧拉子图。令 $EE(D)$ 表示 D 的偶的欧拉子图的集合，$OE(D)$ 表示 D 的奇的欧拉子图的集合。设

$$diff(D)=|EE(D)|-|OE(D)| \tag{1}$$

若 $diff(D)\neq 0$，则我们称 D 是图 G 的一个好的定向图。

Alon 和 Tarsi [12]的下述结论是研究列表染色的一个强有力的工具，称为 Alon-Tarsi 定理。

Alon-Tarsi 定理[12]若 D 是图 G 的一个好的定向图，且对任意顶点 v 都有 $f(v)=d_D^{+}(v)+1$，则图 G 是 f-可选的。

Schauz [5]将 Alon-Tarsi 定理拓延至在线列表染色的研究，即下述定理 10。

定理 10：[5]若 D 是图 G 的一个好的定向图，且对任意顶点 v 都有 $f(v)=d_D^{+}(v)+1$，则图 G 是在线 f-可选的。

3.2. 证明定理 12

下面我们将给出强的定向图的定义，显然定义 11 是比好的定向图更强的定义。

定义 11：设 X 是 $V(G)$ 的一个子集。D'' 是 $G[X]$ 的一个定向图，如果下列条件成立：

1) $diff(D'')\neq 0$，

2) 对于每一个顶点 $v\in X$，有 $d_{D''}^{+}(v)\leq 3-\left(d_G(v)-d_{G[X]}(v)\right)$；

我们称 D'' 是 $G[X]$ 的一个强的定向图。

如果 $G[X]$ 有一个强的定向图，我们称子图 $G[X]$ 是可约的。

定理 12：若图 G 是不含 4 圈的平面图，则图 G 有一个 $\Delta^{+}(D)\leq 3$ 的好的定向图 D。

本文通过证明定理 12 的成立来说明定理 9 是成立的。采用反证法，首先假设定理 12 是错误的，且图 G 是关于最小度的极小反例。我们建立一些极小反例的性质。

引理 13：图 G 不含可约结构。

证明：假设 D'' 是 $G[X]$ 的一个强的定向图，那么 $diff(D'')\neq 0$。由图 G 的极小性可知，$G-X$ 有一个 $\Delta^{+}(D')\leq 3$ 的好的定向图 D'，那么 $diff(D')\neq 0$。令 D 是 G 的定向图，其中 D 是 D' 与 D'' 的并，定向图 D 是把 X 和 $V-X$ 之间的所有边定向为从 X 指向 $V-X$。因为 X 和 $V-X$ 之间所有边均是从 X 指向 $V-X$ 的，所以 D 的任何欧拉子图都不含有从 X 指向 $V-X$ 的边。那么

$$\begin{aligned}
diff(D)&=|EE(D)|-|OE(D)|\\
&=\left(|EE(D')EE(D'')|+|OE(D')OE(D'')|\right)-\left(|EE(D')OE(D'')|+|OE(D')EE(D'')|\right)\\
&=|EE(D')|\left(|EE(D'')|-|OE(D'')|\right)-|OE(D')|\left(|EE(D'')|-|OE(D'')|\right)\\
&=|EE(D')|diff(D'')-|OE(D')|diff(D'')\\
&=diff(D'')\left(|EE(D')|-|OE(D')|\right)\\
&=diff(D'')diff(D')\\
&\neq 0
\end{aligned}$$

综上，我们可知 $diff(D)=diff(D')diff(D'')\neq 0$。因为对于每个顶点 $v\in X$，都有 $d_{D''}^{+}(D)\leq 3-\left(d_G(v)-d_{G[X]}(v)\right)$，因此 $\Delta^{+}(D)\leq 3$。这与图 G 是极小反例是矛盾的。 □

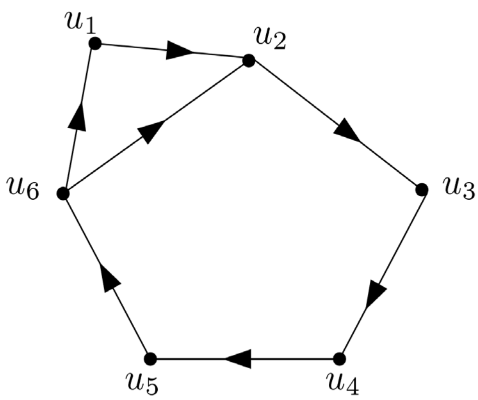

Figure 1. The orientation of $G[H]$

图 1. $G[H]$ 的定向图

下面我们给出定理 12 的证明过程。

证明：假设图 G 是关于最小度的极小反例，则 $\delta(G)=4$。因为图 G 不含 4 圈，所以 G 不含 4 面且不含相邻三角形。由引理 8 可知，G 有一个 F_5^3-子图 H，其中 $V(H)=\{u_1,\cdots,u_6\}$ 且 $E(H)=\{u_1u_2,u_2u_3,u_3u_4,u_4u_5,u_5u_6,u_6u_1,u_2u_6\}$。令 $f(v)$ 是图 G 的筹码数，对于每一个点 $v\in V(G)$，有 $f(v)=4$。由图 G 的极小性可知，$G-H$ 是在线 4-可选的。令 $f'(v_i)$ 表示点 v_i 可用的筹码数，则对于 $i=1,3,4,5$，有 $|f'(u_i)|\geq 2$，对于 $i=2,6$，有 $|f'(u_i)|\geq 3$。假设当 $i=1,3,4,5$，$|f'(u_i)|=2$；当 $i=2,6$，$|f'(u_i)|=3$。如图 1 所示，构造 $G[H]$ 的一个强的定向图 D''，易知对于每一个顶点 $v\in H$，有 $d_{D''}^{+}(D)\leq 3-\left(d_G(v)-d_{G[H]}(v)\right)$ 且 $diff(D'')=1$，即 $G[H]$ 是可约结构，这与引理 13 矛盾。 □

上述我们完成了定理 12 的证明，也就证明了定理 9 是成立的，即不含 4 圈的平面图是在线 4-可选的。结合第二节我们可以得到下述定理 14。

定理 14：当 $k=3,4,5$ 或 6 时，不含 k 圈的平面图是在线 4-可选的。

致　谢

感谢浙江师范大学朱绪鼎教授对本文的建议，也感谢所有匿名审稿人对本文的指导意见。

基金项目

国家自然科学基金项目资助(CNSF 00571319)。

参考文献

[1] Vizing, V.G. (1976) Vertex Colorings with Given Colors. *Diskret. Analiz*, **29**, 3-10. (In Russian)

[2] Erdős, P., Rubin, A.L. and Taylor, H. (1979) Choosability in Graphs. *Congressus Numerantium*, **26**, 125-157.

[3] Thomassen, C. (1994) Every Planar Graph Is 5-Choosable. *Journal of Combinatorial Theory*, **62**, 180-181. https://doi.org/10.1006/jctb.1994.1062

[4] Gutner, S. (2008) The Complexity of Planar Graph Choosability. *Discrete Mathematics*, **159**, 119-130. https://doi.org/10.1016/0012-365X(95)00104-5

[5] Schauz, U. (2009) Mr. Paint and Mrs. Correct. *Electronic Journal of Combinatorics*, **16**, 18.

[6] Chang, T.P. and Zhu, X. (2012) On-Line 3-Choosable Planar Graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **16**, 511-519. https://doi.org/10.11650/twjm/1500406598

[7] Han, M. and Zhu, X. (2015) Locally Planar Graphs Are 5-Paintable. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam.

[8] Wang, W. and Lih, K.W. (2002) Choosability and Edge Choosability of Planar Graphs without Five Cycles. *Applied Mathematics Letters*, **15**, 561-565. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(02)80007-6

[9] Juvan, M. and Mohar, B. (2002) Planar Graphs without Cycles of Specific Lengths. *European Journal of Combinatorics*, **23**, 377-388. https://doi.org/10.1006/eujc.2002.0570

[10] Zhu, X. (2009) On-Line List Colouring of Graphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, **16**, 3665-3677.

[11] Lam, P.C.B., Xu, B. and Liu, J. (1999) The 4-Choosability of Plane Graphs without 4 Cycles. *Journal of Combinatorial Theory*, **76**, 117-126. https://doi.org/10.1006/jctb.1998.1893

[12] Alon, N. and Tarsi, M. (1992) Colorings and Orientations of Graphs. *Combinatorica*, **12**, 125-134. https://doi.org/10.1007/BF01204715