Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, **2019, 9(1), 1-5**
Published Online February 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2019.91001

Uniformly Fuzzy Minimal Posets and Its Order Homomorphism

Lu Chen, Hui Li

School of Mathematical Science, Huaibei Normal University, Huaibei Anhui
Email: 1270229940@qq.com

Received: Nov. 28th, 2018; accepted: Dec. 12th, 2018; published: Dec. 19th, 2018

Abstract

In this paper, the concept of uniformly fuzzy minimal posets is introduced on the basis of uniformly fuzzy posets, and its related properties and some equivalent characterizations are discussed. Secondly, under the condition of fuzzy order homomorphism, the concept of preserving uniformly fuzzy minimal posets is given. Finally, an equivalent characterization of preserving uniformly fuzzy minimal posets is given.

Keywords

Uniformly Fuzzy Minimal Poset, Uniformly Fuzzy Scott Continuous Mapping, Fuzzy Ordered Homomorphism

一致模糊极小集及其序同态

陈　璐，李　辉

淮北师范大学数学科学学院，安徽 淮北
Email: 1270229940@qq.com

收稿日期：2018年11月28日；录用日期：2018年12月12日；发布日期：2018年12月19日

摘　要

本文在一致模糊偏序集的基础上引入一致模糊极小集的概念，探讨其相关性质和若干等价刻画。其次在模糊序同态的条件下给出保一致模糊极小集的概念，最后给出保一致模糊极小集的一个等价刻画。

关键词

一致模糊极小集，一致模糊Scott连续映射，模糊序同态

文章引用：陈璐，李辉．一致模糊极小集及其序同态[J]．运筹与模糊学, 2019, 9(1): 1-5.
DOI: 10.12677/orf.2019.91001

1. 引言

模糊集[1]的概念首先是由 Zadeh. L. A 提出的，它的提出开辟了一个新的数学研究方向，使得数学的发展又前进了一步。文献[2] [3]给出了 L-fuzzy 偏序集上的 L-fuzzy 定向集及 L-fuzzy domain 的概念，但这种模糊的方法比较复杂。文献[4]弥补了这一缺陷，重新定义了模糊 dcpo 和模糊 domain，这很大程度上是对文献[2] [3]的一种简化。文献[5]引入了模糊定向极小集和模糊序同态的概念，给出了模糊定向极小集的若干性质和等价刻画。文献[6]引入了一致模糊偏序集，进而给出一致模糊完备集和一致模糊 Domain 的概念。本文在以上文献的基础上，主要是在文献[6]的基础上引入一致模糊极小集的概念，其次给出一个模糊序同态的概念，讨论在模糊序同态下一致模糊极小集的若干性质和等价刻画。

2. 预备

定义 2.1 [2]：设 X 是非空偏序集，$e:X\times X\to L$ 为映射，称 e 是 X 上的一个模糊偏序关系，若 e 满足：

1) 自反性：$\forall x\in X$，$e(x,x)=1$；
2) 传递性：$\forall x,y,z\in X$，$e(x,y)\wedge e(y,z)\le e(x,z)$；
3) 反对称性：$\forall x,y\in X$，$e(x,y)=e(y,x)=1\Rightarrow x=y$；

称偶对 (X,e) 为模糊偏序集，简称模糊集。

例 2.1 [2]：设 X 为非空集合，定义 $sub_X:L^X\times L^X\to L$ 为 $\forall A,B\in L^X$，

$$sub_X(A,B)=\underset{x\in X}{\wedge}A(x)\to B(x)$$

定义 2.2 [3]：设 (X,e) 是模糊偏序集，$x_0\in X$，$A\in L^X$，如果：

1) $\forall x\in X$，$A(x)\le e(x,x_0)$；(相应的，$\forall x\in X$，$A(x)\le e(x_0,x)$)
2) $\forall y\in X$，$\underset{x\in X}{\wedge}(A(x)\to e(x,y))\le e(x_0,y)$ 界)，记作 $x_0=\coprod A$（相应的，$x_0=\prod A$）。

定义 2.3 [3]：设 (X,e) 是模糊偏序集，$A\in L^X$，若 $\forall x,y\in X$，$e(x,y)\wedge_L A(x)\le A(y)$ ($e(x,y)\wedge_L A(y)\le A(x)$)，则称 A 为模糊上集(模糊下集)。

定义 2.4 [4]：设 (X,e) 是模糊偏序集，$\forall A\in L^X$，定义 $\downarrow A\in L^X$ 为：

$$\forall y\in X,\ \downarrow A(x)=\underset{y\in X}{\vee}A(y)\wedge e(x,y)\quad (\uparrow A(x)=\underset{y\in X}{\vee}A(y)\wedge e(y,x))。$$

对于 $A\subseteq X$，$\chi_A\in L^X$ (称为 A 的特征函数)定义为 $\chi_A(x)=1$，若 $x\in A$；否则为 0。

定义 2.5 [4]：设 (X,e_X)，(Y,e_Y) 是模糊完备集，映射 $f:X\to Y$ 称为模糊 Scott 连续映射，如果 f 是保模糊序的，对任意模糊定向集 A，$f(\coprod D)=\coprod f^{\to}(D)$。其中，$f^{\to}:L^X\to L^Y$ 为 $\forall A\in L^X$，$y\in Y$，$f^{\to}(A)(y)=\underset{x\in X}{\vee}A(x)\wedge e_Y(y,f(x))$。称为模糊向前算子。相反地 $\forall B\in L^Y$，令 $f^{\leftarrow}(B)=B\circ f$，称为模糊向后算子。即 $f^{\leftarrow}:L^Y\to L^X$。

定义 2.6 [6]：设 (X,e) 为模糊偏序集，$A\in L^X$ 为模糊子集，若 $\forall D\subseteq A$，$\forall x,y\in X$ 满足：

1) $\underset{x\in X}{\vee}A(x)=1$；
2) $D(x)\wedge D(y)\le\underset{z\in X}{\vee}A(z)\wedge e(x,z)\wedge e(y,z)$。

则称 A 为一致模糊偏序集。(X,e) 上的一致模糊偏序集的全体记为 $UF(X)$，若 A 还是一个模糊下集，则称 A 为一致模糊理想，全体一致模糊理想记为 $UFI(X)$。

定义 2.7 [6]：设 (X,e) 为模糊偏序集，若 $\forall A\in UF(X)$，$\coprod A$ 存在，则称 (X,e) 为一致模糊完备偏序集。记为 UFCPO。

定义 2.8 [6]：设 (X,e) 为 UFCPO，定义其上的一致模糊 way-below 关系为，$\forall x,y\in X$，

$$\Downarrow_{UF} x(y)=\bigwedge_{I\in UFI(X)}\left(e\left(x,\coprod I\right)\to I(y)\right)。$$

称 $\Downarrow_{UF}: X\times X\to L$ 为 (X,e) 上的一致模糊 way-below 关系，且 $\Downarrow_{UF} x(y)=\Downarrow_{UF}(y,x)$。如果 $\forall x\in X$，$\Downarrow_{UF} x\in UF(X)$ 且 $x=\Downarrow_{UF}\coprod x$，则称 (X,e) 为一致模糊连续偏序集或一致模糊 Domain。

3. 主要结果

定义 3.1：设 (X,e) 为 UFCPO，$x\in X$ 且 $A\in UF(X)$，如果 A 满足：

1) $x=\coprod A$；2) $\forall B\in UF(X)$，$\forall y\in X$，$e\left(x,\coprod B\right)\wedge A(y)\le\bigvee_{a\in X}B(a)\wedge e(y,a)$。

则称 A 为 x 的一致模糊极小集。

定理 3.1：设 (X,e) 为 UFCPO，$x\in X$ 且 $A\in L^X$，则下列条件等价：

(1) A 是 x 一致模糊极小集；(2) $A\in UF(X)$，$A\le\Downarrow_{UF} x$ 且 $x=\coprod A$。

证明：$(1)\Rightarrow(2)$ $\forall B\in UF(X)$，$\forall y\in X$。因为 $e\left(x,\coprod B\right)\wedge A(y)\le\bigvee_{a\in X}B(a)\wedge e(y,a)\le B(y)$，故 $A(y)\le e\left(x,\coprod B\right)\to B(y)$，所以 $A(y)\le\Downarrow_{UF} x(y)$，即 $A\le\Downarrow_{UF} x$。

$(2)\Rightarrow(1)$ $\forall B\in UF(X)$，$\forall y\in X$，$e\left(x,\coprod B\right)\wedge A(\mathrm{y})=e\left(x,\coprod\downarrow B\right)\wedge A(y)\le\downarrow B(y)=\bigvee_{a\in X}B(a)\wedge e(y,a)$。

引理 3.1：设 (X,e) 为 UFCPO，$\forall x\in X$，若 $\exists A\in UF(X)$，满足 $x=\coprod A$ 和 $A\le\Downarrow_{UF} x$，则 $\Downarrow_{UF} x\in UFI(X)$ 且 $x=\coprod\Downarrow_{UF} x$。

证明：$\forall y\in X$，

$$\begin{aligned}\Downarrow_{UF} x&=\bigwedge_{I\in UFI(X)}\left(e\left(x,\coprod I\right)\to\left(\bigvee_{d\in X}I(d)\wedge e(y,d)\right)\right)\\&\le e\left(x,\coprod\downarrow A\right)\to\left(\bigvee_{d\in X}A(d)\wedge e(y,d)\right)\\&=1\to\left(\bigvee_{d\in X}A(d)\wedge e(y,d)\right)\bigvee_{d\in X}A(d)\wedge e(y,d)\end{aligned}。$$

从而 $\forall c\in X$，有

$$\begin{aligned}\bigwedge_{c\in X}\Downarrow_{UF} x(c)&\le\bigwedge_{c\in X}\bigvee_{y_1\in X}A(y_1)\wedge e(c,y_1)\\&\le\bigwedge_{c\in X}\bigvee_{y_1\in X}\bigvee_{y\in X}A(y_1)\wedge e(y_1,y)\wedge e(c,y_1)\\&=\bigwedge_{c\in X}\bigvee_{y\in X}A(y)\wedge e(c,y)\\&\le\bigvee_{y\in X}A(y)\wedge\left(\bigwedge_{c\in X}e(c,y)\right)\end{aligned}。$$

因此 $\Downarrow_{UF} x$ 是一致模糊的，故为一致模糊理想。又因为

$$1=sub\left(A,\Downarrow_{UF} x\right)\le e\left(\coprod A,\coprod\Downarrow_{UF} x\right)=e\left(x,\Downarrow_{UF} x\right)。$$

同时 $1=sub\left(\Downarrow_{UF} x,\downarrow x\right)\le e\left(\coprod\Downarrow_{UF} x,\coprod\downarrow x\right)=e\left(\Downarrow_{UF} x,x\right)$，故 $x=\coprod\Downarrow_{UF} x$。

由定理 3.1 及引理 3.1 易到下面的定理 3.2 和定理 3.3。

定理 3.2：设 (X,e) 为 UFCPO，则 (X,e) 是一致模糊 domain 当且仅当 $\forall x\in X$，x 有一致模糊极小集。

定理 3.3： 设 (X,e) 为 UFCPO，若 $\forall x\in X$ ，x 有一致模糊极小集，则 $\Downarrow_{UF} x$ 是 x 的最大一致模糊极小集。

定理 3.4： 设 (X,e) 为 UFCPO，则下列条件等价：

(1) (X,e) 是一致模糊 Domain；

(2) $\forall x\in X$ ，x 有一致模糊极小集；

(3) $\forall x\in X$ ，$\exists A\in UF(X)$ 满足 $x=\coprod A$ 且 $A\le\Downarrow_{UF} x$ ，使得 A 为 x 的一致模糊极小集。

证明：(1) $\Rightarrow$ (2)若 (X,e) 为一致模糊 domain，由定义 3.1 知 $\forall x\in X$ ，$\Downarrow_{UF} x$ 是 x 处的一个一致模糊极小集。

(2) $\Rightarrow$ (3)由定理 3.1 即得。

(3) $\Rightarrow$ (1)由条件(3)知 A 为一致模糊极小集，故 (X,e) 为一致模糊 domain。

定义 3.2： 设 (X,e_X)，(Y,e_Y) 是 UFCPO，称映射 $f:X\to Y$ 为一致模糊 Scott 连续映射，如果 f 是保模糊序的，即 $\forall A\in UF(X)$，$f(\coprod D)=\coprod f^{\to}(D)$。其中 $f^{\to}:L^X\to L^Y$ 为 $\forall A\in L^X$，$y\in Y$，$f^{\to}(A)(y)=\bigvee_{x\in X}A(x)\wedge e_Y(y,f(x))$。

定义 3.3： 设 $(X,e_X),(Y,e_Y)$ 是 UFCPO，$f:X\to Y$ 是映射，如果 f 是一致模糊 Scott 连续映射且 f 保一致模糊 way-below 关系，则称 f 是一个模糊序同态。

定义 3.4： 设 $(X,e_X),(Y,e_Y)$ 是 UFCPO，$f:X\to Y$ 是映射，若 $\forall x\in X$ ，当 $A\in L^X$ 是 x 的一致模糊极小集时，$f^{\to}(A)$ 是 $f(x)$ 的一致模糊极小集，则称 f 保一致模糊极小集。

定理 3.5： 设 $(X,e_X),(Y,e_Y)$ 是一致模糊 Domain，$f:X\to Y$ 为保模糊序的映射，则下列条件等价：

(1) f 保一致模糊极小集；

(2) $\forall a\in X,f^{\to}(\Downarrow_{UF} a)$ 是 $f(a)$ 的一致模糊极小集；

(3) f 是一致模糊 Scott 连续映射且 $\forall a\in X,f^{\to}(\Downarrow_{UF} a)\le\Downarrow_{UF} f(a)$；

(4) f 是模糊序同态。

证明： $(1)\Rightarrow(2)$ 由 $\Downarrow_{UF} a$ 为 a 的一致模糊极小集，f 为保一致模糊极小集映射，故 $f^{\to}(\Downarrow_{UF} a)$ 为 $f(a)$ 的一致模糊极小集。

$(2)\Rightarrow(3)$ $f^{\to}(\Downarrow_{UF} a)\le\Downarrow_{UF} f(a)$ 显然成立。下证 f 是一致模糊 Scott 连续映射。$\forall y\in Y$ ，有

$$
\begin{aligned}
e_Y\left(\coprod f^{\to}(A),y\right)&=\bigwedge_{a\in X}\left(A(a)\to e_Y(f(a),y)\right)=\bigwedge_{a\in X}\left(A(a)\to e_Y\left(\coprod f^{\to}(\Downarrow_{UF} a),y\right)\right)\\
&=\bigwedge_{a\in X}\left(A(a)\to\bigwedge_{x\in X}\left(\Downarrow_{UF} a(x)\to e_Y(f(x),y)\right)\right)\\
&=\bigwedge_{x\in X}\left(\left(\bigvee_{a\in X}A(a)\wedge\Downarrow_{UF} a(x)\right)\to e_Y(f(x),y)\right)\\
&=\bigwedge_{x\in X}\left(\Downarrow_{UF}(\coprod A)(x)\to e_Y(f(x),y)\right)\\
&=e_Y\left(\coprod f^{\to}(\Downarrow_{UF}(\coprod A)),y\right)=e_Y\left(f(\coprod A),y\right)
\end{aligned}
$$
。

$(3)\Rightarrow(4)$

$$
\begin{aligned}
&\forall x,y\in X,\Downarrow_{UF} f(y)(f(x))\ge f^{\to}(\Downarrow_{UF} y)(f(x))\\
&=\bigvee_{a\in X}\Downarrow_{UF} y(a)\wedge e_Y(f(x),f(a))\ge\bigvee_{a\in X}\Downarrow_{UF} y(a)\wedge e(x,a)\text{。}\\
&=\Downarrow_{UF} y(x)
\end{aligned}
$$

$(4)\Rightarrow(1)$ 设 $\forall x\in X$ 且 $A\in L^X$ 为 x 的一致模糊极小集，则 $x=\coprod A$ 且 $A\le\Downarrow_{UF} x$ 。由 f 保模糊序和一致模糊 way-below 关系，有 $f^{\to}(A)\le f^{\to}(\Downarrow_{UF} x)\le\Downarrow_{UF} f(x)$，故 $f^{\to}(A)$ 是一致模糊理想。而 f 一致模糊 Scott

连续，故 $\coprod f^{\rightarrow}(A)=f(\coprod A)=f(x)$，进而 $f^{\rightarrow}(A)$ 是 $f(x)$ 的一致模糊极小集。

参考文献

[1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] 张奇业. L-Fuzzy Domain 理论[D]: [博士学位论文]. 北京: 首都师范大学, 2002.

[3] Lai, H. and Zhang, D. (2007) Complete and Directed Complete Ω-Categories. *Theoretical Computer Science*, **388**, 1-25. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2007.09.012

[4] Yao, W. and Shi, F.G. (2010) Quantitative Domain via fuzzy Sets: Part I: Continuity of Fuzzy Directed Complete Posets. *Fuzzy Sets and Systems*, **161**, 973-987. https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.06.018

[5] 王李锋, 赵彬. 模糊 Domain 上的模糊序同态及其性质[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2014, 42(2): 13-17.

[6] 李辉, 陈璐. 一致模糊偏序集及其应用[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 676-680.