Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2019, 9(3), 235-242
Published Online August 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2019.93027

Hans汉斯

Research on an Exponential Curve with First Order Term of Time

Kai Zuo[1*], Yulin Zhang[1], Hu Li[1], Wenqing Wu[2]

[1]School of Mathematics, Chengdu Normal University, Chengdu Sichuan
[2]School of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan
Email: [*]zuokaihelen@163.com

Received: Aug. 5th, 2019; accepted: Aug. 15th, 2019; published: Aug. 22nd, 2019

Abstract

In view of the non-stationary sequences mainly caused by deterministic factors in the application fields of economy and engineering and nature, this paper proposes an exponential curve with first order term of time on the basis of classical exponential curve and modified exponential curve. Combining with the structure of the new model, the specific expressions of parameters in the model are derived by the idea of piecewise summation. According to these expressions, the specific steps of establishing and solving the model are given in detail with a specific example.

Keywords

Exponential Curve, First Order Term of Time, Non-Stationary Sequence, Piecewise Summation

具有时间一次项的指数曲线研究

左　凯[1*]，张玉林[1]，李　虎[1]，吴文青[2]

[1]成都师范学院，数学学院，四川 成都
[2]西南科技大学，理学院，四川 绵阳
Email: [*]zuokaihelen@163.com

收稿日期：2019年8月5日；录用日期：2019年8月15日；发布日期：2019年8月22日

摘　要

针对自然界和经济、工程等应用领域中，由确定性因素导致的非平稳序列，本文在经典的指数曲线和修

[*]通讯作者。

文章引用: 左凯, 张玉林, 李虎, 吴文青. 具有时间一次项的指数曲线研究[J]. 运筹与模糊学, 2019, 9(3): 235-242.
DOI: 10.12677/orf.2019.93027

正的指数曲线的基础上，提出了具有时间一次项的指数曲线。结合模型本身的结构，采用分段求和的思想给出了模型中参数的具体表达式。在此基础上，以一个具体实例，详细给出了模型的建立、求解的具体步骤。

关键词

指数曲线，时间一次项，非平稳序列，分段求和

1. 引言

在自然界中由确定性因素所导致的非平稳序列，通常表现出明显的规律性。比如有显著的趋势或者有固定的变化周期，这种规律性信息通常比较容易提取。当现象的长期趋势每期大体按照相同的增长速度递增或者递减变化时，可以用指数曲线进行拟合。当现象的趋势为：初期增长迅速，随后增长率逐渐降低，最终以一个常数为增长极限，则可以采用修正的指数曲线进行拟合。

在对数据预测分析中，指数曲线和修正的指数曲线[1] [2] [3]是很重要且常见的一类预测模型。程健等人[4]利用指数曲线法研究了在役储罐发生不均匀沉降后的结构疲劳安全性问题。孙海峰等人[5]将指数曲线应用在运载火箭推力调节电机速度控制上面，实现了快速响应性能好、升降速时间短、稳定精确控制的目的。卓立新[6]利用在福建省范围内收集到的 1907 套阔叶树为建模数据，构建了福建省阔叶树多形地位(级)指数曲线模型，所得结果误差小，精度高。

另一方面，2009 年吴新燕等人[7]收集了汶川地震各时刻的死亡人数，并采用修正指数曲线进行拟合。计算结果能够很好的对地震死亡人数进行估计，从而为各级抗震救灾指挥部提供救灾决策参考。陈善雄等人[8]针对武广高速铁路路基沉降的数据，提出了路基沉降预测的三点修正指数曲线模型，得到的结果稳定，相关系数高。张军等人[9]根据灰色系统建模估计参数的方法，提出了基于灰色建模思想估计修正指数曲线模型参数的方法，并用实际数据验证了该方法的有效性和实用性。欧阳明等人[10]在现有模型的基础上构造了一个新的修正的指数曲线模型。通过对不同类型的单桩静载荷试验数据进行拟合，验证了提出的新模型能够很好的对单桩 P-S 曲线进行拟合。最近，谭生源[11]在经典的修正指数曲线的基础上提出了具有振荡项的指数曲线模型，并将其应用在一次能源消费的分析中。Yu 等人[12]提出了具有一次多项式的修正指数曲线，并将其应用在制造工业中。但是，值得注意的是，文献[11] [12]虽然提出了较为一般的模型，但是由于模型的非线性型，作者并没有给出模型参数的解析表达式，而是采用了数值计算方法求解模型参数的数值解。

本文在修正的指数曲线和文献[11] [12]的启发下，提出了具有时间一次项的修正指数曲线模型。并受到修正指数曲线求解模型参数的启发，将三和法推广应用在本模型中，经过分析、计算得到了模型参数的具体表达式。最后，以一组数据为例，详细的给出了模型参数的计算方法和详细过程，并将计算结果与传统的指数模型、修正的指数模型进行对比。从数值结果上可以看出，本文提出的模型在一类数据的处理上有更高的精度。

2. 指数曲线和修正的指数曲线

2.1. 指数曲线

当现象的长期趋势每期大体按照相同的增长速度递增或递减变化时，可用指数曲线进行拟合。由文献[1] [2] [3]，经典的指数曲线方程为

$$Y_t = ab^t \tag{1}$$

为了估计参数 a、b，一般首先将方程(1)两端取对数，得

$$\ln Y_t = \ln a + t\ln b \tag{2}$$

然后运用最小二乘法和方程(2)，得到如下方程

$$\begin{cases} \sum \ln Y = n\ln a + \left(\sum t\right)\ln b \\ \sum t\ln Y = \left(\sum t\right)\ln a + \left(\sum t^2\right)\ln b \end{cases} \tag{3}$$

估计出参数 $\ln a$ 和 $\ln b$，再取反对数，即可得到参数 a、b 的估计值。

2.2. 修正指数曲线

当现象的趋势为：初期增长迅速，随后增长率逐渐减低，最终以一个常数为增长极限，则可以采用修正的指数曲线进行拟合。在经典指数曲线的基础上增加一个常数 c，即得到修正指数曲线的方程(见文献[1] [2] [3])

$$Y_t = ab^t + c \tag{4}$$

其中，a、b、c 为未知参数，$a \neq 0$，$b \in (0,1)\cup(1,\infty)$，$c \in (0,\infty)$。

参数 a、b、c 估计的基本思想是三和法：把整个时间序列分成相等的三个数组，每个组有 m 项，根据趋势值 Y_t 的三个局部总和分别等于原数列观察值 Y_t 的三个局部总和来确定三个参数。具体为：设观察值的三个局部总和分别为 S_1、S_2、S_3，得

$$S_1 = \sum_{t=1}^{m} Y_t, \quad S_2 = \sum_{t=m+1}^{2m} Y_t, \quad S_3 = \sum_{t=2m+1}^{3m} Y_t \tag{5}$$

由三和法得到如下方程

$$\begin{cases} S_1 = mc + a + ab + ab^2 + \cdots + ab^{m-1} \\ S_2 = mc + ab^m + ab^{m+1} + \cdots + ab^{2m-1} \\ S_3 = mc + ab^{2m} + ab^{2m+1} + \cdots + ab^{3m-1} \end{cases} \tag{6}$$

通过对方程(6)求解，得到

$$\begin{cases} b = \left(\dfrac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1}\right)^{\frac{1}{m}} \\ a = \left(S_2 - S_1\right)\dfrac{b-1}{\left(b^m - 1\right)^2} \\ c = \dfrac{1}{m}\left(S_1 - \dfrac{a\left(b^m - 1\right)}{b-1}\right) \end{cases} \tag{7}$$

3. 带时间一次项的指数曲线

在经典指数曲线、修正的指数曲线和文献[11] [12]的综合启发下，提出了具有时间一次项的指数曲线模型，并将修正指数曲线求解模型参数的三和法推广应用在本模型中，经过分析、计算得到模型参数的具体表达式。在上面指数模型的基础上，本文提出的新型指数曲线，其一般方程为

$$Y_t = ab^t + ct \tag{8}$$

相比于经典的指数模型和修正的指数曲线模型，最大的区别则是对序列的趋势采用的是一次函数的形式。当 $c=0$ 时则退化为经典的指数曲线模型，当 $c=k/t$ 时则退化为修正的指数曲线模型。

接下来，利用三和法的思想推导系统中参数 a,b,c 的具体表达式。首先，把用于建模的时间序列分成相等的四个数组，每个组有 m 项，根据趋势值 Y_t 的四个局部总和分别等于原数列观察值 Y_t 的四个局部总和来确定三个参数。具体为：设观察值的四个局部总和分别为 S_1、S_2、S_3、S_4，得到

$$S_1 = \sum_{t=1}^{m} Y_t\text{，}\quad S_2 = \sum_{t=m+1}^{2m} Y_t\text{，}\quad S_3 = \sum_{t=2m+1}^{3m} Y_t\text{，}\quad S_4 = \sum_{t=3m+1}^{4m} Y_t \tag{9}$$

分别计算得到如下方程

$$\begin{cases} S_1 = \sum_{t=1}^{m} ab^t + c\sum_{t=1}^{m} t = \dfrac{ab\left(1-b^m\right)}{1-b} + c\dfrac{1+m}{2}m, \\ S_2 = \sum_{t=m+1}^{2m} ab^t + c\sum_{t=m+1}^{2m} t = \dfrac{ab^{m+1}\left(1-b^m\right)}{1-b} + c\dfrac{1+3m}{2}m, \\ S_3 = \sum_{t=2m+1}^{3m} ab^t + c\sum_{t=2m+1}^{3m} t = \dfrac{ab^{2m+1}\left(1-b^m\right)}{1-b} + c\dfrac{1+5m}{2}m, \\ S_4 = \sum_{t=3m+1}^{4m} ab^t + c\sum_{t=4m+1}^{4m} t = \dfrac{ab^{3m+1}\left(1-b^m\right)}{1-b} + c\dfrac{1+7m}{2}m \end{cases} \tag{10}$$

进一步，令 $L_i = S_{i+1} - S_i, i=1,2,3$，于是有

$$\begin{cases} L_1 = S_2 - S_1 = \dfrac{ab\left(1-b^m\right)}{1-b}\left(b^m-1\right) + cm^2, \\ L_2 = S_3 - S_2 = \dfrac{ab^{m+1}\left(1-b^m\right)}{1-b}\left(b^m-1\right) + cm^2, \\ L_3 = S_4 - S_3 = \dfrac{ab^{2m+1}\left(1-b^m\right)}{1-b}\left(b^m-1\right) + cm^2 \end{cases} \tag{11}$$

类似的，令 $W_i = L_{i+1} - L_i, i=1,2$，经计算得到

$$\begin{cases} W_1 = L_2 - L_1 = \dfrac{ab\left(1-b^m\right)\left(b^m-1\right)}{1-b}\left(b^m-1\right), \\ W_2 = L_3 - L_2 = \dfrac{ab^{m+1}\left(1-b^m\right)\left(b^m-1\right)}{1-b}\left(b^m-1\right). \end{cases} \tag{12}$$

通过对方程(12)求解，得到

$$\begin{cases} b = \left(\dfrac{W_2}{W_1}\right)^{\frac{1}{m}}, \\ a = \dfrac{(1-b)W_1}{b(1-b^m)(b^m-1)^2}, \\ c = \dfrac{L_1}{m^2} - \dfrac{ab(1-b^m)(b^m-1)}{m^2(1-b)}. \end{cases} \tag{13}$$

至此，我们通过解析的方法得到了模型参数的具体表达式，一旦给定原始序列，则可以通过建模进行分析。

4. 数值验证

在进行具体的数值实例前，我们先给出衡量模型精度的表达式。根据计算值与实际值确定绝对百分误差(APE)和均方根百分误差如下。

$$\mathrm{APE} = \left|\frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t}\right| \times 100\%, t = 1, 2, \cdots, n \tag{14}$$

$$\mathrm{RMSPEPR} = \sqrt{\frac{1}{v}\sum_{t=1}^{v}\left(\frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t}\right)^2} \times 100\% \tag{15}$$

$$\mathrm{RMSPEPO} = \sqrt{\frac{1}{n-v}\sum_{t=v+1}^{n}\left(\frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t}\right)^2} \times 100\% \tag{16}$$

$$\mathrm{RMSPE} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t}\right)^2} \times 100\% \tag{17}$$

表达式中 $\hat{Y}_t$ 为计算得到的值，v 为用于建模的个数，n 为原始序列的总个数。

为了对新型时间一次项的指数曲线的预测精度和拟合效果进行检验，本文选用表 1 的数据来验证分析，并将计算结果与已有的指数曲线、修正的指数曲线模型的计算结果进行对比分析。

Table 1. Raw data used for validation
表 1. 用于验证的原始数据

序号	1	2	3	4	5	6	7	8
数据	2	4	6	9	14	20	30	46
序号	9	10	11	12	13	14	15	
数据	72	115	187	309	516	865	1458	

下面给出具体的求解时间一次项的指数曲线的建模过程。首先由表 1 的数据计算得到

$$\begin{cases} S_1 = 2+4+6 = 12, \\ S_2 = 9+14+20 = 43, \\ S_3 = 30+46+72 = 148, \\ S_4 = 115+187+309 = 611. \end{cases} \tag{18}$$

于是，分别得到 $L_i, i=1,2,3$， $W_i, i=1,2$ 的具体值为

$$\begin{cases} L_1 = S_2 - S_1 = 43 - 12 = 31, \\ L_2 = S_3 - S_2 = 148 - 43 = 105, \\ L_3 = S_4 - S_3 = 611 - 148 = 463. \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} W_1 = L_2 - L_1 = 105 - 31 = 74, \\ W_2 = L_3 - L_2 = 463 - 105 = 358. \end{cases} \tag{20}$$

将相应的数值带入公式(13)，即可得到系统参数的具体值

$$\begin{cases} a = 0.53507251, \\ b = 1.69128619, \\ c = 1.30203443. \end{cases} \tag{21}$$

进一步，带时间一次项的指数曲线的方程为

$$Y_t = 0.53507251 \times (1.69128619)^t + 1.30203443t \tag{22}$$

使用指数曲线模型、修正的指数曲线模型、时间一次项的指数曲线模型进行拟合建模和拟合，并将计算结果进行对比分析。上述三种模型的数值计算结果见表 2。相应的图形分别见图 1~3。

Table 2. The computational results of the exponential curve, modified exponential curve and the exponential curve with first order term of time

表 2. 指数曲线、修正的指数曲线和时间一次项的指数曲线对原始数据的计算结果

序列	实际值	指数曲线	APE (%)	修正指数曲线	APE (%)	时间一次项指数曲线	APE (%)
1	2	1.5609	21.9558	2.9429	47.1437	2.2070	10.3498
2	4	2.5228	36.9311	4.0008	0.0201	4.1346	3.3654
3	6	4.0774	32.0439	5.6860	5.2335	6.4947	8.2450
4	9	6.5900	26.7781	8.3703	6.9963	9.5862	6.5132
5	14	10.6509	23.9218	12.6463	9.6696	13.9147	0.6092
6	20	17.2144	13.9279	19.4574	2.7129	20.3354	1.6770
7	30	27.8225	7.2582	30.3070	1.0233	30.2946	0.9818
8	46	44.9677	2.2441	47.5893	3.4551	46.2382	0.5179
9	72	72.6784	0.9422	75.1186	4.3314	72.3035	0.4215
10	115	117.4653	2.1437	118.9702	3.4524	115.4873	0.4237
11	187	189.8514	1.5248	188.8219	0.9743	187.6233	0.3333
12	309	306.8443	0.6976	300.0893	2.8837	308.7258	0.0887
13	516	495.9322	3.8891	477.3282	7.4945	512.6448	0.6502
14	865	801.5426	7.3361	759.6538	12.1788	856.6300	0.9676
15	1458	1295.4806	11.1467	1209.3729	17.0526	1437.5075	1.4055
RMSPEPR (%)			18.9258		4.5739		**3.3928**
RMSPEPO (%)			8.0248		12.8489		**1.0543**
RMSPE (%)			17.1823		7.1983		**3.0467**

从计算结果看出时间一次项的指数曲线对原始数据的拟合、预测更接近。指数曲线的拟合误差、预测误差和总的误差分别为 18.9258%，8.0248%和 17.1823%；修正的指数曲线的拟合误差、预测误差和总的误差分别为 4.5739%，12.8489%和 7.1983%；时间一次项的指数曲线的拟合误差、预测误差和总的误差分别为 3.3928%，1.0543%和 3.0467%。从表 2，图 1~3 看出，时间一次项的指数曲线对原始数据的拟合和预测有更高的精度。

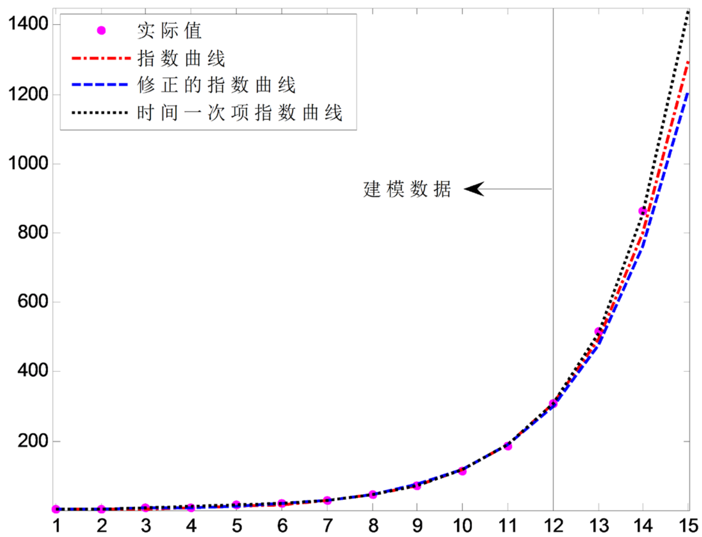

Figure 1. The simulation and fitting results of the exponential curve, modified exponential curve and the exponential curve with first order term of time

图 1. 指数曲线、修正的指数曲线和时间一次项的指数曲线对原始数据的拟合

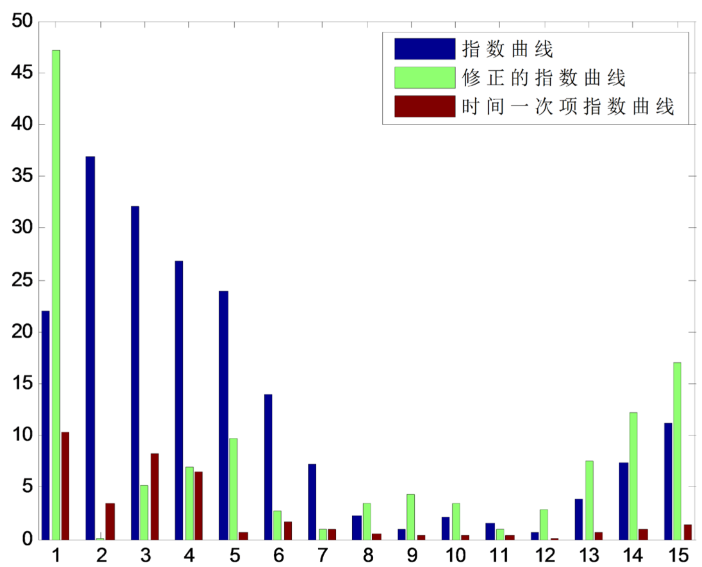

Figure 2. The absolute percentage error of raw data by using the exponential curve, modified exponential curve and the exponential curve with first order term of time

图 2. 指数曲线、修正的指数曲线和时间一次项的指数曲线对原始的绝对百分误差

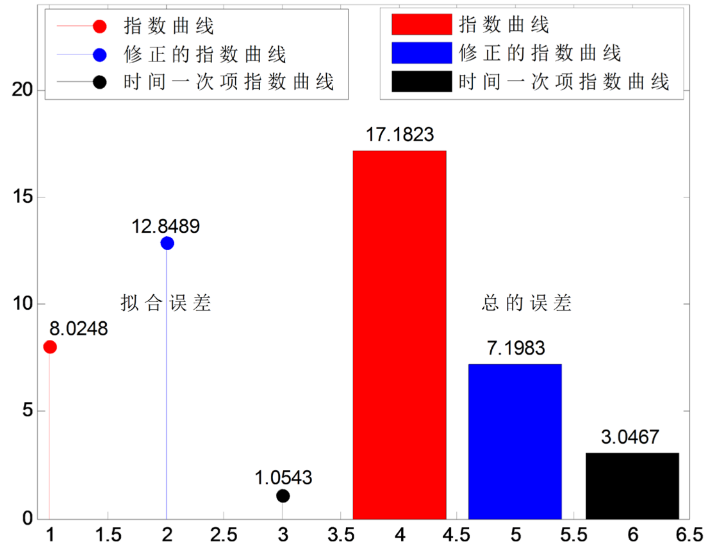

Figure 3. The fitting total errors of the exponential curve, modified exponential curve and the exponential curve with first order term of time

图 3. 指数曲线、修正的指数曲线和时间一次项的指数曲线对原始数据的拟合误差和总误差

5. 结论

本文讨论了带有时间一次项的指数曲线模型，并利用分段求和的思想给出了模型中参数的具体表达式。最后，通过一个实例说明了本模型在某些数据下的预测精度比经典的指数曲线，修正的指数曲线都要高。值得一提的是，本文的分段求和的思想简单，操作可行，在今后的研究中，可将此方法应用在其他类似模型的参数求解中。

参考文献

[1] 周永道, 王会琦, 吕王勇. 时间序列分析及应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.

[2] 宋廷山, 王坚, 刁艳华, 郭思亮. 应用统计学——以 EXCEL 为分析工具(第 2 版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2018.

[3] 贾俊平, 何晓群, 金勇进. 统计学(第 5 版) [M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2014.

[4] 程健, 陈志平, 苏文强, 唐小雨, 范海贵. 基于指数曲线法沉降预测模型的在役储罐疲劳寿命分析[J]. 化工机械, 2017(6): 690-695.

[5] 孙海峰, 胡海峰, 宋征宇. 基于指数曲线的运载火箭推力调节电机速度控制方法[J]. 航天控制, 2018(1): 55-59.

[6] 卓立新. 福建省阔叶树多形地位(级)指数曲线模型研究[J]. 林业勘察设计, 2017(2): 29-33.

[7] 吴新燕, 顾建华, 吴昊昱. 地震报道死亡人数随时间变化的修正指数模型[J]. 地震学报, 2009, 31(4): 457-463.

[8] 陈善雄, 王星运, 许锡昌, 余飞, 秦尚林. 路基沉降预测的三点修正指数曲线法[J]. 岩土力学, 2011, 32(11): 3355-3360.

[9] 张军, 吕雄, 姚贵平, 白树叶. 基于灰色建模思想估计修正指数曲线模型参数的方法[J]. 内蒙古农业大学学报: 自然科学版, 2013(5): 156-160.

[10] 欧阳明, 丁伯阳, 石吉森. 单桩荷载－沉降曲线的修正指数曲线模型拟合研究[J]. 水运工程, 2013(1): 31-38.

[11] 谭生源. 具有振荡项的指数曲线及其在一次能源消费中的应用[J]. 运筹与模糊学, 2019(9): 140-146.

[12] Yu, L., Tang, G.X. and Yang, L.Z. (2019) A New Type of Exponential Curve and Its Application in the Tertiary Industry. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, **30**, 1-11. https://doi.org/10.9734/JAMCS/2019/46518

知网检索的两种方式：

1. 打开知网首页：http://cnki.net/，点击页面中“外文资源总库 CNKI SCHOLAR”，跳转至：http://scholar.cnki.net/new，搜索框内直接输入文章标题，即可查询；
   或点击“高级检索”，下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2163-1476，即可查询。
2. 通过知网首页 http://cnki.net/顶部“旧版入口”进入知网旧版：http://www.cnki.net/old/，左侧选择“国际文献总库”进入，搜索框直接输入文章标题，即可查询。

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：orf@hanspub.org