Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2020, 10(3), 167-171
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2020.103017

Hans汉斯

The Construction of Some Classes of Minimally t-Tough Graphs

Huili Tong, Zongtian Wei

Department of Mathematics, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an Shaanxi
Email: hltong0920@163.com

Received: Jul. 9th, 2020; accepted: Jul. 24th, 2020; published: Jul. 31st, 2020

Abstract

A graph G is minimally t-tough if the toughness of G is t and the deletion of any edge from G decreases the toughness. Constructing a minimally t-tough graph and studying its structural characteristics are of great significance in theory and applications. This paper proves that several kinds of Cartesian product graphs and line graphs are minimally t-tough and also construct a class of k-regular, and minimally $k/2$-tough graphs.

Keywords

Toughness, Minimally t-Tough Graph, Cartesian Product Graph, Line Graph, Regular Graph

几类极小t-坚韧图的构造

同会利，魏宗田

西安建筑科技大学理学院，陕西 西安
Email: hltong0920@163.com

收稿日期：2020年7月9日；录用日期：2020年7月24日；发布日期：2020年7月31日

摘 要

若图G的坚韧度为t，且删除G中任意一条边后坚韧度减小，则称图G是极小t-坚韧的。构造极小t-坚韧图并研究其结构特性在理论和应用上都具有重要意义。证明了几类笛卡尔积图和线图的极小t-坚韧性，并构造出一类k-正则的极小$k/2$-坚韧图。

关键词

坚韧度，极小t-坚韧图，笛卡儿积图，线图，正则图

文章引用: 同会利, 魏宗田. 几类极小 t-坚韧图的构造[J]. 运筹与模糊学, 2020, 10(3): 167-171.
DOI: 10.12677/orf.2020.103017

1. 引言

1973 年，Chvátal [1]首次提出坚韧度的概念，用于研究图的哈密尔顿性。后来，坚韧度成为一个重要的网络抗毁性参数。

定义 1 [1]设 G 是一个非完全连通图，其坚韧度定义为

$$t(G)=\min\{|S|/\omega(G-S):S\subseteq V(G),\omega(G-S)>1\}。$$

如果 $t(G)=|S^*|/\omega(G-S^*)$，则称 S^* 为 G 的一个坚韧集，简称 t-集。

定义 2 [1]设 G 是一个图，$\omega(G)$ 为 G 的连通分支数。若对于 G 的任意点割集 S，有 $|S|\geq t\omega(G-S)$，其中 t 是正实数，则称图 G 是 t-坚韧的。

Chvátal 同时研究了图的坚韧度和哈密尔顿性的关系，提出了一个关于坚韧度的著名猜想：存在一个确定的正数 t_0，任何 t_0-坚韧图都是哈密尔顿图[1]。2006 年，Bauer 在文献[2]中综述了坚韧度和周长的关系、2-坚韧猜想的反证明、因子、特殊图类、计算复杂度，以及与坚韧度相关的各种结果。

Broersm 于 1999 年首次提出极小 t-坚韧图的概念[3]。

定义 3 [3]若图 G 的坚韧度 $t(G)=t$，且每一个支撑真子图 H 的坚韧度 $t(H)<t$，则称 G 是极小 t-坚韧的。

换言之，删除 G 中任意一条边 e，图 G 的坚韧度减小，就说这个图 G 是极小 t-坚韧的。

Katona 给出了一些极小 t-坚韧图顶点度的上界，并证明了每个极小 1-坚韧图的无爪图是一个圈[4]。2018 年，Katona 等构造出几类特殊的极小 t-坚韧图，并证明了，对于任意正整数 t 以及任意正有理数 $t\leq 1/2$，极小 t-坚韧图的判定问题是 DP-完备的[5] [6]。

极小 t-坚韧图具有重要的结构特性与研究意义，然而目前得到的极小 t-坚韧图研究成果并不多。因此本文对极小 t-坚韧图进行了研究，主要研究了几类笛卡尔积图和线图的极小 t-坚韧性，并构造了一类 k-正则的极小 $k/2$-坚韧图。文中提及的图均为简单无向图，未加说明的概念和术语见文献[7]。

2. 几类特殊的极小 *t*-坚韧图

2.1. 笛卡尔积图的极小 *t*-坚韧性

本节主要研究几类常见的笛卡儿积图，证明了完全图与完全图，路与圈的笛卡儿积图是极小 t-坚韧的。

定义 4 设 G_1 和 G_2 是两个点不交的简单图，G_1 和 G_2 的笛卡尔积 $G_1\times G_2$ 是一个简单图，其中 $V(G_1\times G_2)=V(G_1)\times V(G_2)$，并且对 $u_1,v_1\in V(G_1)$，$u_2,v_2\in V(G_2)$，$((u_1,u_2),(v_1,v_2))\in E(G_1\times G_2)\Leftrightarrow$ 或者 $u_1=v_1$，且 $(u_2,v_2)\in E(G_2)$ 或者 $u_2=v_2$ 且 $(u_1,v_1)\in E(G_1)$。

引理 1 [8]设 $K_m\times K_n\ (m,n\geq 2)$ 是两个完全图的笛卡尔积，则 $t(K_m\times K_n)=\dfrac{m+n}{2}-1$。

引理 2 [9]设 $G=K_m\times K_n$，其中 $m,n\geq 3$，则

1) G 是 $(m+n-2)$-正则的；

2) G 是 $(m+n-2)$-连通的。

定理 1 设 $K_m, K_n\ (m,n \ge 3)$ 是两个完全图，则 $K_m \times K_n$ 是极小 $\left(\frac{m+n}{2}-1\right)$-坚韧的。

证明 由引理 1 知，$t(K_m \times K_n) = \frac{m+n}{2} - 1$。再由引理 2，容易知道，对 $K_m \times K_n$ 的任意一点 $N(w)$ w，其邻点集即为 $K_m \times K_n$ 的一个 t-集，且 $|N(w)| = d(w) = m+n-2$，$w(K_m \times K_n - N(w)) = 2$。设 $e=(u,v)$ 是 $K_m \times K_n$ 的任意一条边，记 $H = K_m \times K_n - e$，则有 $d_H(u) = d_H(v) = m+n-3$。令 S 为 u 在 H 中的邻点集，则有 $|S| = m+n-3$，$\omega(H-S) = 2$。

这表明

$$t(H) \le \frac{|S|}{\omega(H-S)} = \frac{m+m-3}{2} < t(K_m \times K_n)$$

由定义 3 即得，$K_m \times K_n$ 是极小 $\left(\frac{m+n}{2}-1\right)$-坚韧的。

定理 2 设 P_2，$C_m\ (m \ge 3)$ 分别表示路和圈，其中 m 为奇数，则 $P_2 \times C_m$ 是极小 $\frac{m}{m-1}$-坚韧的。

证明 明显地，$P_2 \times C_m$ 是 3-正则图。设 $V(P_2) = \{1,2\}$，$V(C_m) = \{1,2,\cdots,m\}$，且在 C_m 中，点 i 的邻点是 $i-1$ 和 $i+1$，其中 $i = 1,2,\cdots,m$，并且关于模 m 同余。记 $V(P_2 \times C_m) = \{11,12,\cdots,1m;21,22,\cdots,2m\}$，则由坚韧度的定义，易知 $\{11,13,\cdots,1m;22,24,\cdots,2(m-1)\}$ 是 $P_2 \times C_m$ 的一个 t-集，$t(P_2 \times C_m) = \frac{m-1}{m}$。设 $e=(u,v)$ 是 $P_2 \times C_m$ 的任意一条边，则在 $P_2 \times C_m - e$ 中，u,v 均为 2 度点。因为 $|N(u)| = 2$，$\omega(P_2 \times C_m - e - N(u)) = 2$，所以有 $t(P_2 \times C_m - e) \le 1 < t(P_2 \times C_m)$。故结论成立。

当 $n > 2$ 或 m 为偶数时，$t(P_n \times C_m - e) \le t(P_n \times C_m)$，所以 $P_n \times C_m$ 不一定是极小 t-坚韧图。

2.2. 轮形图的极小 t-坚韧性

定义 5 设 G_1 和 G_2 是两个点不交的图，G_1 和 G_2 的联图，记为 $G_1 \vee G_2$，是指在 $G_1 \cup G_2$ 中将 G_1 的每个顶点与 G_2 的每个顶点之间用一条边连接起来所得到的图。

定义 6 称 K_1 和 C_n 的联图 $K_1 \vee C_n$ 为轮形图，记为 $W_{1,n}$。K_1 中的点称为 $W_{1,n}$ 的中心，与该点关联的边称为辐条。

定理 3 轮形图 $W_{1,n}\ (n \ge 4)$ 是极小 3/2-坚韧的。

证明 由轮形图的结构易知，其中心和 C_n 上任意两个不相邻的点构成一个 t-集，故有

$$t(W_{1,n-1}) = 3/2 \text{。}$$

对于任意的 $e \in E(W_{1,n})$，考虑以下两种情形。

情形 1　$e \in C_n$。设 $e=(u,v)$，则在 $W_{1,n-1} - e$ 中，u,v 均为 2 度点。因为 $\omega(W_{1,n} - e - N(u)) = 2$，所以 $t(W_{1,n} - e) \le 1 < t(W_{1,n})$。

情形 2　$e \notin C_n$。用 v 表示 e 在圈 C_n 上的任一端点，v 为 2 度点。与情形 1 同理，可知 $t(W_{1,n} - e) \le 1 < t(W_{1,n})$。

综上所述，结论成立。

2.3. 线图的极小 t-坚韧性

本节主要讨论三类线图的极小 t-坚韧性，证明了路，圈，完全二部图的线图是极小 t-坚韧的。

定义 7 一个图 G 的线图用 $L(G)$ 来表示，它的顶点集是 G 的边集，$L(G)$ 中任意两点之间是相邻的，

当且仅当 G 中对应的边是相邻的。

引理 3 [5]树 T 是极小 $\frac{1}{\Delta(T)}$-坚韧的弦图。

定理 4 设 $P_n(n\ge 3)$ 是 n 阶路，则其线图 $L(P_n)$ 是极小 1/2-坚韧的。

证明 由线图的定义，$L(P_n)$ 是 $n-1$ 阶的路。由引理 3，$P_n(n\ge 3)$ 是极小 1/2-坚韧的。

定理 5 设 $C_n(n\ge 3)$ 是 n 阶圈，则其线图 $L(C_n)$ 是极小 1-坚韧的。

证明 由圈的结构和坚韧度的定义易知，n 阶圈 C_n 是极小 1-坚韧的。又因为 $L(C_n)=C_n$，所以 $L(C_n)$ 是极小 1-坚韧的。

完全二部分图的线图 $L(K_{m,n})$ 是两个完全图的笛卡尔积，因此有如下结论：

定理 6 设 $K_{m,n}(m\ge 1,n\ge 2)$ 是完全二部分图，则其线图 $L(K_{m,n})$ 是极小 $\left(\frac{m+n}{2}-1\right)$-坚韧的。

3. 一类极小 *t*-坚韧正则图的构造

本节以轮形图为基础，构造了一类 k^2+1 阶的 k-正则的极小 $k/2$-坚韧图。

定义 8 设 $W_{1,k}(k\in Z_+)$ 是轮形图，将中心点之外的每个顶点都用一个 k 阶团替换，记这些团为 $C_1,C_2,\cdots,C_k$，任意两个团 C_i 和 C_j 之间恰有一条边相连，每个团中的每个顶点有且仅有一个邻点不在这个团中。将所得到的图记为 H_k，则 H_k 是 k^2+1 阶的 k-正则图。图 1 给出的是一个例子 H_5。

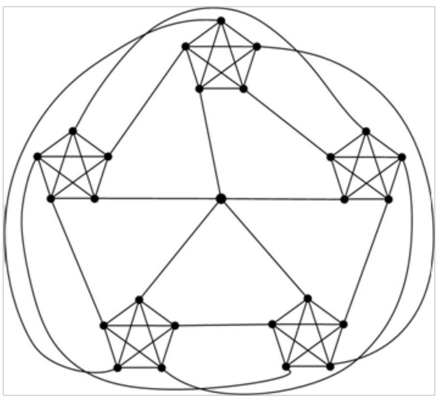

Figure 1. A 5-regular graph H_5 with order 26

图 1. 一个 26 阶的 5-正则图 H_5

定理 7 由定义 8 所构造的图 H_k 是 k^2+1 阶 k-正则的极小 $k/2$-坚韧图，其中 $k\in Z_+$。

证明 因为 H_k 是 k^2+1 阶 k-正则图，则对 H_k 的任意一点 u，其邻点集 $N(u)$ 为 H_k 的一个 t-集，且 $|N(u)|=d(u)=k$，$\omega(H_k-N(u))=2$，即 $t(H_k)=k/2$。设 $e=(u,v)$ 是 H_k 的任意一条边，则在 H_k-e 中，$d(u)=d(v)=k-1$。令 S 为 u 在 H_k-e 中的邻点集，则 $|S|=k-1$，$\omega((H_k-e)-S)=2$。易知 S 是 H_k-e 的一个 t-集，从而

$$t(H_k-e)=\frac{k-1}{2}<t(H_k)。$$

所以，H_k 是极小 $k/2$-坚韧的。

4. 总结

坚韧度是用来刻画网络抗毁性的一个重要参数。坚韧度与图的结构、哈密尔顿性结合的研究一直是

图论中的热点问题。本文证明了几类笛卡尔积图和线图是极小 t-坚韧的，并且构造出一类 k-正则的极小 $k/2$-坚韧图。极小 t-坚韧图是大量存在的，但是找到这些图比较困难。有关极小 t-坚韧图的构造与分类，仍有很多问题值得深入研究。

参考文献

[1] Chvátal, V. (1973) Tough Graphs and Hamiltonian Circuits. *Discrete Mathematics*, **5**, 215-228. https://doi.org/10.1016/0012-365X(73)90138-6

[2] Bauer, D., Broersma, H. and Schmeichel, E. (2006) Toughness in Graphs—A Survey. *Graphs and Combinatorics*, **22**, 1-35. https://doi.org/10.1007/s00373-006-0649-0

[3] Broersma, H., Engbers, E. and Trommel, H. (1999) Various Results on the Toughness of Graphs. *Networks*: *An International Journal*, **33**, 233-238. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0037(199905)33:3<233::AID-NET9>3.0.CO;2-A

[4] Katona, G.Y., Soltész, D. and Varga, K. (2018) Properties of Minimally t-Tough Graphs. *Discrete Mathematics*, **341**, 221-231. https://doi.org/10.1016/j.disc.2017.08.033

[5] Katona, G.Y. and Varga, K. (2018) Minimally Toughness in Special Graph Classes. arXiv:1802.00055.

[6] Katona, G.Y., Kovács, I. and Varga, K. (2017) The Complexity of Recognizing Minimally Tough Graphs. arXiv:1705.10570.

[7] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan London and Elsevier, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2

[8] Chvatal, V. (2006) Tough Graphs and Hamiltonian Circuits. *Discrete Mathematics*, **306**, 910-917. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.03.011

[9] Gunther, G. and Hartnell, B.L. (1991) On m-Connected and k-Neighbour-Connected Graphs. *Graph Theory*, *Combinatorics*, *and Applications*, **2**, 585-596.