Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2021, 11(1), 47-62
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2021.111007

Hans汉斯

犹豫模糊语言环境下基于Shapley值和三支决策的多属性群决策方法研究

王芹芹[1]，刘巧英[2]，鞠大伟[3]

[1]对外经济贸易大学，信息学院，北京
[2]惠民县孙武镇中学，山东 滨州
[3]邮政科学研究规划院，中国邮政集团有限公司邮政研究中心，北京
Email: 2512325243@qq.com

收稿日期：2020年12月30日；录用日期：2021年1月27日；发布日期：2021年2月3日

摘　要

针对属性值为犹豫模糊语言术语集且属性间相互关联的多属性群决策问题，本文提出了基于Shapley值的犹豫模糊语言三支决策模型，在给出每个方案行动策略的同时确定方案的排序。首先，基于决策矩阵和方案的两两比较偏好关系，考虑属性间的关联关系，利用Shapley值构建以群体非一致性最小化为目标的优化模型，求得属性权重和正负理想解；然后，基于求得的属性权重和正负理想解，构建每位决策者对每个方案的综合损失矩阵，以TOPSIS思想中的相对贴近度作为条件概率确定个体三支决策，并建立以个体和群体三支决策偏差最小化为目标的优化模型，求得群体三支决策，给出每个方案应采取的最佳行动策略；最后，运用相对贴近度对方案进行排序，给出行动策略为“接受”的方案集中方案的排序。

关键词

犹豫模糊语言术语集，Shapley值，多属性群决策，三支决策

Multi-Attribute Group Decision Making Method Based on Shapley Values and Three-Way Decisions under Hesitant Fuzzy Linguistic Environment

Qinqin Wang[1], Qiaoying Liu[2], Dawei Ju[3]

[1]School of Information Technology and Management, University of International Business and Economics, Beijing
[2]Sunwu Town Middle School of Huimin County, Binzhou Shandong
[3]Postal Scientific Research and Planning Academy, Postal Research Center of China Post Group Co., Ltd., Beijing

文章引用: 王芹芹, 刘巧英, 鞠大伟. 犹豫模糊语言环境下基于Shapley值和三支决策的多属性群决策方法研究[J]. 运筹与模糊学, 2021, 11(1): 47-62. DOI: 10.12677/orf.2021.111007

Email: 2512325243@qq.com

Received: Dec. 30th, 2020; accepted: Jan. 27th, 2021; published: Feb. 3rd, 2021

Abstract

In order to solve multi-attribute group decision making (MAGDM) problems in which the assessment values of alternatives are expressed by hesitant fuzzy linguistic term set (HFLTS) and the attributes are interrelated, this paper proposes a three-way decisions method based on Shapley values for MAGDM under hesitant fuzzy linguistic environment. Firstly, based on decision matrices and preference relations between alternatives, considering the interdependent or interactive phenomena among attributes, the Shapley values are used to construct the programming model by minimizing group inconsistency index to determine the attribute weights and positive (negative) ideal solutions. Then, based on the obtained attribute weights and positive (negative) ideal solutions, the comprehensive loss matrix of each alternative is constructed for each decision maker, and taking the relative closeness degree in TOPSIS method as conditional probability, the individual three-way decisions are obtained. Furthermore, to determine the group three-way decisions, a programming model is established by minimizing the deviations between individual and group three-way decisions. Finally, the relative closeness degrees of alternatives are calculated to obtain the ranking order of alternatives whose actions are acceptable.

Keywords

Hesitant Fuzzy Linguistic Term Set, Shapley Values, Multi-Attribute Group Decision Making, Three-Way Decisions

1. 引言

多属性决策(MADM)是决策研究领域的一个重要分支，根据某个备选方案在多个指标/属性下的评价信息综合评价该备选方案的“价值”[1]，将方案进行排序，给出最优方案。多属性群决策则是对传统的多属性决策的延伸，群决策弥补了单个决策者评价信息有限的不足，提高了决策结果的准确性。多属性决策的应用领域十分广泛，包括供应商选择[2]-[7]，设施选址[8]，信用风险评估[9]，人事招聘[10]，医院评价[11]，应急响应[6] [12]，军事[13] [14] [15]及其它领域等[16] [17] [18] [19]。在群决策中一个重要研究问题便是如何最小化个体决策和最终群决策的一致性，让个体决策者对方案的认同态度相差最小，降低最佳方案的争议性。如在企业员工招聘时，需要 4 位经理为员工打分，假设打分结果分别为 50，82，86，91，显然最低分和最高分相差较大，如何综合经理打分尤为重要。根据已有研究[20] [21] [22]，可以通过建立最小化个体和群体决策偏差的目标优化模型求解得出最终结果。

在多属性决策中，一个基本问题便是采取何种数据类型对方案属性进行评价，通常包括定量或定性的评价方式。前者目前已经有广泛的研究，如常见的实数或区间类型[13]。然而，面对日益复杂的决策环境，不确定性逐渐成为决策面临的一大难题，决策者由于自身知识水平、经验和判断能力有限，对于一些决策指标往往无法提供准确的数值评价，反而使用定性的语言评价更符合决策者的评价习惯，结果也

更为准确。Zadeh [23]开创性地提出了使用模糊语言定性评价的方法，决策者使用一个词或一个句子进行评价，如类似“非常好”或“非常差”的表示形式。但是仅使用一个词语来评价所提供的信息是极其匮乏和不精确的，因此 Rodriguez *et al.* [24]提出了犹豫模糊语言术语集(HFLTS)的概念，决策者可以使用多个词语进行评价，可以借助“高于”、“低于”、“不差于”等关键词来表述，从而概括其代表的多个词语。如对于给定的语言术语集 $S=\{s_0=\text{非常差}, s_1=\text{差}, s_2=\text{中}, s_3=\text{好}, s_4=\text{非常好}\}$，决策者的评价为“高于中等”，则用犹豫模糊语言术语集可表示为 $h_S=\{s_3, s_4\}$。多属性决策中的另一问题是属性之间是否相互关联。传统的多属性决策默认属性之间是相互独立的，即互不影响，但在实际问题面前该假设往往缺乏真实性，如评价一家医院时，若其属性包括“住院成本”和“设施质量”，可知两者之间具有一定的相关关系，住院成本高一般意味着设施质量好，反之，住院成本低意味着设施质量差。目前，大量的研究都局限于“属性之间相互独立”这一假设[17] [25] [26] [27]，难免会使决策结果产生偏差，也有部分研究讨论了属性间的相关关系[21] [28] [29] [30] [31]，其中常使用模糊测度和 Shapley 值、Choquet 积分对其进行度量，并产生了较好结果。

传统的多属性决策是一个“二支决策”，其模型结果提供的是方案从“优”到“差”的排序，即排在第一位的为最优方案，并且仅接受该方案，其他方案均拒绝。但事实上，某些方案总体评价值也较高，只是略低于最优方案，其中也不排除有些决策者因自身能力不足而导致对方案误判的可能，所以为了提高整体的决策精确度，方案的可选范围不应仅限于“接受”和“拒绝”，还应包括“待考虑”，需借助其他信息对“待考虑”的方案做进一步评价。Yao [32]基于决策理论粗糙集(DTRS)提出了三支决策方法，其解决了传统多属性决策只能接受或拒绝一个方案的不足，将方案可采取行动划分为积极域、边界域和消极域，分别对应方案的接受、待考虑、拒绝三种决策[33]。对于不同的决策问题，三支决策可根据实际情况进行语义上的解读，具有较高的易理解性。如针对空袭问题需要选择首先攻击哪一个威胁飞行物，如飞行物“导弹”属于积极域，则代表应该首先攻击“导弹”[16]。三支决策的思想为：使用损失函数对每个方案分别采取三种行动的损失进行衡量，然后根据贝叶斯理论，具有最小损失的行动为方案采取的最佳行动[34]。基于决策理论粗糙集(DTRS)以及其扩展形式的三支决策已经被应用到诸多领域，如能源项目配置[35]，石油开发投资[36]，医疗诊断[37] [38] [39]，政府石油风险投资[40]，公私合营项目投资[22]，聚类分析应用[20] [41] [42]，环境预防[43]，文本分类[44]，垃圾邮件过滤[45]，恶意软件分析[46]，人脸识别[47] [48]。

目前关于三支决策的研究中，损失函数矩阵和属性权重往往直接由决策者主观给出，且较少将三支决策拓展到犹豫模糊语言环境下求解实际问题，以及损失矩阵中的最大值和最小值直接根据属性评价值确定，存在较多局限。因此，本文将多属性群决策和三支决策结合，扩展三支决策模型。首先在犹豫模糊语言环境下给出决策矩阵，并使用 Shapley 衡量属性相关性，建立以群体非一致性最小化为目标的优化模型客观求解属性权重和正负理想解；然后根据个人决策矩阵和模型求解结果，构建个人综合损失矩阵，建立三支决策模型求出各方案的条件概率和阈值，确定个体三支决策，并以此构建以个体和群体三支决策偏差最小化为目标的优化模型，求得群体三支决策。最后，利用 TOPSIS 思想，通过计算相对贴近度对方案进行排序，在给出行动策略的同时给出最优方案。

2. 理论知识

2.1. 语言术语集

语言术语集是一个由奇数个数语言术语组成的有限集合，即决策者使用类似“非常差、差、中、好、非常好”的语言术语对方案进行评价。

定义 1 [49] [50] [51] [52]：令 $S=\{s_t \mid t=0,1,\cdots,\tau\}$ （τ 为正偶整数)为一个语言术语集，对于任意两个语言术语 $s_\alpha,s_\beta\in S$， $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$，存在以下运算性质：

1) 最大值： $\max(s_\alpha,s_\beta)=s_\alpha$，其中 $s_\alpha\ge s_\beta$

2) 最小值： $\min(s_\alpha,s_\beta)=s_\alpha$，其中 $s_\alpha\le s_\beta$

3) $s_\alpha\oplus s_\beta=s_{a+\beta}$

4) $\lambda s_\alpha=s_{\lambda a}$

5) $\lambda(s_\alpha\oplus s_\beta)=\lambda s_\alpha\oplus\lambda s_\beta$

上述语言术语下标均为离散数值，这使得进行一些运算时，最终的计算结果往往与最初的语言术语集不匹配，如出现 $s_{0.5},s_{3.3}$ 下标为连续数值或下标超出原术语下标最大值。因此，Xu [52]将离散语言术语集拓展到连续语言术语集 $S=\{s_t \mid t\in[-q,q]\}$ （$q>\tau$ 且 q 为充分大的正整数)，并将其称为虚拟语言术语集，其只出现在运算过程中，保证运算有意义。

定义 2 [52]：令 $S=\{s_t \mid t=0,1,\cdots,\tau\}$ （τ 为正偶整数)为一个语言术语集，对于任意两个语言术语 $s_\alpha,s_\beta\in S$， s_α,s_β 之间的距离表示为：

$$d_s(s_\alpha,s_\beta)=\frac{|\alpha-\beta|}{\tau+1} \tag{1}$$

其中， α,β 为术语下标， $\tau+1$ 为 S 包含的术语总数。

2.2. 犹豫模糊语言术语集

由于决策环境的复杂和不确定性，仅使用一个语言术语评价方案是不充分和不准确的，因此，Rodriguez *et al.* [24]提出了犹豫模糊语言术语集(HFLTS)的概念，决策者对某方案使用多个语言术语并构成一个集合，即犹豫模糊语言术语集。

定义 3 [49] [50] [51]：令 $S=\{s_t \mid t=0,1,\cdots,\tau\}$ 为虚拟语言术语集， $X=\{x_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为备选方案集合，犹豫模糊语言术语集基于 S 对 X 评价可表示为 $H_S=\{\langle x_i,h_S(x_i)\rangle \mid x_i\in X\}$，其中 $h_S(x_i)$ 是对方案 x_i 的评价集合，也就是本文的犹豫模糊语言术语集，包含多个 S 中连续的语言术语，表示为 $h_i=h_S(x_i)=\{s_l(x_i) \mid s_l(x_i)\in S,l=1,\cdots L\}$，$L$ 为 h_i 包含的术语个数， h_i 中术语按从小到大升序排列。

通常情况下，不同决策者对方案评价使用的语言术语个数是不同的，为了后续便于对决策矩阵进行运算，需要将其标准化，以包含术语个数最多的犹豫模糊语言术语集为标准，使各集合包含术语个数相同，Zhu 和 Xu [53]提出两种解决方法：

(α-标准化)：从较多术语个数的犹豫模糊语言术语集中移除一些术语。

(β-标准化)：向较少术语个数的犹豫模糊语言术语集中添加一些术语(本文采用 β-标准化)。

定义 4 [53]：假设 h 为一个犹豫模糊集，将包含最大的 $s_\alpha\in h$ 定义为 $h^{\max}$，包含最小的 $s_\alpha\in h$ 定义为 $h^{\min}$，可利用 $h^{\max},h^{\min}$ 计算 $h^{\mathrm{ave}}=\frac{1}{2}(h^{\max}\oplus h^{\min})$ 用于 β-标准化，且保持 h 中术语为升序排列。

假设对于 h_i,h_j 两个标准化的犹豫模糊语言术语集， $\lambda\in[0,1]$，其存在以下运算[49]：

1) $h_i\oplus h_j=\bigcup_{s_\alpha\in h_i,s_\beta\in h_j}\{s_a\oplus s_\beta\}=\bigcup_{s_\alpha\in h_i,s_\beta\in h_j}\{s_{a+\beta}\}$

2) $\lambda h_i=\bigcup_{s_\alpha\in h_i}\{\lambda s_\alpha\}=\bigcup_{s_\alpha\in h_i}\{s_{\lambda a}\}$

定义 5 [52]：对于两个标准化的犹豫模糊语言术语集 h_i,h_j，两者之间的欧几里得距离公式定义为：

$$d\left(h_i,h_j\right)=\sqrt{\sum_{l=1,s_{\alpha l}\in h_i,s_{\beta l}\in h_j}^{\#\bar{L}} d_s\left(s_{\alpha l},s_{\beta l}\right)^2 \Big/ \#\bar{L}} \tag{2}$$

其中，$\#\bar{L}$ 为标准化后的所有犹豫模糊术语集包含的语言术语个数，$s_{\alpha l},s_{\beta l}$ 分别为 h_i,h_j 中相同位置的术语，$d_s\left(s_{\alpha l},s_{\beta l}\right)$ 表示 $s_{\alpha l},s_{\beta l}$ 之间的距离(见定义 2)，然后求平方和再开根号。

2.3. 模糊测度和 Shapley 值

在多属性决策环境下，属性之间往往具有相关性，为了更加符合实际情况，可使用模糊测度来度量此相关关系，得出属性的实际价值。

定义 6 [6] [54]：在有限集合 N 下的模糊测度为一个运算法则 $\mu:P(N)\to[0,1]$，$P(N)$ 为 N 的真子集，满足以下性质：

1) $\mu(\varnothing)=0,\mu(N)=1$

2) 如果 $A,B\in P(N)$ 且 $A\in B$，则 $\mu(A)\le\mu(B)$

定义 7 [51] [55]：利用模糊测度剔除其他属性对 i 的相关影响后，i 的 Shapley 值即可理解为 i 的价值或重要程度：

$$\varphi_i^{Sh}(\mu,N)=\sum_{T\subseteq N\setminus i}\frac{\left(|N|-1-|T|\right)!|T|!}{|N|!}\times\left(\mu\left(i\cup T\right)-\mu(T)\right),\forall i\in N \tag{3}$$

其中，$|N|,|T|$ 为集合 N,T 的元素个数。

2.4. 三支决策

三支决策是由 Yao [32]提出的基于决策理论粗糙集(DTRS)的新型决策方法，其为决策问题提供了更多元化的解决方案。它将备选方案划分为接受、待考虑、拒绝三种集合，与传统的多属性决策如 LINMAP、TOPSIS 最终仅提供一个最优方案相比更具有灵活性，在一定程度上避免了放弃原本成效较好的方案，决策得到了优化。

定义 8 [56]：令 U 为一个有限非空集合，$R\subseteq U\times U$ 为等价关系，定义 $apr=(U,R)$ 为一个粗糙近似空间。U 被 R 划分后的每一部分表示为 $[x]$。对于 $\forall C\in U$，C 的上下近似概率定义为：

$$\overline{apr}(C)=\left\{x\in U \mid Pr\left(C\mid[x]\right)>\beta\right\}$$

$$\underline{apr}(C)=\left\{x\in U \mid Pr\left(C\mid[x]\right)\ge\alpha\right\}$$

$Pr\left(C\mid[x]\right)$ 为当 x 发生是 C 发生的条件概率，α,β 为通过三支决策下的损失矩阵推导得出的阈值。U 通常可以被阈值 α,β 划分为三个区域，分别为：

$$POS(C)=\left\{x\in U \mid Pr\left(C\mid[x]\right)\ge\alpha\right\}$$

$$BND(C)=\left\{x\in U \mid \beta<Pr\left(C\mid[x]\right)<\alpha\right\}$$

$$NEG(C)=\left\{x\in U \mid Pr\left(C\mid[x]\right)<\beta\right\}$$

POS、BND、NEG 分别表示接受域、边界域、拒绝域。

定义 9 [32]：为了更好得解释阈值 α,β 与三个区域之间的关系，Yao [32]基于贝叶斯理论提出了决策理论粗糙集。一个粗糙集模型包括三个行动和两个状态，分别表示为 $A=\left\{a_P,a_B,a_N\right\}$，$\Omega=\{C,\neg C\}$。$a_P,a_B,a_N$ 三个行动分别表示 $x\in POS(C)$，$x\in BND(C)$，$x\in NEG(C)$；$C,\neg C$ 分别表示对象处于 C 和不处于 C 状态。A 和 Ω 构成如表 1 的损失矩阵。

Table 1. The loss function matrix
表 1. 损失矩阵

	$C(P)$	$\neg C(N)$
a_P	λ_{PP}	λ_{PN}
a_B	λ_{BP}	λ_{BN}
a_N	λ_{NP}	λ_{NN}

损失矩阵满足：$\lambda_{PP} \le \lambda_{BP} < \lambda_{NP}$，$\lambda_{NN} \le \lambda_{BN} < \lambda_{PN}$。

阈值α,β,γ与三个区域之间的关系通过损失矩阵推导可表示为：

(P1)如果$Pr(C|[x]) \ge \alpha$且$Pr(C|[x]) \ge \gamma$，则$x \in POS(C)$；

(B1)如果$Pr(C|[x]) \le \alpha$且$Pr(C|[x]) \ge \beta$，则$x \in BND(C)$；

(N1)如果$Pr(C|[x]) \le \beta$且$Pr(C|[x]) \le \gamma$，则$x \in NEG(C)$。

阈值α,β,γ计算公式为：

$$\alpha = \frac{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN})}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})} \tag{4}$$

$$\beta = \frac{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN})}{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})} \tag{5}$$

$$\gamma = \frac{(\lambda_{PN} - \lambda_{NN})}{(\lambda_{PN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{PP})} \tag{6}$$

为了满足模型成为三支决策，需满足$0 \le \beta < \gamma < \alpha \le 1$，所以最终可将(P1) (B1) (N1)式简写为[57]：

(P2) 如果$Pr(C|[x]) \ge \alpha$，则$x \in POS(C)$；

(B2) 如果$\beta < Pr(C|[x]) < \alpha$，则$x \in BND(C)$；

(N2) 如果$Pr(C|[x]) \le \beta$，则$x \in NEG(C)$。

3. 基于 Shapley 值的犹豫模糊语言三支决策模型

3.1. 相关符号描述

假设$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$为备选方案集，$A_i (i = 1,2,\cdots,m)$是备选方案集中第$i$个方案；$C = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$为属性集，$C_j (j = 1,2,\cdots,n)$为属性集中的第$j$个属性，$p = \{p_1, p_2, \cdots, p_t\}$为决策者集合，$p_k (k = 1,2,\cdots,t)$是第$k$位决策者，$p_k$给出的决策矩阵为$H_k = (h_{ij}^k)_{m*n}$，$h_{ij}^k$为一个犹豫模糊语言术语集。$p_k$给出的两两方案比较偏好关系为$\Omega^k = \{\langle (A_i, A_j), t_k(i,j) \rangle | A_i \succ A_j \text{的程度值为} t_k(i,j), 0 \le t_k \le 1\}$，属性偏好关系为$\Lambda^{\varphi}$。

各属性对应的权重为$\varphi_C^{Sh} = \{\varphi_{c_1}^{Sh}, \varphi_{c_2}^{Sh}, \cdots, \varphi_{c_n}^{Sh}\}$，且$0 \le \varphi_{c_j}^{Sh} \le 1, \sum_{j=1}^{n} \varphi_{c_j}^{Sh} = 1$，即通常所谓的$W$，但本文使用的权重为考虑了属性相关性后改良的权重，通过建立决策模型可求出。为了精确表示各属性的重要程度，决策者可以根据自身知识和经验给出属性权重的偏好关系，通常偏好信息结构Λ^{φ}用以下五种形式给出[58]：

① 排序结构：$\Lambda_1^{\varphi} = \varphi_{c_i}^{Sh} \ge \varphi_{c_j}^{Sh}$

② 强排序结构：$\Lambda_2^{\varphi} = \beta \le \varphi_{c_i}^{Sh} - \varphi_{c_j}^{Sh} \le \alpha$

③ 乘积结构：$\Lambda_3^{\varphi} = \varphi_{c_i}^{Sh} \ge \alpha \varphi_{c_j}^{Sh}$

④ 区间结构：$\Lambda_4^{\varphi} = \beta \le \varphi_{c_i}^{Sh} \le \alpha$

⑤ 差值排序结构：$\Lambda_5^{\varphi} = \varphi_{c_i}^{Sh} - \varphi_{c_j}^{Sh} \ge \varphi_{c_k}^{Sh} - \varphi_{c_l}^{Sh}$

3.2. 属性权重和正、负理想解的确定

1) 假设决策者 p_k 的决策矩阵如表 2 所示。

Table 2. The decision matrix of the decision maker p_k
表 2. 第 k 个决策者给出的决策矩阵

	C_1	C_2	$\cdots$	C_n
A_1	h_{11}^k	h_{12}^k	$\cdots$	h_{1n}^k
A_2	h_{21}^k	h_{22}^k	$\cdots$	h_{2n}^k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	h_{m1}^k	h_{m2}^k	$\cdots$	h_{mn}^k

2) 标准化决策矩阵 H_k

由于 $\left(h_{ij}^k\right)_{m*n}$ 存在语言术语个数不同的可能，需要对表 2 决策矩阵标准化，设标准化后的决策矩阵为 $\overline{H_k} = \left(\overline{h_{ij}^k}\right)_{m*n}$，如表 3 所示。

Table 3. The normalized decision matrix of the decision maker p_k
表 3. 标准化的决策者 p_k 的决策矩阵

	C_1	C_2	$\cdots$	C_n
A_1	$\overline{h_{11}^k}$	$\overline{h_{12}^k}$	$\cdots$	$\overline{h_{1n}^k}$
A_2	$\overline{h_{21}^k}$	$\overline{h_{22}^k}$	$\cdots$	$\overline{h_{2n}^k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	$\overline{h_{m1}^k}$	$\overline{h_{m2}^k}$	$\cdots$	$\overline{h_{mn}^k}$

3) 计算每个方案到正、负理想解的距离

利用定义 5 衡量方案到正、负理想解的距离。

① 设模型求得的正理想解为：

$H^+ = \left(h_1^+, h_2^+, \cdots, h_n^+\right)$，分量为 $h_j^+ = \left\{s_{\beta 1}, s_{\beta 2}, \cdots, s_{\beta \# L}\right\}$，其中 $\# L$ 为标准化后 $\overline{h_{ij}^k}$ 包含的术语个数。

② 负理想解为：

$H^- = \left(h_1^-, h_2^-, \cdots, h_n^-\right)$，分量为 $h_j^- = \left\{s_{\beta 1}, s_{\beta 2}, \cdots, s_{\beta \# L}\right\}$，其中 $\# L$ 为标准化后 $\overline{h_{ij}^k}$ 包含的术语个数。

决策者 p_k 对方案 A_i 的评价值为 $\overline{h_i^k}=\left(\overline{h_{i1}^k},\overline{h_{i2}^k},\cdots,\overline{h_{in}^k}\right)$，分量 $\overline{h_{ij}^k}=\left\{s_{\alpha 1}^k,s_{\alpha 2}^k,\cdots,s_{\alpha \# L}^k\right\},j=1,2,\cdots,n$。

③ 则 A_i 距 H^+ 的距离为：

$$D_i^{k+}=d\left(A_i^k,H^+\right)=\sum_{j=1}^n \varphi_{c_j}^{Sh}\cdot d\left(\overline{h_j^k},h_j^+\right) \tag{7}$$

④ A_i 距 H^- 的距离为：

$$D_i^{k-}=d\left(A_i^k,H^-\right)=\sum_{j=1}^n \varphi_{c_j}^{Sh}\cdot d\left(\overline{h_j^k},h_j^-\right) \tag{8}$$

4) 计算决策者 p_k 的决策矩阵和偏好关系的一致性和非一致性

假设决策者 p_k 关于两两方案间的偏好关系为 $\Omega^k=\left\{\left(A_i,A_j\right),t_k\left(i,j\right)\mid i,j=1,2,\cdots,m\right\}$。

基于正理想解 H^+，构建决策者 p_k 的决策矩阵和偏好关系的非一致性 $\left(\Phi_{ij}^{k+}\right)^-$：

$$\left(\Phi_{ij}^{k+}\right)^-=\left(D_i^{k+}-D_j^{k+}\right)^-=\begin{cases}0, & D_i^{k+}<D_j^{k+}\\ t_k\left(i,j\right)\times\left(D_i^{k+}-D_j^{k+}\right), & D_i^{k+}\ge D_j^{k+}\end{cases} \tag{9}$$

可将上式简记为 $\left(\Phi_{ij}^{k+}\right)^-=\max\left\{0,t_k\left(i,j\right)\times\left(D_i^{k+}-D_j^{k+}\right)\right\}=t_k\left(i,j\right)\cdot\max\left\{0,D_i^{k+}-D_j^{k+}\right\}$ (10)

决策者 p_k 的总体非一致性 B^{k+} 为：

$$B^{k+}=\sum_{\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k}\left(\Phi_{ij}^{k+}\right)^-=\sum_{\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k}t_k\left(i,j\right)\cdot\max\left\{0,D_i^{k+}-D_j^{k+}\right\} \tag{11}$$

① 考虑所有 t 个决策者，基于正理想解 H^+，群体非一致性 B^+ 为：

$$B^+=\sum_{k=1}^t B^{k+}=\sum_{k=1}^t\sum_{\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k}\left(\Phi_{ij}^{k+}\right)^-=\sum_{k=1}^t\sum_{\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k}t_k\left(i,j\right)\cdot\max\left\{0,D_i^{k+}-D_j^{k+}\right\} \tag{12}$$

② 同理，基于负理想解 H^- 的群体非一致性 B^- 为：

$$B^-=\sum_{k=1}^t B^{k-}=\sum_{k=1}^t\sum_{\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k}\left(\Phi_{ij}^{k-}\right)^-=\sum_{k=1}^t\sum_{\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k}t_k\left(i,j\right)\cdot\max\left\{0,D_j^{k-}-D_i^{k-}\right\} \tag{13}$$

③ 基于正理想解 H^+，群体一致性 G^+ 为：

$$G^+=\sum_{k=1}^t G^{k+}=\sum_{k=1}^t\sum_{\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k}\left(\Phi_{ij}^{k+}\right)^+=\sum_{k=1}^t\sum_{\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k}t_k\left(i,j\right)\cdot\max\left\{0,D_j^{k+}-D_i^{k+}\right\} \tag{14}$$

④ 基于负理想解 H^-，群体一致性 G^- 为：

$$G^-=\sum_{k=1}^t G^{k-}=\sum_{k=1}^t\sum_{\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k}\left(\Phi_{ij}^{k-}\right)^+=\sum_{k=1}^t\sum_{\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k}t_k\left(i,j\right)\cdot\max\left\{0,D_i^{k-}-D_j^{k-}\right\} \tag{15}$$

5) 建立单目标优化模型

$$\min\left\{B^++B^-\right\}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}G^+-B^+\ge h^+\\ G^--B^-\ge h^-\\ \mu\left(c_j\right)\in\Lambda^\mu,0\le\mu\left(c_j\right)\le 1 \quad \forall c_j\in C\\ \sum_{j=1}^n\varphi_{c_j}^{Sh}=1\\ \mu\left(S\right)\le\mu\left(Q\right) \quad \forall S,Q\subseteq C,S\subseteq Q\\ \varphi_{c_j}^{Sh}=\sum_{T\subseteq N\setminus j}\dfrac{\left(\left|N\right|-1-\left|T\right|\right)!\left|T\right|!}{\left|N\right|!}\times\left(\mu\left(j\cup T\right)-\mu\left(T\right)\right) \quad \forall c_j\in C\end{cases} \tag{16}$$

其中，该优化模型的目标函数为最小化群体非一致性$\left\{B^{+}+B^{-}\right\}$，而且在约束条件中限制群体一致性高于非一致性，$h^{+},h^{-}$事先有决策者根据经验和偏好给出，可取 0.001。

为了方便软件求解，令$\lambda_{ij}^{k+}=\max\left\{0,D_i^{k+}-D_j^{k+}\right\},\lambda_{ij}^{k-}=\max\left\{0,D_j^{k-}-D_i^{k-}\right\}$，则对$\forall\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k$，$\lambda_{ij}^{k+},\lambda_{ij}^{k-}\geq 0$，且$\lambda_{ij}^{k+}\geq D_i^{k+}-D_j^{k+},\lambda_{ij}^{k-}\geq D_j^{k-}-D_i^{k-}$，则上述模型可重写为：

$$\min\left\{\sum_{k=1}^{t}\sum_{(A_i,A_j)\in\Omega^k}t_k\left(i,j\right)\cdot\lambda_{ij}^{k+}+\sum_{k=1}^{t}\sum_{(A_i,A_j)\in\Omega^k}t_k\left(i,j\right)\cdot\lambda_{ij}^{k-}\right\}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{k=1}^{t}\sum_{(A_i,A_j)\in\Omega^k}t_k\left(i,j\right)\times\left(D_j^{k+}-D_i^{k+}\right)\geq h^{+}\\ \sum_{k=1}^{t}\sum_{(A_i,A_j)\in\Omega^k}t_k\left(i,j\right)\times\left(D_i^{k-}-D_j^{k-}\right)\geq h^{-}\\ \lambda_{ij}^{k+}-\left(D_i^{k+}-D_j^{k+}\right)\geq 0\quad (i,j)\in\left\{(i,j)\mid\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k\right\},k=1,2,\cdots,t\\ \lambda_{ij}^{k-}-\left(D_j^{k-}-D_i^{k-}\right)\geq 0\quad (i,j)\in\left\{(i,j)\mid\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k\right\},k=1,2,\cdots,t\\ \lambda_{ij}^{k+},\lambda_{ij}^{k-}\geq 0\quad (i,j)\in\left\{(i,j)\mid\left(A_i,A_j\right)\in\Omega^k\right\},k=1,2,\cdots,t\\ \mu\left(c_j\right)\in\Lambda^{\mu},0\leq\mu\left(c_j\right)\leq 1\quad\forall c_j\in C\\ \sum_{j=1}^{n}\varphi_{c_j}^{Sh}=1\\ \mu(S)\leq\mu(Q)\quad\forall S,Q\subseteq C,S\subseteq Q\\ \varphi_{c_j}^{Sh}=\sum_{T\subseteq N\setminus j}\frac{\left(|N|-1-|T|\right)!|T|!}{|N|!}\times\left(\mu\left(j\cup T\right)-\mu(T)\right)\quad\forall c_j\in C\end{cases}\tag{17}$$

6) 计算得到属性权重和正、负理想解

利用 LINGO 求解上述模型，可得到属性权重$\varphi_{c_j}^{Sh}$和正理想解H^{+}和负理想解H^{-}。

3.3. 损失矩阵的确定

决策者p_k的方案A_i在属性C_j下损失矩阵由对应决策值$\overline{h_{ij}^k}$给出，为了表示相对损失差值，转换后的损失矩阵如表 4 所示。

Table 4. The loss function matrix of the A_i under C_j for decision maker p_k

表 4. 决策者p_k的方案A_i在属性C_j下的损失矩阵

	$C_j(P)$	$\neg C_j(N)$
a_P	0	$d\left(\overline{h_{ij}^k},h_{\max}^j\right)$
a_B	$\sigma d\left(\overline{h_{ij}^k},h_{\min}^j\right)$	$\sigma d\left(\overline{h_{ij}^k},h_{\max}^j\right)$
a_N	$d\left(\overline{h_{ij}^k},h_{\min}^j\right)$	0

$h_{\min}^j,h_{\max}^j$为决策者p_k在属性C_j下所有方案评价值的最劣值和最优值，可分别看作负理想解H^{-}和正理想解H^{+}的第j个分量，即

$$h_{\min}^j=h_j^{-}=\left\{s_{\beta 1},s_{\beta 2},\cdots,s_{\beta\#L}\right\},h_{\max}^j=h_j^{+}=\left\{s_{\beta 1},s_{\beta 2},\cdots,s_{\beta\#L}\right\}。$$

σ为规避风险系数，表示决策者的风险态度，由决策者给出(如$\sigma=0.35$)。为了符合三支决策，需满足

$0<\sigma<0.5$ [56]。

决策者 p_k 损失矩阵也可以表示为：

$$\lambda\left(\overline{h_{ij}^k}\right)=\begin{pmatrix}\lambda_{PP}^{ijk} & \lambda_{PN}^{ijk}\\ \lambda_{BP}^{ijk} & \lambda_{BN}^{ijk}\\ \lambda_{NP}^{ijk} & \lambda_{NN}^{ijk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & d\left(\overline{h_{ij}^k},h_{\max}^j\right)\\ \sigma d\left(\overline{h_{ij}^k},h_{\min}^j\right) & \sigma d\left(\overline{h_{ij}^k},h_{\max}^j\right)\\ d\left(\overline{h_{ij}^k},h_{\min}^j\right) & 0\end{pmatrix} \tag{18}$$

利用 Shapley 值集结方案 A_i 在所有属性下的损失矩阵，得出决策者 p_k 对 A_i 的综合损失矩阵记为 λ_i^k：

$$\lambda_i^k=\begin{pmatrix}\lambda_{PP}^{ik} & \lambda_{PN}^{ik}\\ \lambda_{BP}^{ik} & \lambda_{BN}^{ik}\\ \lambda_{NP}^{ik} & \lambda_{NN}^{ik}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_j\varphi_{c_j}^{Sh}\lambda_{PP}^{ijk} & \sum_j\varphi_{c_j}^{Sh}\lambda_{PN}^{ijk}\\ \sum_j\varphi_{c_j}^{Sh}\lambda_{BP}^{ijk} & \sum_j\varphi_{c_j}^{Sh}\lambda_{BN}^{ijk}\\ \sum_j\varphi_{c_j}^{Sh}\lambda_{NP}^{ijk} & \sum_j\varphi_{c_j}^{Sh}\lambda_{NN}^{ijk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & D_i^{k+}\\ \sigma D_i^{k-} & \sigma D_i^{k+}\\ D_i^{k-} & 0\end{pmatrix} \tag{19}$$

3.4. 阈值和条件概率的确定

决策者 p_k 对于方案 A_i 的阈值分别为：

$$\alpha_i^k=\frac{\left(\lambda_{PN}^{ik}-\lambda_{BN}^{ik}\right)}{\left(\lambda_{PN}^{ik}-\lambda_{BN}^{ik}\right)+\left(\lambda_{BP}^{ik}-\lambda_{PP}^{ik}\right)}=\frac{(1-\sigma)D_i^{k+}}{(1-\sigma)D_i^{k+}+\sigma D_i^{k-}} \tag{20}$$

$$\beta_i^k=\frac{\left(\lambda_{BN}^{ik}-\lambda_{NN}^{ik}\right)}{\left(\lambda_{BN}^{ik}-\lambda_{NN}^{ik}\right)+\left(\lambda_{NP}^{ik}-\lambda_{BP}^{ik}\right)}=\frac{\sigma D_i^{k+}}{\sigma D_i^{k+}+(1-\sigma)D_i^{k-}} \tag{21}$$

利用相对贴近度 $R\left(A_i^k\right)=\dfrac{D_i^{k-}}{D_i^{k-}+D_i^{k+}}$，表示方案 A_i 处于状态 C 的概率，可以近似表示条件概率 $Pr\left(C\mid A_i^k\right)$。

3.5. 个体决策准则

决策者 p_k 的最终三支决策可表述为：

(P3) 如果 $Pr\left(C\mid A_i^k\right)\geq\alpha_i^k$，则 $A_i^k\in POS(C)$，应该接受该方案；

(B3) 如果 $\beta_i^k<Pr\left(C\mid A_i^k\right)<\alpha_i^k$，则 $A_i^k\in BND(C)$，是否接受该方案还需其他信息进一步分析；

(N3) 如果 $Pr\left(C\mid A_i\right)\leq\beta_i^k$，则 $A_i^k\in NEG(C)$，应该拒绝该方案。

3.6. 群体三支决策

由上述三支决策可得出每个决策者 $p_k\left(k=1,2,\cdots,t\right)$ 的决策结果，但由于不同决策者自身知识水平、经验判断的差异，使得每个决策者的结果相同或相差很小的可能性很低，所以为了使群体的一致性达到较好成效，需要再次建立优化模型，得到群体决策结果，并扩展得出方案的排序。

1) 标号个体决策结果

基于 3.5 小节的结果，为每个决策者 $p_k\left(k=1,2,\cdots,t\right)$ 对方案 $A_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$ 的决策结果进行标号，即用数值表示。将属于 $POS(C)$ 的所有方案标号为 1，属于 $BND(C)$ 的所有方案标号为 0，属于 $NEG(C)$ 的所有方案标号为−1。同样，假设最终群决策对方案的接受、待考虑、拒绝也分别用 1，0，−1 进行表示。

2) 构建优化模型

可知应该让群体的决策结果和个体的决策结果尽可能接近，接近程度可用下式衡量：

$$d_i=\sum_{k=1}^t w_k\left(\left|r_{ki}-r_i\right|\right) \tag{22}$$

其中，$d_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$表示对于方案$A_i$，群体决策与所有个体决策的总体差异性；$w_k\left(k=1,2,\cdots,t\right)$为决策者$p_k$的权重，可通过模型客观求出；$r_{ki}$为决策者$p_k$决策结果对方案$A_i$的标号为已知，即由3.5小节个体决策结果来确定，如$r_{23}=1$表示为决策者p_2结果中方案A_3标号为1，即应该接受方案A_3；r_i表示群体对方案A_i的标号。

建立以个体和群体三支决策偏差最小化为目标的优化模型，如下所示：

$$\min\sum_{i=1}^{m}\sum\nolimits_{k=1}^{t} w_k\left(\left|r_{ki}-r_i\right|\right)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} r_i=-1 \text{ or } 0 \text{ or } 1, i=1,2,\cdots,m \\ 0\le w_k\le 1, k=1,2,\cdots,t \\ \sum\nolimits_{k=1}^{t} w_k=1 \end{cases} \tag{23}$$

3) 确定群体三支决策

利用LINGO求解上述模型，求得决策者权重和方案的标号值，其最终的三支决策可表述为：

(P4) 如果$r_i=1$，则$A_i\in POS\left(C\right)$，应该接受该方案；

(B4) 如果$r_i=0$，则$A_i\in BND\left(C\right)$，是否接受该方案还需其他信息进一步分析；

(N4) 如果$r_i=-1$，则$A_i\in NEG\left(C\right)$，应该拒绝该方案。

4) 结合三支决策结果给出最佳方案

由于三支决策结果中存在多种方案属于相同行动域的可能，如结果为应该接受A_1,A_3,A_4，为了提供更精确的决策，应该将A_1,A_3,A_4进行排序，给出最应接受的方案。借助相对贴近度$R\left(A_i^k\right)=\dfrac{D_i^{k-}}{D_i^{k-}+D_i^{k+}}$对属于“接受”行动策略集的方案进行排序，即在求得每个决策者给出的方案相对贴近度$R\left(A_i^k\right)$的基础上，利用求得的决策者权重对其进行集结，求得方案的群体相对贴近度$R\left(A_i\right)$，$R\left(A_i\right)$越大方案A_i最优。

4. 实例分析

本文采用Xu和Wu [59]实例进行分析，一家制造公司打算招聘一名销售经理，经过筛选后，四位应聘者$A=\left\{A_1,A_2,A_3,A_4\right\}$被选中参加面试。为了选择最合适的销售经理，邀请公司人力资源部门的四位专家即决策者$p=\left\{p_1,p_2,p_3,p_4\right\}$对应聘者进行面试，应聘标准包括四个属性，即沟通能力(C_1)，工作经验(C_2)，基本才能(C_3)，意愿(C_4)。基于语言术语集

$S=\left\{s_0=差,s_1=较差,s_2=中等,s_3=较好,s_4=好,s_5=非常好,s_6=极好\right\}$，决策者$p_k\left(k=1,2,3,4\right)$给出决策矩阵，将其标准化后如表5~8所示。

Table 5. The normalized decision matrix of the decision maker p_1
表5. 标准化的决策者p_1的决策矩阵

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$\left\{s_5,s_{5.5},s_6\right\}$	$\left\{s_1,s_{1.5},s_2\right\}$	$\left\{s_3,s_4,s_5\right\}$	$\left\{s_6,s_6,s_6\right\}$
A_2	$\left\{s_4,s_{4.5},s_5\right\}$	$\left\{s_5,s_{5.5},s_6\right\}$	$\left\{s_5,s_5,s_5\right\}$	$\left\{s_5,s_{5.5},s_6\right\}$
A_3	$\left\{s_3,s_{3.5},s_4\right\}$	$\left\{s_4,s_{4.5},s_5\right\}$	$\left\{s_3,s_{3.5},s_4\right\}$	$\left\{s_4,s_{4.5},s_5\right\}$
A_4	$\left\{s_5,s_{5.5},s_6\right\}$	$\left\{s_5,s_{5.5},s_6\right\}$	$\left\{s_6,s_6,s_6\right\}$	$\left\{s_2,s_{2.5},s_3\right\}$

Table 6. The normalized decision matrix of the decision maker p_2
表 6. 标准化的决策者 p_2 的决策矩阵

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$\{s_5,s_{5.5},s_6\}$	$\{s_4,s_{4.5},s_5\}$	$\{s_3,s_{3.5},s_4\}$	$\{s_4,s_4,s_4\}$
A_2	$\{s_4,s_5,s_6\}$	$\{s_5,s_5,s_5\}$	$\{s_4,s_4,s_4\}$	$\{s_5,s_{5.5},s_6\}$
A_3	$\{s_1,s_{1.5},s_2\}$	$\{s_6,s_6,s_6\}$	$\{s_4,s_{4.5},s_5\}$	$\{s_3,s_{3.5},s_4\}$
A_4	$\{s_3,s_{3.5},s_4\}$	$\{s_5,s_5,s_5\}$	$\{s_5,s_{5.5},s_6\}$	$\{s_4,s_{4.5},s_5\}$

Table 7. The normalized decision matrix of the decision maker p_3
表 7. 标准化的决策者 p_3 的决策矩阵

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$\{s_3,s_{3.5},s_4\}$	$\{s_4,s_{4.5},s_5\}$	$\{s_2,s_3,s_4\}$	$\{s_3,s_3,s_3\}$
A_2	$\{s_5,s_{5.5},s_6\}$	$\{s_4,s_{4.5},s_5\}$	$\{s_4,s_4,s_4\}$	$\{s_5,s_{5.5},s_6\}$
A_3	$\{s_4,s_4,s_4\}$	$\{s_5,s_{5.5},s_6\}$	$\{s_4,s_4,s_4\}$	$\{s_1,s_{1.5},s_2\}$
A_4	$\{s_2,s_3,s_4\}$	$\{s_3,s_{3.5},s_4\}$	$\{s_4,s_{4.5},s_5\}$	$\{s_4,s_{4.5},s_5\}$

Table 8. The normalized decision matrix of the decision maker p_4
表 8. 标准化的决策者 p_4 的决策矩阵

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$\{s_2,s_3,s_4\}$	$\{s_4,s_{4.5},s_5\}$	$\{s_4,s_4,s_4\}$	$\{s_5,s_5,s_5\}$
A_2	$\{s_3,s_4,s_5\}$	$\{s_6,s_6,s_6\}$	$\{s_3,s_{3.5},s_4\}$	$\{s_4,s_5,s_6\}$
A_3	$\{s_0,s_1,s_2\}$	$\{s_5,s_{5.5},s_6\}$	$\{s_5,s_{5.5},s_6\}$	$\{s_5,s_{5.5},s_6\}$
A_4	$\{s_2,s_{2.5},s_3\}$	$\{s_4,s_4,s_4\}$	$\{s_5,s_{5.5},s_6\}$	$\{s_3,s_{3.5},s_4\}$

假设决策者 $p_k\left(k=1,2,3,4\right)$ 给出的两两应聘者比较偏好关系为：$\Omega^1=\left\{\left\langle\left(A_4,A_2\right),0.4\right\rangle\right\}$，$\Omega^2=\left\{\left\langle\left(A_4,A_1\right),0.1\right\rangle,\left\langle\left(A_2,A_3\right),0.3\right\rangle\right\}$，$\Omega^3=\left\{\left\langle\left(A_4,A_1\right),0.4\right\rangle,\left\langle\left(A_2,A_3\right),0.2\right\rangle\right\}$，$\Omega^4=\left\{\left\langle\left(A_4,A_2\right),0.5\right\rangle,\left\langle\left(A_2,A_1\right),0.4\right\rangle\right\}$。给出的属性权重偏好信息为：$\Lambda^{\varphi}=\left\{0.1\le\varphi_{c_1}^{Sh}-\varphi_{c_2}^{Sh}\le 0.2,\varphi_{c_3}^{Sh}\ge 2\varphi_{c_4}^{Sh},0.3\le\varphi_{c_3}^{Sh}\le 0.6\right\}$。

Step 1：标准化决策矩阵后，结合决策者给出的应聘者偏好关系和属性权重偏好信息，根据(17)建立单目标优化模型，其中 h^+,h^- 取值 0.001，使用 LINGO 求解得出属性权重 $\varphi_{c_j}^{Sh}$ 和正负理想解 H^+,H^-，结果如表 9 所示。

Table 9. The attribute weights and positive (negative) ideal solutions

表 9. 属性权重和正负理想解

	C_1	C_2	C_3	C_4
$\varphi_{c_j}^{Sh}$	0.2723	0.0723	0.5315	0.1240
H^+	$\{s_{5.34}, s_6, s_6\}$	$\{s_{1.24}, s_{1.24}, s_{1.24}\}$	$\{s_{3.84}, s_6, s_6\}$	$\{s_{1.27}, s_{1.27}, s_{1.27}\}$
H^-	$\{s_{1.24}, s_{1.24}, s_{1.24}\}$	$\{s_{1.23}, s_{1.23}, s_{1.23}\}$	$\{s_{1.23}, s_{1.23}, s_{1.23}\}$	$\{s_{1.23}, s_{1.23}, s_{1.23}\}$

Step 2：基于个人决策矩阵表 5~8 和表 9 求解结果，根据表 4 构建个人损失矩阵，其中 $\sigma = 0.35$，并对每位决策者集结方案 $A_i\left(i = 1,2,3,4\right)$ 在所有属性下 $\left(C_1, C_2, C_3, C_4\right)$ 的损失矩阵，得出各决策者对各方案的综合损失矩阵 $\lambda_i^k\left(k = 1,2,3,4\right)$。

Step 3：根据综合损失矩阵 λ_i^k，由 3.4 小节计算决策者 p_k 对于方案 A_i 的阈值 α_i^k, β_i^k，并以相对贴近度 $R\left(A_i^k\right)$ 作为条件概率 $Pr\left(C \mid A_i^k\right)$，由 3.5 小节决策规则得出 p_k 的三支决策结果。

Step 4：基于个人三支决策结果，确定每位决策者对各方案的标号，根据(23)建立优化模型，使用 LINGO 求解得出群体的三支决策结果，最终结果为接受 A_1, A_2, A_4，拒绝 A_3，且决策者权重为 $w_1 = w_3 = w_4 = 0, w_2 = 1$。

Step 5：利用求得的决策者权重，将所有决策者对 A_1, A_2, A_4 的相对贴近度 $R\left(A_i^k\right)$ 进行加权求和并将结果记为 $R\left(A_i\right)$，且 $R\left(A_i\right)$ 越大说明方案 A_i 最优，结果为 $R\left(A_1\right) = R\left(A_1^2\right) = 0.6381$，$R\left(A_2\right) = R\left(A_2^2\right) = 0.6205$，$R\left(A_4\right) = R\left(A_4^2\right) = 0.6802$，所以 $A_4 \succ A_1 \succ A_2$，最优方案为 A_4。

综合 Step 4 和 Step 5 结果，该公司应优先录用应聘者 A_4。

5. 总结

本文通过逐步建立模型，在犹豫模糊语言环境下，考虑属性间的关联性，基于 Shapley 值构建犹豫模糊语言三支决策模型，给出各备选方案的行动策略和确定方案排序，丰富了现有决策模型，并能解决诸多实际问题。在本文中，属性权重和正负理想解均通过构建模型求得，更加客观准确；损失矩阵是由决策矩阵转化得到，为各方案分别构建不同的损失矩阵，避免了传统三支决策中不同方案损失矩阵相同的不足；利用三支决策的行动策略和 TOPSIS 思想中的相对贴近度，不仅给出各方案的行动策略，同时确定方案排序。基于本文研究，后续工作中可加入对位置相关性的考虑，即对属性处于第几位重要程度的衡量，仍利用 Shapley 值衡量其权重。此外，还可在实例的基础上对各种参数(如损失矩阵中的 σ、模型中决策者直接给出的 h^+, h^-、决策者权重 w_k)进行敏感性分析，解析决策结果的差异性。

基金项目

教育部人文社会科学研究青年基金(19YJC630107)、对外经济贸易大学中央高校基本科研业务费专项资金资助(20YQ04)、对外经济贸易大学中央高校基本科研业务费专项资金资助(17QN01)。

参考文献

[1] Yoon, K.P. and Hwang, C.L. (1995) Multiple Attribute Decision Making: An Introduction. Sage Publications, London. https://doi.org/10.4135/9781412985161

[2] Önüt, S., Kara, S.S. and Işik, E. (2009) Long Term Supplier Selection Using a Combined Fuzzy MCDM Approach: A Case Study for a Telecommunication Company. *Expert Systems with Applications*, **36**, 3887-3895. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2008.02.045

[3] Deng, Y. and Chan, F.T.S. (2011) A New Fuzzy Dempster MCDM Method and Its Application in Supplier Selection. *Expert Systems with Applications*, **38**, 9854-9861. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.02.017

[4] Büyüközkan, G. and Göçer, F. (2017) Application of a New Combined Intuitionistic Fuzzy MCDM Approach Based on Axiomatic Design Methodology for the Supplier Selection Problem. *Applied Soft Computing*, **52**, 1222-1238. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2016.08.051

[5] Ho, W., Xu, X. and Dey, P.K. (2010) Multi-Criteria Decision Making Approaches for Supplier Evaluation and Selection: A Literature Review. *European Journal of Operational Research*, **202**, 16-24. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.05.009

[6] Zhang, W., Ju, Y. and Liu, X. (2017) Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Programming Technique for Multicriteria Group Decision Making Based on Shapley Values and Incomplete Preference Information. *Soft Computing*, **21**, 5787-5804. https://doi.org/10.1007/s00500-016-2157-3

[7] Wan, S.P., Xu, J. and Dong, J.Y. (2016) Aggregating Decision Information into Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Numbers for Heterogeneous Multi-Attribute Group Decision Making. *Knowledge-Based Systems*, **113**, 155-170. https://doi.org/10.1016/j.knosys.2016.09.026

[8] Chu, T.C. (2002) Facility Location Selection Using Fuzzy TOPSIS under Group Decisions. *International Journal of Uncertainty*, *Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **10**, 687-701. https://doi.org/10.1142/S0218488502001739

[9] Shen, F., Ma, X., Li, Z., *et al*. (2018) An Extended Intuitionistic Fuzzy TOPSIS Method Based on a New Distance Measure with an Application to Credit Risk Evaluation. *Information Sciences*, **428**, 105-119. https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.10.045

[10] Dursun, M. and Karsak, E.E. (2010) A Fuzzy MCDM Approach for Personnel Selection. *Expert Systems with Applications*, **37**, 4324-4330. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2009.11.067

[11] Akdag, H., Kalaycı, T., Karagöz, S., *et al*. (2014) The Evaluation of Hospital Service Quality by Fuzzy MCDM. *Applied Soft Computing*, **23**, 239-248. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2014.06.033

[12] Ye, F. (2010) An Extended TOPSIS Method with Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Numbers for Virtual Enterprise Partner Selection. *Expert Systems with Applications*, **37**, 7050-7055. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.03.013

[13] Li, M.Y. and Cao, P.P. (2019) Extended TODIM Method for Multi-Attribute Risk Decision Making Problems in Emergency Response. *Computers & Industrial Engineering*, **135**, 1286-1293. https://doi.org/10.1016/j.cie.2018.06.027

[14] Mulliner, E., Malys, N. and Maliene, V. (2016) Comparative Analysis of MCDM Methods for the Assessment of Sustainable Housing Affordability. *Omega*, **59**, 146-156. https://doi.org/10.1016/j.omega.2015.05.013

[15] Yi, W., Sanyang, L., Wei, N., *et al*. (2014) Threat Assessment Method Based on Intuitionistic Fuzzy Similarity Measurement Reasoning with Orientation. *China Communications*, **11**, 119-128. https://doi.org/10.1109/CC.2014.6879010

[16] Gao, Y., Li, D. and Zhong, H. (2020) A Novel Target Threat Assessment Method Based on Three-Way Decisions Under Intuitionistic Fuzzy Multi-Attribute Decision Making Environment. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **87**, 10327. https://doi.org/10.1016/j.engappai.2019.103276

[17] Zhang, S., Zhu, J., Liu, X., *et al*. (2016) Regret Theory-Based Group Decision-Making with Multidimensional Preference and Incomplete Weight Information. *Information Fusion*, **31**, 1-13. https://doi.org/10.1016/j.inffus.2015.12.001

[18] Zhang, X., Xu, Z. and Wang, H. (2015) Heterogeneous Multiple Criteria Group Decision Making with Incomplete Weight Information: A Deviation Modeling Approach. *Information Fusion*, **25**, 49-62. https://doi.org/10.1016/j.inffus.2014.10.006

[19] Xu, J., Wan, S.P. and Dong, J.Y. (2016) Aggregating Decision Information into Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Numbers for Heterogeneous Multi-Attribute Group Decision Making. *Applied Soft Computing*, **41**, 331-351. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2015.12.045

[20] Yu, H., Liu, Z. and Wang, G. (2014) An Automatic Method to Determine the Number of Clusters Using Decision-Theoretic Rough Set. *International Journal of Approximate Reasoning*, **55**, 101-115. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2013.03.018

[21] Zhang, W., Ju, Y., Liu, X., *et al*. (2017) A Mathematical Programming-Based Method for Heterogeneous Multicriteria Group Decision Analysis with Aspirations and Incomplete Preference Information. *Computers & Industrial Engineering*, **113**, 541-557. https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.09.030

[22] Liang, D., Liu, D., Pedrycz, W., *et al*. (2013) Triangular Fuzzy Decision-Theoretic Rough Sets. *International Journal of Approximate Reasoning*, **54**, 1087-1106. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2013.03.014

[23] Zadeh, L.A. (1975) The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning—I. *Information Sciences*, **8**, 199-249. https://doi.org/10.1016/0020-0255(75)90036-5

[24] Rodriguez, R.M., Martinez, L. and Herrera, F. (2011) Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets for Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **20**, 109-119. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2011.2170076

[25] Wan, S.P. and Li, D.F. (2013) Fuzzy LINMAP Approach to Heterogeneous MADM Considering Comparisons of Alternatives with Hesitation Degrees. *Omega*, **41**, 925-940. https://doi.org/10.1016/j.omega.2012.12.002

[26] Wan, S.P. and Li, D.F. (2013) Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Programming Method for Heterogeneous Multiattribute Group Decision Making with Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Truth Degrees. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **22**, 300-312. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2013.2253107

[27] Fan, Z.P., Zhang, X., Chen, F.D., *et al*. (2013) Multiple Attribute Decision Making Considering Aspiration-Levels: A Method Based on Prospect Theory. *Computers & Industrial Engineering*, **65**, 341-350. https://doi.org/10.1016/j.cie.2013.02.013

[28] Angilella, S., Corrente, S. and Greco, S. (2015) Stochastic Multiobjective Acceptability Analysis for the Choquet Integral Preference Model and the Scale Construction Problem. *European Journal of Operational Research*, **240**, 172-182. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.06.031

[29] Meng, F., Tan, C. and Zhang, Q. (2013) The Induced Generalized Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Hybrid Shapley Averaging Operator and Its Application in Decision Making. *Knowledge-Based Systems*, **42**, 9-19. https://doi.org/10.1016/j.knosys.2012.12.006

[30] Meng, F. and Tang, J. (2013) Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Multiattribute Group Decision Making Based on Cross Entropy Measure and Choquet Integral. *International Journal of Intelligent Systems*, **28**, 1172-1195. https://doi.org/10.1002/int.21624

[31] Meng, F. and Chen, X. (2014) An Approach to Interval-Valued Hesitant Fuzzy Multi-Attribute Decision Making with Incomplete Weight Information Based on Hybrid Shapley Operators. *Informatica*, **25**, 617-642. https://doi.org/10.15388/Informatica.2014.32

[32] Yao, Y. (2009) Three-Way Decision: An Interpretation of Rules in Rough Set Theory. In: *International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology*, Springer, Berlin, Heidelberg, 642-649. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02962-2_81

[33] Yao, Y. (2010) Three-Way Decisions with Probabilistic Rough Sets. *Information Sciences*, **180**, 341-353. https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.09.021

[34] Yao, Y. and Wong, S.K. (1992) A Decision Theoretic Framework for Approximating Concepts. *International Journal of Man-Machine Studies*, **37**, 793-809. https://doi.org/10.1016/0020-7373(92)90069-W

[35] Liang, D. and Liu, D. (2014) A Novel Risk Decision Making Based on Decision-Theoretic Rough Sets under Hesitant Fuzzy Information. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **23**, 237-247. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2014.2310495

[36] Liu, D., Yao, Y. and Li, T. (2011) Three-Way Investment Decisions with Decision-Theoretic Rough Sets. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **4**, 66-74. https://doi.org/10.1080/18756891.2011.9727764

[37] Li, H. and Zhou, X. (2011) Risk Decision Making Based on Decision-Theoretic Rough Set: A Three-Way View Decision Model. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **4**, 1-11. https://doi.org/10.1080/18756891.2011.9727759

[38] Chen, Y., Yue, X., Fujita, H., *et al*. (2017) Three-Way Decision Support for Diagnosis on Focal Liver Lesions. *Knowledge-Based Systems*, **127**, 85-99. https://doi.org/10.1016/j.knosys.2017.04.008

[39] Liu, D., Liang, D. and Wang, C. (2016) A Novel Three-Way Decision Model Based on Incomplete Information System. *Knowledge-Based Systems*, **91**, 32-45. https://doi.org/10.1016/j.knosys.2015.07.036

[40] Liu, D., Li, T. and Liang, D. (2012) Three-Way Government Decision Analysis with Decision-Theoretic Rough Sets. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **20**, 119-132. https://doi.org/10.1142/S0218488512400090

[41] Yu, H., Zhang, C. and Wang, G. (2016) A Tree-Based Incremental Overlapping Clustering Method Using the Three-Way Decision Theory. *Knowledge-Based Systems*, **91**, 189-203. https://doi.org/10.1016/j.knosys.2015.05.028

[42] Lingras, P., Chen, M. and Miao, D. (2008) Rough Cluster Quality Index Based on Decision Theory. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, **21**, 1014-1026. https://doi.org/10.1109/TKDE.2008.236

[43] Goudey, R. (2007) Do Statistical Inferences Allowing Three Alternative Decisions Give Better Feedback for Environmentally Precautionary Decision-Making? *Journal of Environmental Management*, **85**, 338-344. https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2006.10.012

[44] Li, W., Miao, D., Wang, W., *et al*. (2010) Hierarchical Rough Decision Theoretic Framework for Text Classification. 9*th IEEE International Conference on Cognitive Informatics*, Beijing, 7-9 July 2010, 484-489. https://doi.org/10.1109/COGINF.2010.5599692

[45] Zhou, B., Yao, Y. and Luo, J. (2010) A Three-Way Decision Approach to Email Spam Filtering. In: *Canadian Conference on Artificial Intelligence*, Springer, Berlin, Heidelberg, 28-39. https://doi.org/10.1007/978-3-642-13059-5_6

[46] Nauman, M., Azam, N. and Yao, J.T. (2016) A Three-Way Decision Making Approach to Malware Analysis Using

Probabilistic Rough Sets. *Information Sciences*, **374**, 193-209. https://doi.org/10.1016/j.ins.2016.09.037

[47] Li, H., Zhang, L., Huang, B., *et al*. (2016) Sequential Three-Way Decision and Granulation for Cost-Sensitive Face Recognition. *Knowledge-Based Systems*, **91**, 241-251. https://doi.org/10.1016/j.knosys.2015.07.040

[48] Li, H., Zhang, L., Zhou, X., *et al*. (2017) Cost-Sensitive Sequential Three-Way Decision Modeling Using a Deep Neural Network. *International Journal of Approximate Reasoning*, **85**, 68-78. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2017.03.008

[49] Zhang, Z. and Wu, C. (2014) Hesitant Fuzzy Linguistic Aggregation Operators and Their Applications to Multiple Attribute Group Decision Making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **26**, 2185-2202. https://doi.org/10.3233/IFS-130893

[50] Wei, C., Zhao, N. and Tang, X. (2013) Operators and Comparisons of Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **22**, 575-585. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2013.2269144

[51] Liao, H., Xu, Z., Zeng, X.J., *et al*. (2015) Qualitative Decision Making with Correlation Coefficients of Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets. *Knowledge-Based Systems*, **76**, 127-138. https://doi.org/10.1016/j.knosys.2014.12.009

[52] Xu, Z. (2005) Deviation Measures of Linguistic Preference Relations in Group Decision Making. *Omega-International Journal of Management Science*, **33**, 249-254. https://doi.org/10.1016/j.omega.2004.04.008

[53] Zhu, B. and Xu, Z. (2013) Consistency Measures for Hesitant Fuzzy Linguistic Preference Relations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **22**, 35-45. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2013.2245136

[54] Sugeno, M. (1974) Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications. Doct. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo.

[55] Shapley, L.S. (1953) A Value for n-Person Games. *Contributions to the Theory of Games*, **2**, 307-317. https://doi.org/10.1515/9781400881970-018

[56] Pawlak, Z. (1982) Rough Sets. *International Journal of Computer & Information Sciences*, **11**, 341-356. https://doi.org/10.1007/BF01001956

[57] Jia, F. and Liu, P. (2019) A Novel Three-Way Decision Model under Multiple-Criteria Environment. *Information Sciences*, **471**, 29-51. https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.08.051

[58] Li, D.F. (2011) Closeness Coefficient Based Nonlinear Programming Method for Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Multiattribute Decision Making with Incomplete Preference Information. *Applied Soft Computing*, **11**, 3402-3418. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2011.01.011

[59] Wu, Z. and Xu, J. (2016) Possibility Distribution-Based Approach for MAGDM with Hesitant Fuzzy Linguistic Information. *IEEE Transactions on Systems*, *Man*, *and Cybernetics*, **46**, 694-705. https://doi.org/10.1109/TCYB.2015.2413894