Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2021, 11(1), 97-104
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2021.111012

模糊数对角算子宽度

贺小航，吴圣伟

西华大学理学院，四川 成都
Email: 990181245@qq.com

收稿日期：2021年1月8日；录用日期：2021年2月10日；发布日期：2021年2月20日

摘 要

在经典宽度理论基础上，将模糊数构成的集合作为被逼近集，讨论对角矩阵宽度的渐近阶得到$1\le s<\infty$相应结论。本文继以上工作，利用函数的扎德扩张原理及Hausdorff距离讨论模糊对角矩阵宽度当$s=\infty$时的渐近阶。特别地，当模糊数集合限制在实数集合上时，这个误差估计和经典宽度理论相应的结果是一致的。

关键词

模糊数，*n*-宽度，Zadeh扩张，对角算子

Width of Fuzzy Number Diagonal Operator

Xiaohang He, Shengwei Wu

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: 990181245@qq.com

Received: Jan. 8th, 2021; accepted: Feb. 10th, 2021; published: Feb. 20th, 2021

Abstract

Based on the classical width theory, the set of fuzzy numbers is regarded as the approximated set. The asymptotic order of the width of diagonal matrix is discussed to $1\le s<\infty$. This paper continues the above work. Using the function's Zadeh's expansion principle to discuss the width of diagonal matrix asymptotic order when $s=\infty$. In particular, when fuzzy number set restrictions in real number set, the error estimation and the classical theory of the width of the corresponding results are consistent.

文章引用: 贺小航, 吴圣伟. 模糊数对角算子宽度[J]. 运筹与模糊学, 2021, 11(1): 97-104.
DOI: 10.12677/orf.2021.111012

Keywords

Fuzzy Numbers, *n*-Widths, Zadeh's Extension, Diagonal Operator

1. 引言

模糊数是模糊分析学中的一个重要研究领域，是实数概念的推广。它的应用也如同经典数遍及人工智能、决策优化、图像识别等诸多现代领域，充分体现了其在处理模糊性方面的优越性。宽度主要是从代数角度来研究集合或空间容量在一定意义下的最佳逼近问题，是逼近论的一个重要分支。宽度是函数逼近论中的主要的一个研究方向。主要目的是寻找函数类在一定意义下的最佳逼近方法，并对最佳逼近阶进行估计。宽度问题于 1936 年 Kolmogorov 首先[1]提出。A 在 R^N 中的经典 n-宽度在[2]-[9]可找到。模糊数学诞生于 1965 年由美国控制论专家 L. A. Zadeh [10]创立，同年他发表了《模糊集合论》。Zadeh 和 Chang [11]于 1972 年把实数域 R 上的一族具有特殊性质的模糊集称为模糊数。研究模糊数一般借助其隶属函数来进行相关探讨，但有的模糊数其隶属函数相对较为复杂，研究起来会有一定的难度。所以模糊数其相对应的替代者，模糊数逼近问题便随之产生了。模糊数的逼近问题在数学领域中目前已经成为一项重要的研究课题。Han Y J，Liang L 在[12]中讨论了当$1 \le s < \infty$时，模糊数对角矩阵中的逼近问题。本文将在此论文的基础上做进一步推广。

2. 预备知识

2.1. 模糊数

对于一个模糊集 $u: R^N \to [0,1]$ 假定：

1) u 是正规模糊集；

2) u 是上半连续的；

3) u 的承集 $\operatorname{supp} u = cl\{x \in R^N : u(x) > 0\}$

紧集(其中 cl 表示集合的闭包运算)；

4) u 是凸模糊集，即

$u(\lambda x + (1-\lambda) y) \ge \min\{u(x), u(y)\}$，$0 \le \lambda \le 1$对任意的 $x, y \in R^N$，则称 u 为一个模糊数，令 R^N 是 N 维欧式空间，E^N 是全体模糊数的集合。R^N 可以嵌入到 E^N 中，对 $\forall u \in R^N$ 定义

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} 1, & u = x; \\ 0, & u \ne x. \end{cases}$$

对于 $u, v \in E^N$，$\alpha \in [0,1]$，u 的 α 水平集为：

$$[u]^\alpha := \begin{cases} \{x \in R^N : u(x) \ge \alpha\}, & 0 < \alpha \le 1; \\ \operatorname{supp} u, & \alpha = 0. \end{cases}$$

在 E^N 中定义代数运算：

$$[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha, [ku]^\alpha = k[u]^\alpha, k \in R, \alpha \in [0,1]$$

若 $f:R^N\to R^N$ 是一个函数，我们通过 $\tilde{f}:E^N\to E^N$ 函数定义 f 的 Zadeh 扩张

$$\tilde{f}(u)(x)=\begin{cases}\sup\limits_{z\in f^{-1}(x)} u(z), & f^{-1}(x)\neq\varphi;\\ 0, & f^{-1}(x)=\varphi.\end{cases}$$

令 $x=(x_1,\cdots,x_N)\in R^N$ 的 n 维赋范线性空间 $\left(R^N,\|\bullet\|\right)$ 记为 l_p^N，定义范数如下：

$$\|x\|_p=\begin{cases}\left(\sum\limits_{i=1}^{N}|x_i|^p\right)^{1/p}, & 1\leq p<\infty;\\ \max\limits_{1\leq i\leq N}|x_i|, & p=\infty.\end{cases}$$

2.2. 对角矩阵 n-宽度

令 $\boldsymbol{D}=diag\{D_1,\cdots,D_N\}$ 是一个 $N\times N$ 阶的对角矩阵，假设 $D_1\geq D_2\geq\cdots\geq D_N>0$，令 $\boldsymbol{D}_p=\left\{\boldsymbol{D}x:\|x\|_p\leq 1\right\}$ 且 $\boldsymbol{D}_p$ 的 n 宽度在文献[2] [3] [13]中可以找到。

定理 A ([3] [13])当 $1\leq p\leq\infty$ 时

$$d_n\left(\boldsymbol{D}_p;l_p^N\right)=d^n\left(\boldsymbol{D}_p;l_p^N\right)=b_n\left(\boldsymbol{D}_p;l_p^N\right)=\delta_n\left(\boldsymbol{D}_p;l_p^N\right)=\boldsymbol{D}_{n+1}$$

定理 B ([2])给定 $1\leq q\leq p\leq\infty$，令 $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，则有

$$d_n\left(\boldsymbol{D}_p;l_q^N\right)=d^n\left(\boldsymbol{D}_p;l_q^N\right)=\delta_n\left(\boldsymbol{D}_p;l_q^N\right)=\left(\sum_{k=n+1}^{N}D_k^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

3. 模糊数宽度

本文将使用以下符号。令 X_n 是 R^N 的 n 维子空间，L^n 是 R^N 的余维数为 n 的子空间，$S(X_n)$ 表示 X_n 的单位球，令

$$\tilde{X}_n=\left\{u:u\in E^N;[u]^0\subseteq X_n\right\};$$

$$\tilde{L}^n=\left\{u:u\in E^N;[u]^0\subseteq L^n\right\};$$

$$S\left(\tilde{X}_{n+1}\right)=\left\{u:d\left(u,\hat{0}\right)\leq 1,u\in\tilde{X}_{n+1}\right\}.$$

令 $\tilde{P}_n$ 是秩为 n 的连续线性算子 $P_n:R^N\to R^N$ 的 Zadeh 扩张。

定义 1 令 $\left(E^N,d\right)$ 是一个距离空间，且 $A\subseteq E^N$。

1) A 在 E^N 中的 Kolmogorov n-宽度定义为

$$d_n\left(A;E^N\right)=\inf_{\tilde{X}_n}\sup_{u\in A}\inf_{v\in\tilde{X}_n}d(u,v).$$

其中左边的下确界 $\tilde{X}_n$ 取遍 E^N 中的所有 n 维子空间，$\tilde{X}_n\subset E^N$。

2) A 在 E^N 中的 Bernstein n-宽度定义为

$$b_n\left(A;E^N\right)=\sup_{\tilde{X}_{n+1}}\sup\left\{\lambda:\lambda S\left(\tilde{X}_{n+1}\right)\subseteq A\right\}=\sup_{\tilde{X}_{n+1}}\inf_{x\in\partial\left(A\cap\tilde{X}_{n+1}\right)}d\left(u,\hat{0}\right)$$

3) A 在 E^N 中的 Gelfand n-宽度定义为

$$d^n\left(A;E^N\right)=\inf_{\tilde{L}^n}\sup_{x\in A\cap\tilde{L}^n}d\left(u,\hat{0}\right)$$

其中下确界 $\tilde{L}^n$ 取遍 E^N 的所有子空间。

4) A 在 E^N 中的线性 n-宽度定义为

$$\delta_n\left(A;E^N\right)=\inf_{v\in\tilde{P}_n(A)}\sup_{u\in A}d\left(u,v\right).$$

其中下确界取遍所有的 $\tilde{P}_n$。

注：当 A 在实数集合中时，以上定义与经典宽度一致。

引理 1 [13] 令 $\left(E^N,d\right)$ 是一个距离空间，且 $A\subseteq E^N$，则

1) $\delta_n\left(A;E^N\right)\ge d_n\left(A;E^N\right)$；

2) $\delta_n\left(A;E^N\right)\ge d^n\left(A;E^N\right)$。

4. $\tilde{D}$ n-宽度

我们选择 E^N 上一个合适的距离 d 来建立 $\|x-y\|_p$ 和 $d\left(u,v\right)$，$x,y\in l_p^N$，$u,v\in E^N$，之间的关系。E^N 中集合之间的距离可以通过 $\|x-y\|_p$ 来估计。

令 $\kappa\left(R^N\right)$ 是 l_p^N 中的非空紧集全体构成的空间，如果 $A,B\in\kappa\left(R^N\right)$，$1\le p<\infty$ 则 A 与 B 的 Hausdorf 距离定义为

$$d_H^p\left(A,B\right)=\max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|_p,\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|_p\right\}$$

对 $u,v\in E^N,1\le p<\infty,1\le s<\infty$，$\alpha\in\left[0,1\right]$，我们定义 $1\le p<\infty,1\le s<\infty$

$$d_s^p\left(u,v\right)=\left(\int_0^1 d_H^p\left(\left[u\right]^\alpha,\left[v\right]^\alpha\right)^s\mathrm{d}\alpha\right)^{1/s}.$$

令 $L_{s,p}^N=\left(E^N,d_{s,p}\right)$，$d_{s,p}$ 为 E^N 上的 $L_{s,p}^N$ 度量。

$d_{\infty,p}\left(u,v\right)=\sup_{\alpha\in[0,1]}d_H^p\left(\left[u\right]^\alpha,\left[v\right]^\alpha\right)$，为模糊数空间 E^N 上的上确界度量(或一致 Hausdorf 度量) [14]。

令 $L_{\infty,p}^N=\left(E^N,d_{\infty,p}\right)$，$d_{\infty,p}$ 为 E^N 上的 $L_{\infty,p}^N$ 度量。

引理 2 令 $u\in E^N,k\in R,\alpha\in\left[0,1\right]$，$\boldsymbol{D}=diag\left\{D_1,\cdots,D_N\right\}$，$D_1\ge D_2\ge\cdots\ge D_N>0$ 是一个 $N\times N$ 阶的对角矩阵，$\tilde{\boldsymbol{D}}$ 是 $\boldsymbol{D}$ 的 Zadeh 扩张。则 $d_{\infty,p}\left(\tilde{\boldsymbol{D}}\left(ku\right),\hat{0}\right)=|k|d_{\infty,p}\left(\tilde{\boldsymbol{D}}\left(u\right),\hat{0}\right)$。

证明：因为 $\operatorname{supp}\hat{0}=\left\{0\right\}$，所以

$$\begin{aligned}
&d_{\infty,p}\left(\tilde{\boldsymbol{D}}\left[u\right]^\alpha,k\left[\hat{0}\right]^\alpha\right)\\
&=\sup_{\alpha\in[0,1]}d_H^p\left(\boldsymbol{D}\left[u\right]^\alpha,k\left[\hat{0}\right]^\alpha\right)\\
&=\sup_{\alpha\in[0,1]}\max\left\{\sup_{a\in[u]^\alpha}\inf_{b\in k\left[\hat{0}\right]^\alpha}\|\boldsymbol{D}a-b\|_p,\sup_{b\in k\left[\hat{0}\right]^\alpha}\inf_{a\in[u]^\alpha}\|\boldsymbol{D}a-b\|_p\right\}\\
&=\sup_{\alpha\in[0,1]}\sup_{a\in[u]^\alpha}\|\boldsymbol{D}a\|_p
\end{aligned}$$

若 $0\le r_1\le r_2\le 1$，$[u]^{r_2}\subset[u]^{r_1}$，于是 $d_{\infty,p}\left(\tilde{\boldsymbol{D}}u,k\hat{0}\right)=\sup\limits_{a\in[u]^0}\|\boldsymbol{D}a\|_p$。

类似的我们可以证得：$d_{\infty,p}\left(\tilde{\boldsymbol{D}}(ku),\hat{0}\right)=|k|\,d_{\infty,p}\left(\tilde{\boldsymbol{D}}(u),\hat{0}\right)$。

在本文中，我们关注的是 n-宽度的估计：

$$\tilde{\boldsymbol{D}}_P=\left\{\tilde{\boldsymbol{D}}u:u\in E^N,d_{\infty,p}\left(u,\hat{0}\right)\le 1\right\}\text{ 和 }\tilde{\boldsymbol{D}}_p^{-1}=\left\{\tilde{\boldsymbol{D}}^{-1}u:u\in E^N,d_{\infty,p}\left(u,\hat{0}\right)\le 1\right\}$$

通常情况下，使用[9] $b_n(A;X)=\sup_{X_{n+1}}\inf_{x\in\partial(A\cap X_{n+1})}\|x\|$ 的一个简化形式。为便于计算我们引入了 $b_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P;L_\infty\right)$ 的相似定义。

定义 2 **当** $s=\infty,1\le p\le\infty$ 时，$b_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P;L_{\infty,P}^N\right)=\sup\limits_{\tilde{X}_{n+1}}\inf\limits_{\substack{u\in\tilde{X}_{n+1}\\ d_\infty^p(u,\hat{0})=1}}d\left(\tilde{\boldsymbol{D}}u,\hat{0}\right)$

现在我们陈述主要结果：

定理 1 当 $s=\infty$，

$$\delta_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p;L_{\infty,p}^N\right)=d_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p;L_{\infty,p}^N\right)=d^n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p;L_{\infty,p}^N\right)=b_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p;L_{\infty,p}^N\right)=D_{n+1}$$

定理 2 当 $1\le q\le p\le\infty$，$s=\infty$，令 $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，则有

$$\delta_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P;L_{\infty,q}^N\right)=d_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P;L_{\infty,q}^N\right)=d^n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P;L_{\infty,q}^N\right)=\left(\sum_{k=n+1}^N D_k^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

注：当 $1\le q\le p\le\infty$ 时，定理 1 与定理 2 显然定理 A 与 B 的一般化。

证明这两个定理前我们需要一些引理

引理 3 当 $1\le p\le\infty$

1) $\delta_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P;L_{\infty,P}^N\right)\ge d_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P;L_{\infty,P}^N\right)\ge b_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P;L_{\infty,P}^N\right)$。

2) $\delta_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P;L_{\infty,p}^N\right)\ge d^n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P;L_{\infty,p}^N\right)\ge b_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P;L_{\infty,p}^N\right)$。

证明方法类似于[13]，此处我们省略其证明。

引理 4 对 $p=\infty$，$n<N$，时 $b_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P;L_{\infty,p}^N\right)d^{N-n-1}\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p;L_{\infty,p}^N\right)=1$

证明方法类似于[13]此处我们省略其证明。

定理 1 的证明：令 $p_n=diag\left(D_1,\cdots,D_n,0,\cdots,0\right)$，对任意的 $u\in E^N$，有

$$\begin{aligned}d_H^p\left(\left[\tilde{\boldsymbol{D}}u\right]^\alpha,\left[\tilde{P}_nu\right]^\alpha\right)&=d_H^p\left(\boldsymbol{D}[u]^\alpha,P_n[u]^\alpha\right)\\&=\max\left\{\sup_{a\in[u]^\alpha}\inf_{b\in[u]^\alpha}\|\boldsymbol{D}a-P_nb\|_p,\sup_{b\in[u]^\alpha}\inf_{a\in[u]^\alpha}\|\boldsymbol{D}a-P_nb\|_p\right\}\\&=\max_{a\in[u]^\alpha}\left\|\left(\boldsymbol{D}-P_n\right)a\right\|_p\end{aligned}\tag{1}$$

因此

$$\delta_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p;L_{\infty,p}^N\right)=\inf_{\tilde{P}_n}\sup_{u\in E^N}\left\|\tilde{\boldsymbol{D}}u-\tilde{P}_n u\right\|_p \le \max_{d_\infty^p\left(u,\hat{0}\right)\le 1} d_{\infty,p}\left(\tilde{\boldsymbol{D}}u,\tilde{P}_n u\right)$$

$$=\max_{u\neq\hat{0}}\frac{d_{\infty,p}\left(\tilde{\boldsymbol{D}}u,\tilde{P}_n u\right)}{d_{\infty,p}\left(u,\hat{0}\right)}=\max_{u\neq\hat{0}}\frac{\sup_{\alpha\in[0,1]} d_H^p\left(\left[\tilde{\boldsymbol{D}}u\right]^\alpha,\left[\tilde{P}_n u\right]^\alpha\right)}{\sup_{\alpha\in[0,1]} d_H^p\left([u]^\alpha,\left[\hat{0}\right]^\alpha\right)}$$

$$=\max_{u\neq\hat{0}}\frac{\max_{a\in[u]^0}\left\|\tilde{\boldsymbol{D}}-\tilde{P}_n(a)\right\|_p}{\max_{a\in[u]^0}\|a\|_p}=\max_{u\neq\hat{0}}\frac{\max_{a\in[u]^0}\left(\sum_{i=n+1}^N\left|\tilde{\boldsymbol{D}}_i a_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\max_{a\in[u]^0}\|a\|_p}$$

$$\le\max_{u\neq\hat{0}}\frac{D_{n+1}\left(\max_{a\in[u]^0}\left(\sum_{i=n+1}^N|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)}{\max_{a\in[u]^0}\|a\|_p}\le D_{n+1}$$

同理 $\delta_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p;L_{\infty,p}^N\right)\le 1/D_{n+1}$。

由引理 4 知：$b_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p,L_{\infty,p}^N\right)=\left(d^{M-n-1}\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p^{-1},L_{\infty,p}^N\right)\right)^{-1}\ge\left(\delta_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p^{-1},L_{\infty,p}^N\right)\right)^{-1}$，因此 $b_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p,L_{\infty,p}^N\right)=D_{n+1}$ 通过引理 3，我们证明了这四个 n-宽等于 D_{n+1}。

引理 5 令 $1\le p,q<\infty$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$。则 $d_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p;L_{\infty,q}^N\right)\ge d^n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_{q'};L_{\infty,p}^N\right)$。

证明方法类似于[13]此处我们省略其证明。

定理 2 的证明，首先证明：$\delta_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p;L_{\infty,q}^N\right)\le\left(\sum_{k=n+1}^N D_k^r\right)^{1/r}$。

令 $p_n=diag\left(D_1,\cdots,D_n,0,\cdots,0\right)$，对任意的 $u\in E^N$，如定理 1 中(1)的证明

$$d_H^q\left(\left[\tilde{\boldsymbol{D}}u\right]^\alpha,\left[\tilde{P}_n u\right]^\alpha\right)=\sup_{a\in[u]^\alpha}\left\|\left(\boldsymbol{D}-P_n\right)a\right\|_q=\sup_{a\in[u]^\alpha}\left(\sum_{k=n+1}^N\left|D_k a_k\right|^q\right)^{1/q},$$

又由 $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ 和 Holder 不等式有

$$\left(\sum_{k=n+1}^N\left|D_k a_k\right|^q\right)^{1/q}\le\left(\sum_{k=n+1}^N\left|D_k\right|^r\right)^{1/r}\left(\sum_{k=n+1}^N\left|a_k\right|^p\right)^{1/p},$$

所以有

$$\begin{aligned}d_H^q\left(\left[\tilde{\boldsymbol{D}}u\right]^\alpha,\left[\tilde{P}_n u\right]^\alpha\right)&\le\sup_{a\in[u]^\alpha}\left(\sum_{k=n+1}^N\left|D_k\right|^r\right)^{1/r}\left(\sum_{k=n+1}^N\left|a_k\right|^p\right)^{1/p}\\&\le\left(\sum_{k=n+1}^N\left|D_k\right|^r\right)^{1/r}\sup_{a\in[u]^\alpha}\left(\sum_{k=1}^N\left|a_k\right|^p\right)^{1/p}\\&\le\left(\sum_{k=n+1}^N\left|D_k\right|^r\right)^{1/r}d_H^p\left([u]^\alpha,\left[\hat{0}\right]^\alpha\right)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\delta_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p;L_{\infty,q}^N\right) &= \inf_{P_n}\sup_{u\in E^N}\left\|\tilde{\boldsymbol{D}}u-\tilde{P}_n u\right\|_p \\
&\le \max_{d_\infty^p(u,\hat{0})\le 1} d_{\infty,p}^N\left(\left[\boldsymbol{D}u\right]^\alpha,\left[P_n u\right]^\alpha\right) \\
&\le \max_{d_\infty^p(u,\hat{0})\le 1}\sup_{\alpha\in[0,1]} d_H^q\left(\boldsymbol{D}\left(\left[u\right]^\alpha\right),P_n\left(\left[u\right]^\alpha\right)\right) \\
&\le \max_{d_p(u,\hat{0})}\left(\sum_{k=n+1}^N\left|D_k\right|^r\right)^{1/r} d_{\infty,p}^N\left(u,\hat{0}\right) \\
&\le \left(\sum_{k=n+1}^N\left|D_k\right|^r\right)^{1/r}
\end{aligned} \tag{2}$$

现证明：$d^n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p,L_{\infty,q}^N\right)\ge\left(\sum_{k=n+1}^N\left|D_k\right|^r\right)^{1/r}$，

由引理 1 得：$d_H^q\left(\left[\tilde{\boldsymbol{D}}u\right]^\alpha,\left[\hat{0}\right]^\alpha\right)=d_H^q\left(\boldsymbol{D}\left(\left[u\right]^\alpha\right),\left[\hat{0}\right]^\alpha\right)=\max_{a\in[u]^\alpha}\left\|\boldsymbol{D}a\right\|_q=\max_{a\in[u]^\alpha}\left(\sum_{k=1}^N\left|D_k a_k\right|^q\right)^{1/q}$

且 $d_H^p\left(\left[u\right]^\alpha,\left[\hat{0}\right]^\alpha\right)=\max_{a\in[u]^\alpha}\left(\sum_{k=1}^N\left|a_k\right|^p\right)^{1/p}$

又由 $d^n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p,L_{\infty,q}^N\right)$ 的定义和定理 B 得

$$d^n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P,L_{\infty,q}^N\right)\ge d^n\left(\boldsymbol{D}_P,L_{\infty,q}^N\right)=d^n\left(\boldsymbol{D}_P,l_q^N\right)=\left(\sum_{k=n+1}^N D_k^r\right)^{1/r} \tag{3}$$

结合式子(2)，(3)和引理 1 的(2)

有 $\delta_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p,L_{\infty,q}^N\right)=d^n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_p,L_{\infty,q}^N\right)=\left(\sum_{k=n+1}^N D_k^r\right)^{1/r}$

类似的有 $\delta_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_{q'},L_{\infty,p}^N\right)=\left(\sum_{k=n+1}^N D_k^r\right)^{1/r}$ 和 $d^n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_{q'},L_{\infty,p'}^N\right)\ge\left(\sum_{k=n+1}^N D_k^r\right)^{1/r}$

又由引理 1(1)和引理 5 得 $d_n\left(\tilde{\boldsymbol{D}}_P;L_{\infty,q}^N\right)\ge\left(\sum_{k=n+1}^N D_k^r\right)^{1/r}$。

基金项目

2020 年“西华杯”大学生创新创业项目(2020108)。

参考文献

[1] Kolmogoroff, A. (1936) Uber die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funkionenklasse. *Annals of Mathematics*, **37**, 107-110. https://doi.org/10.2307/1968691

[2] Pietsch, A. (1974) s-Numbers of Operators in Banach Spaces. *Studia Mathematica*, **51**, 21-33. https://doi.org/10.4064/sm-51-3-201-223

[3] Mityagin, B.S. and Tichomirov, V.M. (1964) Asymptotic Characteristic of Compact Sets in Linear Spaces. In: *Proceedings Fourth All-Union Soviet Math. Congress*, Vol. II. Sectional Lecture, Vol. 299, Nauka, Leningrad.

[4] Sofman, L.B. (1969) Diameters of Octahedra. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, **5**, 258-262. https://doi.org/10.1007/BF01410793

[5] Tichomirov, V.M. and Babadjanov, S.B. (1967) On the Width of a Functional Class in the Space Lp (p ≥ 1). *Izvestiia*

Akademii nauk SSSR. *Seriia Fiziko-Matematicheskikh*, **2**, 24-30.

[6] Hutton, C.V., Morrell, J.S. and Retherford, J.R. (1976) Diagonal Operators, Approximation Numbers, and Kolmogoroff Diameters. *Journal of Approximation Theory*, **16**, 48-80. https://doi.org/10.1016/0021-9045(76)90095-2

[7] Pinkus, A. (1979) Matrices and *n*-Widths. *Linear Algebra and Its Applications*, **27**, 245-278. https://doi.org/10.1016/0024-3795(79)90046-6

[8] Melkman, A.A. (1984) The Distance of a Subspace of R^m from Its Axes and *n*-Widths of Octahedra. *Journal of Approximation Theory*, **42**, 245-256. https://doi.org/10.1016/0021-9045(84)90042-X

[9] Kašin, B.S. (1977) Diameters of Some Finite-Dimensional Sets and Classes of Smooth Functions. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, **11**, 317-333. https://doi.org/10.1070/IM1977v011n02ABEH001719

[10] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[11] Chang, S.S.L. and Zadeh, L.A. (1972) On Fuzzy Mapping and Control. *IEEE Transactions on Systems*, *Man and Cybernetics*, **SMC-2**, 30-34. https://doi.org/10.1109/TSMC.1972.5408553

[12] Han, Y.J., Liang, L. and Chen, G.G. (2019) Asymptotic Estimates for n-Width of Fuzzy Numbers. *Journal of Inequalities and Applications*, **2019**, Article No. 86. https://doi.org/10.1186/s13660-019-2041-7

[13] Pinkus, A. (1985) n-Widths in Approximation Theory II. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-69894-1

[14] 吴从炘, 赵治涛, 任雪昆. 模糊分析学与特殊泛函空间[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2013: 33-61.