

基于POWAD算子的犹豫模糊语言多属性决策方法

朱 丽, 陈 静, 王旭光

江西农业大学计算机与信息工程学院, 江西 南昌
Email: zflcz@163.com

收稿日期: 2021年4月20日; 录用日期: 2021年5月20日; 发布日期: 2021年5月27日

摘 要

为了综合考虑决策问题的概率信息和决策专家的犹豫不决和态度特征, 将概率有序加权平均距离(POWAD)算子推广到犹豫模糊语言环境, 介绍了犹豫模糊语言概率有序加权平均距离(HFLPOWAD)算子。基于TOPSIS方法, 根据决策方案与理想方案的综合贴近度, 提出了一种犹豫模糊语言多属性群决策方法。最后, 通过一个投资项目的选择案例阐明了该方法的有效性。

关键词

犹豫模糊语言术语集, 概率有序加权平均距离算子, 贴近度

Method for Hesitant Fuzzy Linguistic Multi-Attribute Decision Making Based on POWAD Operator

Li Zhu, Jing Chen, Xuguang Wang

College of Computer and Information Engineering, Jiangxi Agricultural University, Nanchang Jiangxi
Email: zflcz@163.com

Received: Apr. 20th, 2021; accepted: May 20th, 2021; published: May 27th, 2021

Abstract

In order to comprehensively consider the probability information of decision making problems and the attitude characteristics of decision experts, the hesitant fuzzy linguistic probabilistic or-

dered weighted averaging distance (HFLPOWAD) operator is introduced by extending the probabilistic ordered weighted averaging distance (POWAD) operator to hesitant fuzzy linguistic environment. Based on TOPSIS method, the approach for hesitant fuzzy linguistic multi-attribute group decision making is proposed according to the comprehensive closeness coefficient of the decision alternatives relative to the ideal alternative solution. Finally, an investment selection problem is employed to illustrate the effectiveness of the approach.

Keywords

Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets, Probabilistic Ordered Weighted Averaging Distance Operator, Closeness Coefficient

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

由于决策环境的复杂性和不确定性，决策专家们更愿意用模糊语言来对决策问题进行评估。为此，受犹豫模糊集启发，Rodríguez 等[1]提出了犹豫模糊语言术语集(HFLTSS)的概念。犹豫模糊语言术语集允许决策对象的隶属度为多个连续的语言术语。Liao [2]和 Wang [3]将 HFLTSS 一般化，允许决策对象的隶属度为多个离散的语言术语，并且定义了犹豫模糊语言术语元。犹豫模糊语言术语集很好地处理了决策专家们用语言术语评估决策对象时的犹豫不决，被大量专家学者运用到不同的多属性决策问题中，各种犹豫模糊语言信息决策方法被相继提出[4]-[11]。

在多属性决策问题中，信息集结方式的选择尤为重要。Yager [12]提出的有序加权平均(OWA)算子是一种考虑了决策者的态度信息的最常用而有效的集结算子，有着广泛的推广和应用[13] [14] [15]。距离测度是决策过程中的一个有用的工具。Merigó 和 Gil-Lafuente [16]将 OWA 算子与距离测度相结合，提出了有序加权平均距离(OWAD)算子。后来为了既考虑决策对象的客观信息，也考虑到决策专家的主观判断，Merigó 等[17]建立了概率有序加权平均距离(POWAD)算子。借助参数将决策对象的概率信息与决策者态度信息相融合，POWAD 算子实现了弹性决策。

本文将概率有序加权平均距离(POWAD)算子推广到犹豫模糊语言环境，提出了犹豫模糊语言概率有序加权平均距离(HFLPOWAD)算子。基于 TOPSIS 方法，将 HFLPOWAD 算子运用到多属性群决策中，提出了一种新的犹豫模糊语言多属性决策方法，并且通过案例分析说明了该方法的可行性。

2. 犹豫模糊语言术语集

Liao 在文[2]中将 Rodríguez 的犹豫模糊语言术语集做了改进，提出了下面的犹豫模糊语言术语集的概念。

定义 2.1 [2] 设 $S = \{s_t \mid t = -\tau, \dots, -1, 0, 1, \dots, \tau\}$ 为语言术语集， $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为一个给定的集合，称 $H_S = \left\{ \left\langle x_i, h_S(x_i) \right\rangle \mid x_i \in X \right\}$ 为 X 上的犹豫模糊语言术语集(HFLTSS)，其中 $h_S(x_i) \subseteq S$ 由对象 x_i 的所有可能隶属度构成，并且称 $h_S(x_i)$ 为犹豫模糊语言术语元(HFLTE)。用 H 表示所有犹豫模糊语言术语元的全体。

给定一个 $h \in H$ ，我们定义它的上下界：

$$1) \text{ 上界: } h^+ = \max \{s_\alpha \mid s_\alpha \in h\},$$

2) 下界: $h^- = \min\{s_\alpha | s_\alpha \in h\}$ 。

Wang 在文[3]中给出了犹豫模糊语言术语元的运算规则。

定义 2.2 [3] 设 $h, h_1, h_2 \in H$, 常数 $\lambda \geq 0$, 定义:

1) $\lambda h = \bigcup_{s_\alpha \in h} \{s_{\lambda\alpha}\}$;

2) $h_1 \oplus h_2 = \bigcup_{s_\alpha \in h_1, s_\beta \in h_2} \{s_{\alpha+\beta}\}$ 。

为了避免集结过程中的信息丢失, 上面关于犹豫模糊语言术语元的运算规则适应于虚拟语言术语集 $\bar{S} = \{s_t | t \in [-\tau, \tau]\}$ 。

3. 概率 OWA 距离算子

基于海明距离, Merigó 等[17]定义了概率有序加权平均距离(POWAD)。

定义 3.1 [17] 设 $\text{POWAD}: R^n \times R^n \rightarrow R^n$, 若

$$\text{POWAD}(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \dots, \langle x_n, y_n \rangle) = \sum_{j=1}^n \hat{p}_j b_j,$$

其中 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 是与函数 POWAD 相关联的加权向量, 满足 $w_j \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^n w_j = 1$; b_j 是数据 $|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|$ 中第 j 大的元素; p_i 是与 $|x_i - y_i|$ 相关联的概率权重, 满足 $p_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$; 且 $\hat{p}_j = \beta w_j + (1 - \beta) p_j$, p_j 是 $|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|$ 中第 j 大的元素所对应的概率权重, $\beta \in [0, 1]$ 表示函数 POWAD 中 OWA 算子的重要度, 则称函数 POWAD 是概率有序加权平均距离(POWAD)算子。

注 3.1 在上面的定义中, $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ 是与变量 $|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|$ 相关联的概率权重, 反映了不确定决策环境中现实事物的概率信息。 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 实际是与 OWA 相关联的加权向量, 反映决策专家的态度特征。因此, 通过 $\beta \in [0, 1]$ 的不同取值, POWAD 算子将决策问题中的客观信息和专家的主观判断有机的结合, 这样得到的集结结果更具灵活性。

通过将主客观因素分离, Merigó 得到了以下结果。

命题 3.1 [17] POWAD 算子的等价形式为:

$$\text{POWAD}(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \dots, \langle x_n, y_n \rangle) = \beta \sum_{j=1}^n w_j b_j + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n p_i |x_i - y_i|,$$

其中 b_j 是数据 $|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|$ 中第 j 大的元素。

4. 犹豫模糊语言概率有序加权平均距离算子

设 $h_1, h_2 \in H$, 用 $l(h_1)$ 和 $l(h_2)$ 分别表示 h_1 和 h_2 中所含语言术语的个数。不妨设 $l(h_1) = l(h_2)$ 。事实上, 如果 $l(h_1) \neq l(h_2)$, 假设 $l(h_1) > l(h_2)$, 则可以借鉴 Xu 在文[18]中提出的方法将 h_2 中添加语言术语 $\eta h_2^+ + (1 - \eta) h_2^-$ 直到 $l(h_1)$ 与 $l(h_2)$ 相等。其中参数 η 表示决策者的风险偏好, 满足 $0 \leq \eta \leq 1$, 参数越接近 1, 风险偏好程度越高。

下面将概率有序加权平均距离(POWAD)算子拓展到犹豫模糊语言环境中。

定义 4.1 设 $E = \{\langle x_i, h_S^E(x_i) \rangle | i = 1, 2, \dots, n\}$ 和 $F = \{\langle x_i, h_S^F(x_i) \rangle | i = 1, 2, \dots, n\}$ 是 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上的两个犹豫模糊语言术语集, 且 $l(h_S^E(x_i)) = l(h_S^F(x_i))$, 记成 l_{x_i} 。若

$$\text{HFLPOWAD}(E, F) = \sum_{k=1}^n \hat{p}_k b_k, \quad (4.1)$$

其中 $h_S^E(x_i)^{\sigma(q)}$ 和 $h_S^F(x_i)^{\sigma(q)}$ 分别是 $h_S^E(x_i)$ 和 $h_S^F(x_i)$ 中所含的第 q 大的语言术语, b_k 是

$(1/l_{x_i}) \sum_{q=1}^{l_{x_i}} |h_S^E(x_i)^{\sigma(q)} - h_S^F(x_i)^{\sigma(q)}|$, $(i=1,2,\dots,n)$ 中第 k 大的距离元素; 每个 x_i 相关的概率权重为 p_i , 满足 $p_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$; 且 $\hat{p}_k = \beta w_k + (1-\beta) p_k$, p_k 是 $(1/l_{x_i}) \sum_{q=1}^{l_{x_i}} |h_S^E(x_i)^{\sigma(q)} - h_S^F(x_i)^{\sigma(q)}|$, $(i=1,2,\dots,n)$ 中第 k 大的距离元素对应的 x_k 的概率权重; $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 是与函数 HFLPOWAD 相关联的加权向量, $w_k \in [0,1]$, $\sum_{k=1}^n w_k = 1$; $\beta \in [0,1]$ 表示函数 HFLPOWAD 中 OWA 算子的重要度, 则称函数 HFLPOWAD 是犹豫模糊语言概率有序加权平均距离(HFLPOWAD)算子。

与 POWAD 算子类似, HFLPOWAD 算子有如下等价形式:

$$\text{HFLPOWAD}(E, F) = \beta \sum_{k=1}^n w_k b_k + (1-\beta) \sum_{i=1}^n \left[\frac{p_i}{l_{x_i}} \sum_{q=1}^{l_{x_i}} |h_S^E(x_i)^{\sigma(q)} - h_S^F(x_i)^{\sigma(q)}| \right], \quad (4.2)$$

b_k 是 $(1/l_{x_i}) \sum_{q=1}^{l_{x_i}} |h_S^E(x_i)^{\sigma(q)} - h_S^F(x_i)^{\sigma(q)}|$, $(i=1,2,\dots,n)$ 中第 k 大的距离元素。

注 4.1 依据不同的决策问题, 定义 4.1 中参数有不同取值, 我们可以得到各种不同类型的集结算子:

1) 若 $\beta = 0$, 由公式(4.2)得到犹豫模糊语言概率距离(HFLPD)算子:

$$\text{HFLPD}(E, F) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{p_i}{l_{x_i}} \sum_{q=1}^{l_{x_i}} |h_S^E(x_i)^{\sigma(q)} - h_S^F(x_i)^{\sigma(q)}| \right]. \quad (4.3)$$

2) 若 $\beta = 1$, 由公式(4.2)得到犹豫模糊语言有序加权平均距离(HFLOWAD)算子:

$$\text{HFLOWAD}(E, F) = \sum_{k=1}^n w_k b_k, \quad (4.4)$$

b_k 是 $(1/l_{x_i}) \sum_{q=1}^{l_{x_i}} |h_S^E(x_i)^{\sigma(q)} - h_S^F(x_i)^{\sigma(q)}|$, $(i=1,2,\dots,n)$ 中第 k 大的距离元素。

3) 若 $P = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$, 由公式(4.2)得到犹豫模糊语言算术有序加权平均距离(HFLAOWAD)算子:

$$\text{HFLAOWAD}(E, F) = \beta \sum_{k=1}^n w_k b_k + \frac{(1-\beta)}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{q=1}^{l_{x_i}} |h_S^E(x_i)^{\sigma(q)} - h_S^F(x_i)^{\sigma(q)}| \right]. \quad (4.5)$$

4) 若 $W = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$, 由公式(4.2)得到犹豫模糊语言概率算术距离(HFLPAD)算子:

$$\text{HFLPAD}(E, F) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\beta}{n} + (1-\beta) p_i \right) \left[\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{q=1}^{l_{x_i}} |h_S^E(x_i)^{\sigma(q)} - h_S^F(x_i)^{\sigma(q)}| \right]. \quad (4.6)$$

5. 基于 HFLPOWAD 算子和 TOPSIS 的决策方法

在决策问题中, 设 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 是方案集, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 是属性集, 属性的权重向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 满足 $\omega_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$. $X_j = \{x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^{l_j}\}$ 是属性 c_j 下所有可能状态构成的状态向量, $P_j = (p_j^1, p_j^2, \dots, p_j^{l_j})$ 是概率向量, p_j^t 表示状态 x_j^t 的概率, 满足 $\sum_{t=1}^{l_j} p_j^t = 1$, 且 $p_j^t \in [0,1]$, $t=1,2,\dots,l_j$, $j=1,2,\dots,n$. 设语言术语集 $S = \{s_t \mid t = -\tau, \dots, -1, 0, 1, \dots, \tau\}$. 设犹豫模糊语言术语元 h_{ij}^t 是方案 A_i 在状态 x_j^t 下 c_j 的属性值, 则方案 A_i 关于属性 c_j 的属性值为犹豫模糊语言术语集 $A_{ij} = \left\{ \langle x_j^1, h_{ij}^1 \rangle, \langle x_j^2, h_{ij}^2 \rangle, \dots, \langle x_j^{l_j}, h_{ij}^{l_j} \rangle \right\}$, $h_{ij}^t \subseteq S$. 针对此决策问题, 将 HFLPOWAD 算子和 TOPSIS 法[19]相结合, 提出下面的决策方法。

步骤 1 不妨假设属性 c_j 在同一个状态 x_j^t 下各方案 A_i 的属性值 h_{ij}^t 中语言术语按递减的方式排列, 且 h_{ij}^t 所含语言术语个数相同, 即 $l(h_{1j}^t) = l(h_{2j}^t) = \dots = l(h_{mj}^t)$, 用 l_j^t 表示, 否则可以将含语言术语个数少的按不同的风险偏好延长. 假设 $h_{ij}^t = \{h_{ij}^{t,1}, h_{ij}^{t,2}, \dots, h_{ij}^{t,l_j^t}\}$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$, $t=1,2,\dots,l_j$, 在犹豫模糊语言环境下, 设

$$A_j^+ = \left\{ \left\langle x_j^t, \left\{ (h_j^{t,1})^+, (h_j^{t,2})^+, \dots, (h_j^{t,l_j})^+ \right\} \right\rangle \mid t = 1, 2, \dots, l_j \right\}, \quad (4.7)$$

$$A_j^- = \left\{ \left\langle x_j^t, \left\{ (h_j^{t,1})^-, (h_j^{t,2})^-, \dots, (h_j^{t,l_j})^- \right\} \right\rangle \mid t = 1, 2, \dots, l_j \right\}, \quad (4.8)$$

分别为属性 c_j 下的正理想和负理想, 其中对任意的 $t = 1, 2, \dots, l_j$,

$$(h_j^{t,q})^+ = \max \{ h_{ij}^{t,q} \mid i = 1, 2, \dots, m \}, \quad q = 1, 2, \dots, l_j',$$

$$(h_j^{t,q})^- = \min \{ h_{ij}^{t,q} \mid i = 1, 2, \dots, m \}, \quad q = 1, 2, \dots, l_j'.$$

步骤 2 对于每个属性 c_j , 设 $W_j = (w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^{l_j'})$ 是与 OWA 相关联的加权向量, 满足 $w_j^i \in [0, 1]$, 且 $\sum_{i=1}^{l_j'} w_j^i = 1$. β_j 是 OWA 算子的重要度。计算每个 A_{ij} 和 A_j^+ 之间的犹豫模糊语言概率有序加权平均距离:

$$\text{HFLPOWAD}(A_{ij}, A_j^+) = \beta_j \sum_{k=1}^{l_j'} w_j^k b_j^k + (1 - \beta_j) \sum_{t=1}^{l_j'} \left[\frac{p_j^t}{l_j'} \sum_{q=1}^{l_j'} \left| h_{ij}^{t,q} - (h_j^{t,q})^+ \right| \right], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.9)$$

其中 b_j^k 是 $(1/l_j') \sum_{q=1}^{l_j'} \left| h_{ij}^{t,q} - (h_j^{t,q})^+ \right|$, $(t = 1, 2, \dots, l_j')$ 中第 k 大的距离元素。

类似地, 每个 A_{ij} 和 A_j^- 之间的犹豫模糊语言概率有序加权平均距离为:

$$\text{HFLPOWAD}(A_{ij}, A_j^-) = \beta_j \sum_{k=1}^{l_j'} w_j^k f_j^k + (1 - \beta_j) \sum_{t=1}^{l_j'} \left[\frac{p_j^t}{l_j'} \sum_{q=1}^{l_j'} \left| h_{ij}^{t,q} - (h_j^{t,q})^- \right| \right], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.10)$$

其中 f_j^k 是 $(1/l_j') \sum_{q=1}^{l_j'} \left| h_{ij}^{t,q} - (h_j^{t,q})^- \right|$, $(t = 1, 2, \dots, l_j')$ 中第 k 大的距离元素。

步骤 3 对于每个属性 c_j , 计算 A_{ij} 与理想点的贴近度:

$$C_{ij} = \frac{\text{HFLPOWAD}(A_{ij}, A_j^-)}{\text{HFLPOWAD}(A_{ij}, A_j^+) + \text{HFLPOWAD}(A_{ij}, A_j^-)}. \quad (4.11)$$

步骤 4 计算各方案 A_i 的综合贴近度:

$$C_i = \sum_{j=1}^n \omega_j C_{ij}. \quad (4.12)$$

步骤 5 根据 $C_i (i = 1, \dots, m)$ 的大小关系确定方案 $A_i (i = 1, \dots, m)$ 的优劣次序。

6. 案例分析

本节讨论上面介绍的决策方法在投资项目中的应用。一家在欧洲和北美运营的公司考虑做一个新的市场投资[20]。有 5 个备选的投资方案: A_1 ——投资于亚洲市场; A_2 ——投资于南美市场; A_3 ——投资于非洲市场; A_4 ——同时投资以上三个市场; A_5 ——不在任何市场投资。考虑的指标属性为: c_1 ——经济效益; c_2 ——社会效益, 属性的权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2) = (0.65, 0.35)$ 。为了对此项目进行评估, 投资方组建了一个专家团队。专家们考虑了影响经济效益 c_1 可能发生的五种状态: x_1^1 ——全球经济形势非常不景气; x_1^2 ——全球经济形势不太景气; x_1^3 ——全球经济形势一般; x_1^4 ——全球经济形势不错; x_1^5 ——全球经济形势非常好。根据以往的经验 and 全球经济现状, 专家们认为这五种状态可能发生的概率权重向量为 $P_1 = (p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, p_1^5) = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$ 。专家们考虑了影响社会效益 c_2 可能发生的三种状态: x_2^1 ——

—不良社会文化环境, x_2^2 ——正常社会文化环境, x_2^3 ——良好社会文化环境。专家们认为这三种状态可能发生的概率权重向量为 $P_2 = (p_2^1, p_2^2, p_2^3) = (0.3, 0.2, 0.5)$ 。

用语言术语集 $S = \{s_{-3}: \text{很差}, s_{-2}: \text{差}, s_{-1}: \text{稍差}, s_0: \text{一般}, s_1: \text{稍好}, s_2: \text{好}, s_3: \text{很好}\}$, 专家们采取匿名的方式在每种状态下对每个方案的两个属性进行评价。针对方案 A_i , 将所有专家给出的状态 x_j^i 下 c_j 的语言术语评价值按照不重复且递减的方式合成一个犹豫模糊语言术语元 h_{ij}^i 。方案 A_i 关于属性 c_j 的所有评价信息形成犹豫模糊语言术语集 $A_{ij} = \{\langle x_j^1, h_{ij}^1 \rangle, \langle x_j^2, h_{ij}^2 \rangle, \dots, \langle x_j^l, h_{ij}^l \rangle\}$, $h_{ij}^i \subseteq S$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, $l_1 = 5$, $l_2 = 3$, $j = 1, 2$ 。决策矩阵见表 1 和表 2。

设投资者的风险偏好参数 $\eta = 0$, 在每个状态 x_j^i 下, 将所含语言术语较少的 h_{ij}^i , 延长使得 $l(h_{ij}^i) = l(h_{2j}^i) = \dots = l(h_{5j}^i)$, 用 l_j^i 表示。延伸后的犹豫模糊语言决策矩阵如表 3 和表 4 所示。

Table 1. Hesitant fuzzy linguistic decision matrix of the attribute c_1

表 1. 属性 c_1 的犹豫模糊语言决策矩阵

	x_1^1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	x_1^5
A_1	$\{s_3, s_2, s_1, s_0\}$	$\{s_1, s_0\}$	$\{s_1, s_0\}$	$\{s_2, s_0\}$	$\{s_1, s_{-1}, s_{-2}\}$
A_2	$\{s_2, s_0\}$	$\{s_3, s_2, s_1, s_{-1}\}$	$\{s_3, s_2, s_0\}$	$\{s_1, s_{-1}, s_{-2}\}$	$\{s_1, s_{-2}\}$
A_3	$\{s_2, s_0, s_{-1}\}$	$\{s_3, s_2, s_0\}$	$\{s_1, s_{-1}\}$	$\{s_1, s_{-1}, s_{-3}\}$	$\{s_0, s_{-1}\}$
A_4	$\{s_3, s_2, s_1\}$	$\{s_3, s_1, s_0\}$	$\{s_1, s_0, s_{-1}\}$	$\{s_1, s_0, s_{-2}\}$	$\{s_1, s_0, s_{-1}\}$
A_5	$\{s_1, s_0, s_{-1}\}$	$\{s_2, s_1, s_0\}$	$\{s_3, s_0, s_{-1}\}$	$\{s_0, s_{-1}\}$	$\{s_0, s_{-2}, s_{-3}\}$

Table 2. Hesitant fuzzy linguistic decision matrix of the attribute c_2

表 2. 属性 c_2 的犹豫模糊语言决策矩阵

	x_2^1	x_2^2	x_2^3
A_1	$\{s_0, s_{-1}\}$	$\{s_2, s_0, s_{-1}\}$	$\{s_3, s_1, s_0\}$
A_2	$\{s_2, s_0\}$	$\{s_1, s_0\}$	$\{s_1, s_0, s_{-1}\}$
A_3	$\{s_1, s_0, s_{-1}\}$	$\{s_2, s_1, s_{-1}\}$	$\{s_1, s_0\}$
A_4	$\{s_2, s_1, s_0\}$	$\{s_1, s_0, s_{-1}\}$	$\{s_3, s_1, s_{-1}\}$
A_5	$\{s_3, s_2, s_{-1}\}$	$\{s_2, s_0\}$	$\{s_1, s_{-1}\}$

Table 3. Extended hesitant fuzzy linguistic decision matrix of the attribute c_1

表 3. 属性 c_1 延伸后的犹豫模糊语言决策矩阵

	x_1^1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	x_1^5
A_1	$\{s_3, s_2, s_1, s_0\}$	$\{s_1, s_0, s_0, s_0\}$	$\{s_1, s_0, s_0\}$	$\{s_2, s_0, s_0\}$	$\{s_1, s_{-1}, s_{-2}\}$
A_2	$\{s_2, s_0, s_0, s_0\}$	$\{s_3, s_2, s_1, s_{-1}\}$	$\{s_3, s_2, s_0\}$	$\{s_1, s_{-1}, s_{-2}\}$	$\{s_1, s_{-2}, s_{-2}\}$
A_3	$\{s_2, s_0, s_{-1}, s_{-1}\}$	$\{s_3, s_2, s_0, s_0\}$	$\{s_1, s_{-1}, s_{-1}\}$	$\{s_1, s_{-1}, s_{-3}\}$	$\{s_0, s_{-1}, s_{-1}\}$
A_4	$\{s_3, s_2, s_1, s_1\}$	$\{s_3, s_1, s_0, s_0\}$	$\{s_1, s_0, s_{-1}\}$	$\{s_1, s_0, s_{-2}\}$	$\{s_1, s_0, s_{-1}\}$
A_5	$\{s_1, s_0, s_{-1}, s_{-1}\}$	$\{s_2, s_1, s_0, s_0\}$	$\{s_3, s_0, s_{-1}\}$	$\{s_0, s_{-1}, s_{-1}\}$	$\{s_0, s_{-2}, s_{-3}\}$

Table 4. Extended hesitant fuzzy linguistic decision matrix of the attribute c_2
表 4. 属性 c_2 延伸后的犹豫模糊语言决策矩阵

	x_2^1	x_2^2	x_2^3
A_1	$\{s_0, s_{-1}, s_{-1}\}$	$\{s_2, s_0, s_{-1}\}$	$\{s_3, s_1, s_0\}$
A_2	$\{s_2, s_0, s_0\}$	$\{s_1, s_0, s_0\}$	$\{s_1, s_0, s_{-1}\}$
A_3	$\{s_1, s_0, s_{-1}\}$	$\{s_2, s_1, s_{-1}\}$	$\{s_1, s_0, s_0\}$
A_4	$\{s_2, s_1, s_0\}$	$\{s_1, s_0, s_{-1}\}$	$\{s_3, s_1, s_{-1}\}$
A_5	$\{s_3, s_2, s_{-1}\}$	$\{s_2, s_0, s_0\}$	$\{s_1, s_{-1}, s_{-1}\}$

步骤 1 对每个属性 c_j ，根据公式(4.7)和(4.8)得到犹豫模糊语言环境下的正理想和负理想分别为：

$$A_1^+ = \left\{ \left\langle x_1^1, \{s_3, s_2, s_1, s_1\} \right\rangle, \left\langle x_2^2, \{s_3, s_2, s_1, s_0\} \right\rangle, \left\langle x_3^3, \{s_3, s_2, s_0\} \right\rangle, \left\langle x_4^4, \{s_2, s_0, s_0\} \right\rangle, \left\langle x_5^5, \{s_1, s_0, s_{-1}\} \right\rangle \right\},$$

$$A_1^- = \left\{ \left\langle x_1^1, \{s_1, s_0, s_{-1}, s_{-1}\} \right\rangle, \left\langle x_2^2, \{s_1, s_0, s_0, s_{-1}\} \right\rangle, \left\langle x_3^3, \{s_1, s_{-1}, s_{-1}\} \right\rangle, \left\langle x_4^4, \{s_0, s_{-1}, s_{-3}\} \right\rangle, \left\langle x_5^5, \{s_0, s_{-2}, s_{-3}\} \right\rangle \right\},$$

$$A_2^+ = \left\{ \left\langle x_2^1, \{s_3, s_2, s_0\} \right\rangle, \left\langle x_2^2, \{s_2, s_1, s_0\} \right\rangle, \left\langle x_2^3, \{s_3, s_1, s_0\} \right\rangle \right\},$$

$$A_2^- = \left\{ \left\langle x_2^1, \{s_0, s_{-1}, s_{-1}\} \right\rangle, \left\langle x_2^2, \{s_1, s_0, s_{-1}\} \right\rangle, \left\langle x_2^3, \{s_1, s_{-1}, s_{-1}\} \right\rangle \right\}.$$

步骤 2 对于每个属性 c_j ，利用 Liu 在文[21]中提出的方法确定与 OWA 相关联的加权向量 $W_j = (w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^l)$ ，取 orness 度为 0.3，则：

$$W_1 = (w_1^1, w_1^2, \dots, w_1^5) = (0.0706, 0.1086, 0.1672, 0.2574, 0.3962),$$

$$W_2 = (w_2^1, w_2^2, w_2^3) = (0.1540, 0.2920, 0.5540).$$

步骤 3 设 OWA 算子的重要度 $\beta_1 = \beta_2 = 0.3$ 。由公式(4.9)和(4.10)可得：

$$\begin{aligned} \text{HFLPOWAD}(A_{11}, A_1^+) &= 0.6409, & \text{HFLPOWAD}(A_{21}, A_1^+) &= 0.6576, \\ \text{HFLPOWAD}(A_{31}, A_1^+) &= 1.075, & \text{HFLPOWAD}(A_{41}, A_1^+) &= 0.5363, \\ \text{HFLPOWAD}(A_{51}, A_1^+) &= 1.2516, & \text{HFLPOWAD}(A_{11}, A_1^-) &= 0.9716, \\ \text{HFLPOWAD}(A_{21}, A_1^-) &= 0.9923, & \text{HFLPOWAD}(A_{31}, A_1^-) &= 0.5604, \\ \text{HFLPOWAD}(A_{41}, A_1^-) &= 1.0803, & \text{HFLPOWAD}(A_{51}, A_1^-) &= 0.4174, \\ \text{HFLPOWAD}(A_{12}, A_2^+) &= 0.7495, & \text{HFLPOWAD}(A_{22}, A_2^+) &= 1.03, \\ \text{HFLPOWAD}(A_{32}, A_2^+) &= 0.9667, & \text{HFLPOWAD}(A_{42}, A_2^+) &= 0.5567, \\ \text{HFLPOWAD}(A_{52}, A_2^+) &= 0.8616, & \text{HFLPOWAD}(A_{12}, A_2^-) &= 0.7362, \\ \text{HFLPOWAD}(A_{22}, A_2^-) &= 0.5895, & \text{HFLPOWAD}(A_{32}, A_2^-) &= 0.6667, \\ \text{HFLPOWAD}(A_{42}, A_2^-) &= 1.0105, & \text{HFLPOWAD}(A_{52}, A_2^-) &= 0.6641. \end{aligned}$$

步骤 4 根据公式(4.11)得到每个 A_{ij} 与理想点的贴近度：

$$C_{11} = 0.6025, C_{21} = 0.6014, C_{31} = 0.3427, C_{41} = 0.6683, C_{51} = 0.2501,$$

$$C_{12} = 0.4955, C_{22} = 0.364, C_{32} = 0.4082, C_{42} = 0.6448, C_{52} = 0.4353.$$

步骤 5 根据公式(4.12)得到每个方案 $A_i (i=1, \dots, 5)$ 的综合贴近度:

$$C_1 = 0.5651, C_2 = 0.5183, C_3 = 0.3656, C_4 = 0.6601, C_5 = 0.3149.$$

步骤 6 由综合贴近度 $C_i (i=1, \dots, 5)$ 的大小关系得到各方案 $A_i (i=1, \dots, 5)$ 的优劣次序为: $A_4 > A_1 > A_2 > A_3 > A_5$ 。

注 6.1 如果将其他类型的 HFLPOWAD 算子运用到上面的例题, 各方案与理想方案的综合贴近度将有所不同, 从而导致各方案的优劣次序也会有差别。具体结果见表 5 和表 6。HFLOWAD 算子仅根据决策者的态度来集结距离信息。HFLPD 算子集结的结果只考虑了概率信息。然而, 通过将 HFLPD 算子与 HFLOWAD 算子相结合, 用 HFLPOWAD 算子得到的结果既反映了决策者的态度信息也反映了不确定环境下的概率信息。另外, 通过分别假设相同的态度权重和相同的概率权重, HFLPAD 算子和 HFLAOWAD 算子可看成 HFLPOWAD 算子的中立状态。针对不同的决策问题, 决策者可以根据实际情况和个人偏好选择不同的距离集结算子。

Table 5. Comprehensive closeness coefficient of the alternatives
表 5. 方案的综合贴近度

	HFLOWAD	HFLPD	HFLPAD	HFLAOWAD
A_1	0.4819	0.5639	0.5577	0.5463
A_2	0.5452	0.5100	0.5124	0.5241
A_3	0.3593	0.3633	0.3586	0.3461
A_4	0.6763	0.6569	0.6507	0.6432
A_5	0.2946	0.3226	0.3329	0.3432

Table 6. Ranking of the alternatives
表 6. 方案的优劣次序

	方案的优劣次序
HFLOWAD	$A_4 > A_2 > A_1 > A_3 > A_5$
HFLPD	$A_4 > A_1 > A_2 > A_3 > A_5$
HFLPAD	$A_4 > A_1 > A_2 > A_3 > A_5$
HFLAOWAD	$A_4 > A_1 > A_2 > A_3 > A_5$

7. 结论

本文将概率有序加权平均距离(POWAD)算子推广到犹豫模糊语言环境中, 提出了一种新的决策方法, 用参数 β 将态度权重和概率权重相结合, 通过 β 的不同取值控制主观信息和客观信息不同占比, 实现了弹性决策。由于语言变量和距离测度的实用性, HFLPOWAD 算子的适用性非常广泛。

基金项目

2019 年度江西省教育科学“十三五”规划课题“犹豫模糊分析视角下的大学生资助机制研究”

(19YB039)。

参考文献

- [1] Rodríguez, R.M., Martínez, L. and Herrera, F. (2012) Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets for Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **20**, 109-119. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2011.2170076>
- [2] Liao, H.C., Xu, Z.S., Zeng, X.J., *et al.* (2015) Qualitative Decision Making with Correlation Coefficients of Hesitant Fuzzy Linguistic Sets. *Knowledge-Based Systems*, **76**, 127-138. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2014.12.009>
- [3] Wang, H. (2015) Extended Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets and Their Aggregation in Group Decision Making. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **8**, 14-33. <https://doi.org/10.2991/ijcis.2015.8.1.2>
- [4] Beg, I. and Rashid, T. (2013) Topsis for Hesitant Fuzzy Linguistic Terms Sets. *International Journal of Intelligent Systems*, **28**, 1162-117. <https://doi.org/10.1002/int.21623>
- [5] Liu, H.B. and Rodriguez, R.M. (2014) A Fuzzy Envelope for Hesitant Fuzzy Linguistic Term Set and Its Application to Multicriteria Decision Making. *Information Sciences*, **258**, 220-238. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.07.027>
- [6] Liao, H.C., Xu, Z.S. and Zeng, X.J. (2014) Distance and Similarity Measures for Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets and Their Application in Multi-Criteria Decision Making. *Information Sciences*, **271**, 125-142. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.02.125>
- [7] Wang, J.Q., Wang, J., Chen, Q.H., *et al.* (2014) An Outranking Approach for Multi-Criteria Decision-Making with Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets. *Information Sciences*, **280**, 338-351. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.05.012>
- [8] Farhadinia, B. (2016) Multiple Criteria Decision-Making Methods with Completely Unknown Weights in Hesitant Fuzzy Linguistic Term Setting. *Knowledge-Based Systems*, **93**, 135-144. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2015.11.008>
- [9] 冯向前, 谭倩云, 钱钢. 犹豫模糊语言的可能度排序方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(4): 640-646.
- [10] 廖虎昌, 缙迅杰, 徐泽水. 基于犹豫模糊语言集的决策理论与方法综述[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(1): 35-48.
- [11] 耿秀丽, 马阳. 基于犹豫模糊语言的多阶段多属性决策方法[J]. 计算机应用研究, 2021, 38(2): 484-488.
- [12] Yager, R.R. (1988) On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, **18**, 183-190. <https://doi.org/10.1109/21.87068>
- [13] Xu, Z.S. and Da, L.Q. (2002) The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators. *International Journal of Intelligent System*, **17**, 709-716. <https://doi.org/10.1002/int.10045>
- [14] Yager, R.R. (1999) Induced Ordered Weighted Averaging Operators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, **29**, 141-150. <https://doi.org/10.1109/3477.752789>
- [15] Su, Z.X., Xia, G.P., Chen, M.Y., *et al.* (2012) Induced Generalized Intuitionistic Fuzzy OWA Operator for Multi-attribute Group Decision Making. *Expert Systems with Applications*, **39**, 1902-1910. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.08.057>
- [16] Merigó, J.M. and Gil-Lafuente, A.M. (2009) The Induced Generalized OWA Operator. *Information Sciences*, **179**, 729-741. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2008.11.013>
- [17] Merigó, J.M. and Casanovas, M. (2011) Decision Making with Distance Measures and Induced Aggregation Operators. *Computers & Industrial Engineering*, **60**, 66-76. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2010.09.017>
- [18] Xu, Z.S. and Zhang, X.L. (2013) Hesitant Fuzzy Multi-Attribute Decision Making Based on TOPSIS with Incomplete Weight Information. *Knowledge-Based Systems*, **52**, 53-64. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2013.05.011>
- [19] Hwang, C.L. and Yoon, K. (1981) Multiple Attribute Decision Making: Methods and Application. Springer, Berlin, Heidelberg, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48318-9_3
- [20] Merigó, J.M. (2012) Probabilities in the OWA Operator. *Expert System with Applications*, **39**, 11456-11467. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2012.04.010>
- [21] Liu, X.W. and Chen, L.H. (2004) On the Properties of Parametric Geometric OWA Operator. *International Journal of Approximate Reasoning*, **35**, 163-178. <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2003.09.001>