Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2021, 11(4), 439-447
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2021.114049

Hans汉斯

基于加权范数的决策模型

刘　旭，尹松庭

铜陵学院，数学与计算机学院，安徽 铜陵

收稿日期：2021年10月8日；录用日期：2021年11月5日；发布日期：2021年11月16日

摘　要

该文以经典灰色关联决策为参照，构造加权范数计算相对贴近度，进而得到决策结果。首先根据各种实际因素的影响程度确定各指标因素的权重，从而确定加权范数。其次，利用加权范数算出理想方案序列与被选方案序列之间的距离。最后，利用被选方案的相对贴近度值，选出最优方案。该文的加权方法因主、客观因素制宜，使得决策结果更具合理性和灵活性，更利于决策者根据实际需要加以选择。

关键词

加权范数，贴近度，决策模型

Decision-Making Model Based on Weighted Norm

Xu Liu, Songting Yin

Department of Mathematics and Computer Science, Tongling University, Tongling Anhui

Received: Oct. 8th, 2021; accepted: Nov. 5th, 2021; published: Nov. 16th, 2021

Abstract

In this paper, based on the classical grey relational decision, the relative closeness degree is calculated by using the weighted norm, and then the decision result is obtained. First, the weight of each indicator factor is determined by the degree of influence of various real factors, which gives the weighted norm. Second, the weighted norm is utilized to calculate the distance between the ideal scheme sequence and the selected one. Finally, the optimal scheme is chosen according to the relative closeness values of the selected scheme. The weighting method in this paper is adapted to subjective and objective factors, which makes more reasonable and flexible decision-making results, and becomes more convenient to choose for decision-makers.

文章引用: 刘旭, 尹松庭. 基于加权范数的决策模型[J]. 运筹与模糊学, 2021, 11(4): 439-447.
DOI: 10.12677/orf.2021.114049

Keywords

Weighted Norm, Closeness Degree, Decision-Making Model

1. 引言

一般的抽象系统都包含着许多不同的因素，往往这些不同的因素共同决定了该系统的变化趋势，但单纯采用数理统计中的方法对抽象系统的分析往往不能达到理想的效果。灰色关联分析方法很好地解决了数理统计遗留下的问题，通常不会出现量化结果与定性分析结果不符的情况[1]。并且随着灰色关联度理论的不断丰富[2]，以及在邓氏灰色关联度基础上进行的改进与拓展研究[3] [4] [5] [6]，有学者提出在传统的灰色关联决策模型的基础上产生新的灰色关联决策模型[7] [8] [9]。在利用决策模型解决实际的问题过程中，为了避免指标因素不加权来解决实际问题的不准确性，有学者采用加权后关联系数的目标最优值来确定各指标因素的权重[10]以及提出利用灰色关联求取权重的方法[11]。同时，也为了避免利用传统的 TOPSIS 方法求取距离来解决实际问题的不准确性[12] [13] [14]，有学者提出对传统的 TOPSIS 方法进行改进并将其运用到不同的领域中[15] [16]。

传统的 TOPSIS 法，通常采用的是标准的欧式距离衡量被选方案与理想方案之间的贴近程度。该公式并没确定各指标因素的权重大小。在定量计算中，各指标因素在决策过程中的权重是十分重要的评判依据，而标准距离恰好忽略了各要素的权重。这就会出现量化结果与定性分析结果不一致的情况。因此，只凭借着理想方案与被选方案之间的标准距离来衡量两个方案的贴近程度是不够准确的。

在传统的决策模型中，当被选方案与正理想方案最贴近时，并不一定远离负理想方案。在此我们提出基于加权范数的决策模型，既考虑到了被选方案与理想方案的距离问题，又能明显体现它与负理想方案的距离。同时，为了提高决策模型的综合分析评价能力和普遍适用性，我们拟采用基于 TOPSIS 的思想定义“相对贴近度”模型。

2. 极值规范化

设某决策问题中的被选方案集合为 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$，指标因素集合为 $P=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$，方案 C_i 在指标 P_j 下的效果评价值为 c_{ij}。为了消除量纲和极差的影响，首先对指标因素数值进行极值规范化处理。

设理想方案 $C_0^+=\left(c_{01}^+,c_{02}^+,\cdots,c_{0n}^+\right)$。其中：$c_{0j}^+\left(j=1,2,\cdots,n\right)$ 为第 j 个指标的理想最优效果值。则方案指标决策矩阵为：

$$B=\begin{bmatrix} C_0^+ \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{01}^+ & c_{02}^+ & \cdots & c_{0n}^+ \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix},$$

其中 c_{ij} 为第 i 个方案的第 j 个指标的效果值。

由于 $c_{0j}^{+}\left(j=1,2,\cdots,n\right)$ 可分为效益型指标和成本型指标，所以采用两种不同的极值规范处理方法。令：

$$M_j=\max_i\left\{c_{ij}\right\}=\max\left(c_{0j},c_{1j},\cdots,c_{mj}\right),$$

$$m_j=\min_i\left\{c_{ij}\right\}=\min\left(c_{0j},c_{1j},\cdots,c_{mj}\right),$$

$$c_{ij}^{*}=\begin{cases}\dfrac{M_j-c_{ij}}{M_j-m_j}, & \text{当}c_{0j}^{+}\text{为成本型指标时,}\\ \dfrac{c_{ij}-m_j}{M_j-m_j}, & \text{当}c_{0j}^{+}\text{为效应性指标时.}\end{cases}$$

则经极值规范后，极值规范矩阵为：

$$B_1=\begin{bmatrix}C_0^{*}\\ C_1^{*}\\ C_2^{*}\\ \vdots\\ C_m^{*}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{01}^{*} & c_{02}^{*} & \cdots & c_{0n}^{*}\\ c_{11}^{*} & c_{12}^{*} & \cdots & c_{1n}^{*}\\ c_{21}^{*} & c_{22}^{*} & \cdots & c_{2n}^{*}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1}^{*} & c_{m2}^{*} & \cdots & c_{mn}^{*}\end{bmatrix}.$$

其中 $c_{0j}^{*}=1,c_{ij}^{*}\in\left[0,1\right],i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$ 。

设负理想方案为 $C_0^{-}=\left(c_{01}^{-},c_{02}^{-},\cdots,c_{0n}^{-}\right)$。其中 $c_{0j}^{-}\left(j=1,2,\cdots,n\right)$ 为第 j 指标的最劣值。则方案指标决策矩阵为：

$$D=\begin{bmatrix}C_0^{-}\\ C_1\\ C_2\\ \vdots\\ C_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{01}^{-} & c_{02}^{-} & \cdots & c_{0n}^{-}\\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{bmatrix},$$

其中 c_{ij} 为第 i 个方案的第 j 个指标的效果值。利用与前面相同的方法，得到极值规范矩阵为：

$$D_1=\begin{bmatrix}C_0^{*}\\ C_1^{*}\\ C_2^{*}\\ \vdots\\ C_m^{*}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{01}^{*} & c_{02}^{*} & \cdots & c_{0n}^{*}\\ c_{11}^{*} & c_{12}^{*} & \cdots & c_{1n}^{*}\\ c_{21}^{*} & c_{22}^{*} & \cdots & c_{2n}^{*}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1}^{*} & c_{m2}^{*} & \cdots & c_{mn}^{*}\end{bmatrix}.$$

其中 $c_{0j}^{*}=0,c_{ij}^{*}\in\left[0,1\right],i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$ 。

3. 决策模型

3.1. 基于加权范数的决策模型

主权赋权法，是决策者根据各要素属性的重要程度来确定属性权重的方法，其原始数据由专家根据经验主观判断而得到。本文采用的主观赋权法是层析分析法。利用层次分析法对各指标因素所赋予的权重进行一致性检验，一致性检验通过则合理。令各指标因素权重为：

$$W=\left(w_1,w_2,\cdots,w_n\right).$$

定义 3.1 设 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，令：

$$\|y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}w_i\left(y_i\right)^2},$$

其中 $\sum_{j=1}^{n}w_j=1,\forall w_j\in[0,1]$。我们称 $\|\cdot\|$ 表示权重为 W 的加权范数。

定理 3.1 定义 3.1 中给出的范数满足非负性，齐次性及三角不等式性。

证明： 1) 非负性。显然成立。

2) 齐次性。对于任意的实数 λ，我们有：

$$\begin{aligned}\|\lambda y\|&=\sqrt{w_1\left(\lambda y_1\right)^2+w_2\left(\lambda y_2\right)^2+\cdots+w_n\left(\lambda y_n\right)^2}\\&=|\lambda|\sqrt{w_1\left(y_1\right)^2+w_2\left(y_2\right)^2+\cdots+w_n\left(y_n\right)^2}\\&=|\lambda|\|y\|.\end{aligned}$$

3) 三角不等式性。因为对于每个 $1\le j\le n$，

$$\begin{aligned}w_j\left|x_j+y_j\right|^2&=w_j\left|x_j+y_j\right|\left|x_j+y_j\right|\\&\le w_j\left|x_j\right|\left|x_j+y_j\right|+w_j\left|y_j\right|\left|x_j+y_j\right|,\end{aligned}$$

则：

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}w_j\left|x_j+y_j\right|^2&\le\sum_{j=1}^{n}\left(w_j\left|x_j\right|\left|x_j+y_j\right|+w_j\left|y_j\right|\left|x_j+y_j\right|\right)\\&\le\left(\sum_{j=1}^{n}w_j\left|x_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}w_j\left|x_j+y_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{j=1}^{n}w_j\left|y_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}w_j\left|x_j+y_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\left(\sum_{j=1}^{n}w_j\left|x_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{j=1}^{n}w_j\left|y_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}w_j\left|x_j+y_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

化简得：

$$\left(\sum_{j=1}^{n}w_j\left|x_{j+}y_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\sum_{j=1}^{n}w_j\left|x_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{j=1}^{n}w_j\left|y_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

即 $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$。

定理 3.2 设理想方案、负理想方案及被选方案分别为：

$$C_0^+=\left(c_{01}^+,c_{02}^+,\cdots,c_{0n}^+\right),$$

$$C_0^-=\left(c_{01}^-,c_{02}^-,\cdots,c_{0n}^-\right),$$

$$C_i=\left(c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in}\right),$$

其中 $i=1,2,\cdots,m$。

令 C_0^0,C_i^0 分别为 C_0^+,C_i 经过极值规范化处理后的序列，S_{0i}^+ 为利用加权范数算出理想方案序列与被选方案序列之间的距离，则：

$$S_{0i}^+=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}w_j\left(c_{0j}^0-c_{ij}^0\right)^2}.$$

令 C_0^1, C_i^1 分别为 C_0^-, C_i 经过极值规范化处理后的序列， S_{0i}^- 为利用加权范数算出负理想方案序列与被选方案序列之间的距离，则：

$$S_{0i}^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j \left(c_{0j}^1 - c_{ij}^1\right)^2} .$$

定义 3.2 设 S_{0i}^+, S_{0i}^- 分别为利用加权范数求取被选方案与理想方案和负理想方案的距离，则称：

$$C_{0i} = \frac{S_{0i}^-}{S_{0i}^+ + S_{0i}^-}, (i = 1, 2, \cdots, m)$$

为被选方案 C_i 与理想方案 C_0 之间相对贴近度。

定理 3.3 设 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 为指标因素的权重，其中 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ 且 $\forall w_j \in [0,1]$。若极值规范矩阵 B_1 和 D_1 固定，则 C_i 与 C_0 的相对贴近度受第 k 个因素的影响程度取决于 w_k 的取值。

证明：注意到

$$C_{0i} = \frac{S_{0i}^-}{S_{0i}^+ + S_{0i}^-} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j \left(c_{0j}^1 - c_{ij}^1\right)^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j \left(c_{0j}^0 - c_{ij}^0\right)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j \left(c_{0j}^1 - c_{ij}^1\right)^2}} .$$

它是定义在超平面区域 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ 中关于 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 的多元函数。于是 C_0 与 C_i 的相对贴近度受第 k 个因素的影响程度可以从 w_k 的两种变化趋势看出来。当 $w_k \to 0$ 时，

$$\lim_{w_k \to 0} C_{0i} = \lim_{w_k \to 0} \frac{S_{0i}^-}{S_{0i}^+ + S_{0i}^-} = \frac{\sqrt{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} w_j \left(c_{0j}^1 - c_{ij}^1\right)^2}}{\sqrt{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} w_j \left(c_{0j}^0 - c_{ij}^0\right)^2} + \sqrt{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} w_j \left(c_{0j}^1 - c_{ij}^1\right)^2}} .$$

此时它的取值与其余 $n-1$ 个因素相关，而与第 k 个因素无关。当 $w_k \to 1$ 时，

$$\begin{aligned}
\lim_{w_k \to 1} C_{0i} &= \lim_{w_k \to 1} \frac{S_{0i}^-}{S_{0i}^+ + S_{0i}^-} \\
&= \frac{\sqrt{w_k \left(c_{0k}^1 - c_{ik}^1\right)^2}}{\sqrt{w_k \left(c_{0k}^0 - c_{ik}^0\right)^2} + \sqrt{w_k \left(c_{0k}^1 - c_{ik}^1\right)^2}} \\
&= \frac{c_{ik}^1 - c_{0k}^1}{c_{0k}^0 - c_{0k}^1} .
\end{aligned}$$

此时它的取值仅与第 k 个因素相关。

传统 TOPSIS 方法中求取被选方案与正负理想方案之间的距离时，采用的是欧氏距离，是没有考虑到各指标因素之间的关联性的；而本文是利用加权范数求取被选方案与正负理想方案之间的距离，将各指标因素之间的关联性考虑进去，改进了传统 TOPSIS 求取距离的方法。因此，在此基础上构建相对贴近度模型使做出的决策更加的准确。

3.2. 基于加权范数的决策算法步骤

基于加权范数的决策算法步骤如下：

1) 首先构造方案指标决策矩阵 B 和 D；

2) 再者将决策矩阵 B 和 D 中的效果评价值 c_{ij} 进行极值规范化处理，得到 2 个极值规范矩阵 B_1 和 D_1；

3) 根据厂家的实际情况和需要，赋值被选方案与理想方案和负理想方案的各指标因素的权重 W；

4) 根据**定义 3.1** 和**定理 3.2** 确定加权范数并利用加权范数计算出正负理想方案与被选方案的距离；

5) 利用**定义 3.2** 计算出被选方案的相对贴近度值 C_{0i}，并依据 C_{0i} 的大小对方案进行排序，最终选出最优方案。

4. 案例分析

某造船厂某一船舶建造工程项目有 4 个建造方案，每个方案有 6 个指标，每个指标具体数据见表 1。现需要在这 4 个建造方案中选择一个最优方案或者对这 4 个方案进行排序，以供厂方在做决策时进行参考(这里我们以文献[7]的算例分析为例)。

Table 1. Ship construction project
表 1. 船舶建造工程项目

	工期/天	劳动成本/万元	资金时间成本/万元	利润/万元	船坞占用周期/天	预期返工率/%
A_1	256	3020	140	1543	80	1.7
A_2	243	2867	133	1482	74	1.3
A_3	268	3175	156	1435	89	1.6
A_4	239	2820	127	1429	72	1.2

该案例的理想方案为：

$$A_0^+ = (239, 2820, 127, 1543, 72, 1.2),$$

负理想方案为：

$$A_0^- = (268, 3175, 156, 1429, 89, 1.7),$$

由此可以构造决策矩阵：

$$B = \begin{bmatrix} C_0^+ \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 239 & 2820 & 127 & 1543 & 72 & 1.2 \\ 256 & 3020 & 140 & 1543 & 80 & 1.7 \\ 243 & 2867 & 133 & 1482 & 74 & 1.3 \\ 268 & 3175 & 156 & 1435 & 89 & 1.6 \\ 239 & 2820 & 127 & 1429 & 72 & 1.2 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} C_0^- \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 268 & 3175 & 156 & 1429 & 89 & 1.7 \\ 256 & 3020 & 140 & 1543 & 80 & 1.7 \\ 243 & 2867 & 133 & 1482 & 74 & 1.3 \\ 268 & 3175 & 156 & 1435 & 89 & 1.6 \\ 239 & 2820 & 127 & 1429 & 72 & 1.2 \end{bmatrix}.$$

对决策矩阵 B 和 D 进行极值规范化处理，可以得到矩阵：

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.41 & 0.44 & 0.55 & 1 & 0.53 & 0 \\ 0.86 & 0.87 & 0.79 & 0.46 & 0.88 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$D_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0.41&0.44&0.55&1&0.53&0\\0.86&0.87&0.79&0.46&0.88&0.8\\0&0&0&0.05&0&0.2\\1&1&1&0&1&1\end{bmatrix}.$$

对于不同的厂家，具体情况也会不同。比如说，有的厂家更注重资金这个指标因素，而对于时间这个指标因素考虑要宽松一些；而有的厂家正好与之相反。因此，对于不同的厂家，我们要根据实际情况制定出各指标因素权重的赋值结果。为了方便比较，我们拟对权重 W 做 3 种不同的赋值。

首先，对各指标因素赋予相等的权重，赋值如下：

$$W=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right).$$

根据**定理 3.2**，利用加权范数算出正负理想方案序列与被选方案序列之间的距离：

$$\left[S_{0i}^{+}\right]=\begin{bmatrix}0.5895\\0.2667\\0.9611\\0.4083\end{bmatrix};\ \left[S_{0i}^{-}\right]=\begin{bmatrix}0.5694\\0.7902\\0.0841\\0.9129\end{bmatrix}.$$

利用**定义 3.2** 分别计算各被选方案的相对贴近度：

$$C_{01}=\frac{S_{01}^{-}}{S_{01}^{+}+S_{01}^{-}}=\frac{0.5694}{0.5694+0.5895}=0.4913.$$

同理可得 $C_{02}=0.7477$， $C_{03}=0.0805$， $C_{04}=0.6910$。因此得出 4 个被选方案的优劣排序为：

$$A_2\succ A_4\succ A_1\succ A_3$$

可以得出 A_2 为最优方案。

其次，将各指标因素分别赋予两种不同的权重 W，赋值如下：

1) $W=(0.5718,0.1489,0.1857,0.0312,0.0312,0.0312)$,

2) $W=(0.0312,0.0312,0.0312,0.5718,0.1489,0.1857)$.

这样，与上面计算类似，得到新的优序排列，并将两者的相关结果列表 2 如下：

Table 2. Decision data based on weighted norm
表 2. 基于加权范数的决策数据

各指标因素赋予的权重(1)			各指标因素赋予的权重(2)		
S_{0i}^{+}	S_{0i}^{-}	C_{0i}	S_{0i}^{+}	S_{0i}^{-}	C_{0i}
0.5669	0.4702	0.4534	0.4955	0.7965	0.6164
0.1808	0.8380	0.8225	0.4229	0.6491	0.6055
0.9928	0.0364	0.0354	0.9367	0.0941	0.0913
0.1766	0.9843	0.8478	0.7561	0.6544	0.4639
优序排列为：$A_4\succ A_2\succ A_1\succ A_3$			优序排列为：$A_1\succ A_2\succ A_4\succ A_3$		

以上是对权重 W 三种不同的赋值。当将各指标因素赋予相等的权重时，得出的最佳决策方案为 A_2；

当我们把六个指标因素分成两组时：将前三个因素赋予较大的权重且它们的和趋近于 1，我们得出的最佳决策方案为A_4；将后三个指标因素赋予较大的权重且它们的和趋近于 1，我们得出的最佳决策方案为A_1。根据**定理 3.3** 分析可得，若极值规范矩阵固定，当指标因素的权重等于 1 时，决策结果则只和该指标因素有关，而C_i与C_0的相对贴近度取决于 W 的取值。我们很清楚的看到，根据后两种权重的分配所算出的最佳决策方案与等权时的最佳决策方案各不相同，这就说明了分配权重较大的指标因素是可以影响最佳决策结果的，由此也可以看出该决策模型的灵敏性较高。另一方面，由于极值规范矩阵的数值对相对贴近度产生基本的影响，所以最终的决策结果不仅与W的赋值有关，而且与极值规范矩阵的数值有关。因此，根据厂家实际情况的需要，合理分配权重从而选出最佳方案的基于加权范数的决策模型是可行的。同时，决策结果与实际分析相吻合，表明了基于加权范数决策模型是合理的。

5. 结论

本文采用了极值规范化对数据进行预处理消除量纲的影响，将数据缩小至区间(0, 1)之间，这样既减少了运算量，又保留了原始数据之间的联系。这种技术化的处理主要参考了一般灰色决策模型，如文献[7]等。其次，对于多属性决策模型，本文提出了基于加权范数的决策模型。根据不同的需求，赋予各指标因素的权重并构建加权范数计算被选方案与理想方案之间的距离。考虑到了各指标因素之间的影响，这种方法是对传统 TOPSIS 法计算距离做了进一步的改进，使得决策结果更加准确。这种优越性主要体现在两个方面：

1) W的赋值充分考虑了厂家或企业的本身实际情况，使得决策结果具有一定主观能动性，而这种主观能动性在实际决策中将起到重要的作用。

2) 范数的引进又充分考虑了各因素的客观事实，使得决策不会偏离严谨的计算结果。

总之，根据计算结果和实际情况对比分析可得，本文基于加权范数的决策模型具有一定的推广价值，很大程度上的丰富和发展了决策理论。

基金项目

铜陵学院 2020 年度大学生科研基金项目(2020tlxydxs142)。

参考文献

[1] 刘思峰，杨英杰，吴利丰，等. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京：科学出版社, 2014: 63-112.

[2] 蒋诗泉，刘思峰，刘中侠，等. 灰色面板数据的关联决策评价模型拓展[J]. 统计与决策, 2018, 34(21): 68-71.

[3] 党耀国，刘思峰，刘斌，等. 灰色斜率关联度的改进[J]. 中国工程科学, 2004, 6(3): 41-44.

[4] 吴利丰，王义闹，刘思峰. 灰色凸关联度及其性质[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(7): 1501-1505.

[5] 王建玲，刘思峰，邱广华，等. 基于信息集结的新型灰色关联度构建及应用[J]. 系统工程与电子技术，2010, 32(1): 77-81.

[6] 孙玉刚，党耀国. 灰色 T 型关联度的改进[J]. 系统工程理论与实践, 2008(4): 135-139.

[7] 蒋诗泉，刘思峰，刘中侠，等. 基于面积的灰色关联决策模型[J]. 控制与决策, 2015, 30(4): 685-690.

[8] 张东兴. 三参数区间灰数信息下的多属性决策方法[D]: [硕士学位论文]. 郑州：河南农业大学, 2019.

[9] 罗党，刘思峰. 不完备信息系统的灰色关联决策方法[J]. 应用科学学报, 2005, 23(4): 408-412.

[10] 刘中侠，刘思峰，蒋诗泉，等. 基于区间灰数相离度的灰色关联决策模型[J]. 统计与信息论坛，2017，32(9): 24-28.

[11] 李庆胜，刘思峰. 灰色犹豫模糊集及其灰关联 TOPSIS 决策方法[J]. 江苏科技大学学报(自然科学版)，2015, 29(6): 597-601+606.

[12] 李沙浪，雷明. 基于 TOPSIS 的省级低碳经济发展评价及其空间面板计量分析[J]. 中国管理科学，2014，22(S1):

741-748.

[13] 高盼. DEA-TOPSIS 模型在小微企业信用评价中的应用[J/OL]. 征信, 2021(5): 71-76.

[14] 张熠, 薛雯文, 王先甲. 基于灰色关联-TOPSIS 的政府公共工程绿色采购评标决策方法研究[J/OL]. 数学的实践与认识, 2021, 51(13): 85-94.

[15] 吴延群, 刘长良. 基于改进型 TOPSIS 法的水电机组运行可靠性分析[J]. 电力科学与工程, 2018, 34(1): 59-65.

[16] 李华, 何正柯, 李群, 等. 改进的 TOPSIS 决策方法在供应商选择中的应用[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(16): 93-101.