Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2022, 12(2), 305-311
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2022.122031

利用磁性Jacobi场比较定理估计轨道球的体积

余俊龙，石青松

贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳

收稿日期：2022年4月8日；录用日期：2022年5月6日；发布日期：2022年5月11日

摘 要

本文运用磁性Jacobi场与轨道球的体积公式的关系，估计轨道球的体积。主要利用磁性Jacobi场比较定理从上面来估计在Kähler磁场上轨道球的体积，其思想是将磁性Jacobi场放大，从而给出轨道球的体积。

关键词

Kähler磁场，轨道球，磁性Jacobi场比较定理，磁场指数映射

By Applying the Comparison Theorem of Magnetic Jacobi Fields to Estimate on Volume of Trajectory-Balls

Junlong Yu, Qingsong Shi

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Apr. 8th, 2022; accepted: May 6th, 2022; published: May 11th, 2022

Abstract

In this paper, we consider the relationship between magnetic Jacobi fields and the formula of trajectory-balls's volume, which is performed to estimate for the volume of trajectory-balls. By applying mainly use the Kähler magnetic Jacobi field comparison theorem to estimate the volume of the orbital sphere on the magnetic field, the idea is to amplify the magnetic Jacobi field to give the volume of the orbital sphere.

文章引用: 余俊龙, 石青松. 利用磁性 Jacobi 场比较定理估计轨道球的体积[J]. 运筹与模糊学, 2022, 12(2): 305-311. DOI: 10.12677/orf.2022.122031

Keywords

Kähler Magnetic Fields, Trajectory-Balls, The Comparison Theorem of Magnetic Jacobi Fields, Magnetic Exponential Map

1. 引言

$(M\ J <>)$ 是一个具有复结构的完备 Kähler 流形。在 Kähler 流形 M 上具有天然的闭 2 形 $\mathbb{B}_J$，我们称 $\mathbb{B}_J$ 为 Kähler 形。如果 Kähler 流形 M 上具有常数倍的 $\mathbb{B}_J$ (记为 $\mathbb{B}_\kappa = \kappa\mathbb{B}_J$)，则称它为 Kähler 磁场。设曲线 γ 为 M 上以单位速度运动的带电粒子的轨迹，如果 γ 是以弧长为参数并满足 $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa J\dot\gamma$ (这里 $\nabla_{\dot\gamma}$ 是对 γ 求协变微分，且具有黎曼连通 ∇ 的性质)，则我们称曲线 γ 为 M 上 $\mathbb{B}_\kappa$ -轨道。我们很容易发现当磁力 $\mathbb{B}_\kappa = 0$ 的时候，轨道 γ 就是测地线，因此我们可以知道测地线与轨道的联系，也就是说轨道是测地线的一般推广。Kähler 磁场上的轨道与复结构紧密联系，为了研究 Kähler 磁场，很自然地考虑用轨道的性质来体现出 Kähler 磁场的一些性质。毫不夸张的说测地线在我们研究黎曼流形中扮演了重要的角色，既给我们研究轨道提供了线索，又在我们估计轨道球的体积发挥了重大作用。

在这篇文章中我们主要研究磁性 Jacobi 场与轨道球体积的关系，运用磁性 Jacobi 场比较定理来对轨道球体积的上界做一个估计。在[1]中，白鹏飞和 Toshiaki Adachi 运用轨道球的体积元素和 Jacobi 场的关系来进行对轨道球体积的研究，主要运用了 Bishop 比较定理和 Rauch 比较定理分别从上面和下面给出了轨道球体积的估计。石青松和 Toshiaki Adachi 在[2]中用另一种方法从下面对轨道球体积进行了估计，并且将结果进行了简化。这篇文章对于轨道球体积的研究既运用了一种新的方法，又将在[1]中从上面估计轨道球的体积进行了优化。我们考虑轨道球体积与磁性 Jacobi 场的关系，运用磁性 Jacobi 场比较定理从上面对轨道球的体积进行估计。主要思想是将磁性 Jacobi 场与轨道球体积公式联系起来，然后对磁性 Jacobi 场进行一个放大，从而可以得出轨道球体积的上界。这个工作能够让我们对一个抽象的轨道球有个大致的了解，在我们以后继续研究轨道中起到重要的作用。

2. 预备知识

在我们进行研究之前，会给出用到的相关的定义、定理、引理和一些例子。我们既然是研究轨道球，所以我们要对轨道球进行定义。首先给出轨道球的定义如下。

定义 2.1 M 是完备的 Kähler 流形。对于任意的一个单位切向量 $\upsilon \in UM$，取 Kähler 磁力 $\mathbb{B}_\kappa$ 上的轨道 γ_υ，满足条件 $\dot\gamma(0) = \upsilon$。给任意一点 $p \in M$，我们定义一个磁场指数映射 $\mathbb{B}_\kappa exp : T_pM \to M$，则在切空间上有：

$$\mathbb{B}_\kappa exp_p(\omega) = \begin{cases} \gamma_\omega/\|\omega\| = (\|\omega\|), & \omega \neq 0_p \\ p, & \omega = 0_p \end{cases}$$

我们称 $\mathbf{B}_r^\kappa(p) = \left\{\mathbb{B}_\kappa exp_p(t\upsilon) \mid 0 \le t \le r, \upsilon \in U_pM\right\}$ 是以 p 为中心，半径为 r 的轨道球。很容易得到当 $\mathbb{B}_\kappa = 0$ 时，$\mathbf{B}_r^0(p)$ 是半径为 r 的测地球，这就体现了轨道球与测地球的关系。

其次我们会给出轨道球体积的公式和相关的定义、引理，从中能清楚的体现出磁性 Jacobi 场与轨道球体积公式的联系。

定义 2.2 设 γ 是具有磁场域 $\mathbb{B}$ 的黎曼流形 M 上的轨道，Y 是跟随 γ 的向量场，并满足：

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}Y-\Omega_{\mathbb{B}}\left(\nabla_{\dot{\gamma}}Y\right)+R\left(Y,\dot{\gamma}\right)\dot{\gamma}=0 \\ \left(\nabla_{\dot{\gamma}}Y,\dot{\gamma}=0\right) \end{cases}$$

则称 Y 是轨道 γ 的磁性 Jacobi 场。

定义 2.3 ([1])一个映射 $\Theta_{\kappa,p}\left(t\upsilon\right)=\mathbb{B}_{\kappa}exp_{p}\left(t\upsilon\right)$，则有 $\Theta_{\kappa,p}:\left(0,r\right)\times U_{p}M\rightarrow M$。用这个映射来考虑 M 的体积，故需要定义一个函数 $\theta_{\kappa}\left(t,\upsilon\right)$，且有 $\theta_{\kappa}\left(t,\upsilon\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega=\Theta_{\kappa,p}^{*}VolM$ (这里的 $\mathrm{d}\omega$ 是球 $S^{2n-1}=U_{p}M$ 的体积元素)。

引理 2.1 ([3])在磁力为 $\mathbb{B}_{\kappa}$ 的 Kähler 流形的轨道 γ 上任取一个磁性 Jacobi 场 X，都可以分为三部分来表示，即 $X=f_{X}\dot{\gamma}+g_{X}J\dot{\gamma}+X^{\perp}$ （f_{X}，g_{X} 是函数)，其中向量场 $X^{\perp}$ 在任意一点处都与 $\dot{\gamma}$ 和 $J\dot{\gamma}$ 正交，且定义 $X^{\#}=g_{X}J\dot{\gamma}+X^{\perp}$。

引理 2.2 ([1])给定一个切向量 μ 属于在任一点 p 的切平面 $T_{p}M$ 上，正常磁性 Jacobi 磁场 $Y_{j}\left(j=2,3,\cdots,2n\right)$ 是随着磁力为 $\mathbb{B}_{\kappa}$ 上轨道 γ_{μ} 运动的，则 Y_{J} 满足以下条件：

1) $Y_{j}=0,\ j=2,3,\cdots,2n$；

2) 向量组 $\mu,\nabla_{\dot{\gamma}_{\mu}}Y_{2}\left(0\right),\cdots,\nabla_{\dot{\gamma}_{\mu}}Y_{2n}\left(0\right)$ 是切平面 $T_{p}M$ 上的标准正交基。

故可得：

$$\theta_{\kappa}\left(t,\mu\right)^{2}=\begin{vmatrix} \left\langle Y_{2}^{\#},Y_{2}^{\#}\right\rangle & \left\langle Y_{2}^{\#},Y_{3}^{\#}\right\rangle & \cdots & \left\langle Y_{2}^{\#},Y_{2n}^{\#}\right\rangle \\ \left\langle Y_{3}^{\#},Y_{2}^{\#}\right\rangle & \left\langle Y_{3}^{\#},Y_{3}^{\#}\right\rangle & \cdots & \left\langle Y_{3}^{\#},Y_{2n}^{\#}\right\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left\langle Y_{2n}^{\#},Y_{2}^{\#}\right\rangle & \left\langle Y_{2n}^{\#},Y_{3}^{\#}\right\rangle & \cdots & \left\langle Y_{2n}^{\#},Y_{2n}^{\#}\right\rangle \end{vmatrix}$$

最后，我们给出两个轨道球体积求法的例子，让我们对轨道球有一个更深层次的了解，具体例子如下。

例子 2.1 在 $\mathbb{C}^{n}$ 中，磁力为 $\mathbb{B}_{\kappa}$ 的完备 Kähler 流形 M 中任取一轨道 γ，γ 是半径为 $1/\left|\kappa\right|$ 圆，故可得到 $\gamma\left(0\right)$ 到 $\gamma\left(r\right)$ 的距离为 $\ell_{\kappa}\left(r;0\right)=\left(2/\left|\kappa\right|\right)\sin\left(\left|\kappa\right|r/2\right)$。在引言中，我们提到了测地球和轨道球的联系，接下来就说明这件事情。当 $0<r<\pi/\left|\kappa\right|$ 时，则就有 $\mathbf{B}_{r}^{\kappa}=\mathbf{B}_{\ell_{\kappa}\left(r;0\right)}\left(p\right)$。 因此，根据这种关系就能得到 $\theta_{\kappa}\left(t,u;0\right)$ 的表达式了，然后就可求得轨道球的体积。

另一方面，将磁力为 $\mathbb{B}_{\kappa}$ 的完备 Kähler 流形 M 上的轨道 γ 的 Jacobi 磁场 Y 表示成 $Y=f_{Y}\left(t\right)\dot{\gamma}+g_{Y}J\dot{\gamma}+Y^{\perp}$，并且满足 $Y\left(0\right)=0$，利用 Jacobi 方程可得以下函数

$$f_{Y}\left(t\right)=a\left(1-\cos\kappa t\right),\quad g_{Y}\left(t\right)=a\sin\kappa t,\quad Y^{\perp}\left(t\right)=\left(1-exp^{\sqrt{-1}\kappa t}\right)E\left(t\right);$$

上面函数中的平行向量 E 是跟随 γ 的，并且 E 是与 $\dot{\gamma}$ 和 $J\dot{\gamma}$ 正交的，则在引理2.2中 Jacobi 磁场可以表示为以下形式：

$$Y_{2}\left(t\right)=\frac{1}{\kappa}\left\{\left(1-\cos\kappa t\right)\dot{\gamma}\left(t\right)+\sin\kappa tJ\dot{\gamma}\left(t\right)\right\},$$

$$Y_{j}\left(t\right)=\frac{1}{\kappa}\left(1-exp^{\sqrt{-1}\kappa t}E\left(t\right)\right),$$

其中平行向量场 $E_3,\cdots,E_{2n}$ 是切平面 $\left(T_{\gamma(0)}\mathbb{C}^n\right)^{\perp}=\left\{\upsilon\in T_{\gamma(0)}\mathbb{C}^n \mid \upsilon\perp\dot{\gamma},J\dot{\gamma}(0)\right\}$ 的一组标准正交基。即就有：

$$\theta_\kappa(t:0,n)=\left(\frac{2}{|\kappa|}\sin\frac{1}{2}|\kappa|t\right)^{2n-1}\cos\frac{1}{2}|\kappa|t.$$

例子 2.2 对于在 $\mathbb{C}P^n(1)$ 中，取磁力为 $\mathbb{B}_\kappa$ 的完备 Kähler 的任一轨道 γ，则轨道 γ 上任意一个正常 Jacobi 场 $Y=f_Y(t)\dot{\gamma}+g_Y J\dot{\gamma}+Y^{\perp}$ 都满足 $Y(0)=0$，则可以将 $f_Y(t),g_Y(t),Y^{\perp}(t)$ 具体表示如下：

$$f_Y(t)=a\kappa\left(1-\cos\sqrt{\kappa^2+1}t\right),\quad g_Y(t)=a\sqrt{\kappa^2+1}\sin\sqrt{\kappa^2+1}t$$

$$Y^{\perp}(t)=exp^{\sqrt{-1}\kappa t/2}\sin\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2+1}tE(t),$$

上面函数中的平行向量场 E 是跟随 γ 的，并且 E 是与 $\dot{\gamma}$ 和 $J\dot{\gamma}$ 正交的，则在引理 2.2 中 Jacobi 磁场可以表示为以下形式：

$$Y_2(t)=\frac{1}{\kappa^2+1}\left\{\left(1-\cos\sqrt{\kappa^2+1}t\right)\gamma(t)+\sqrt{\kappa^2+1}\sin\sqrt{\kappa^2+1}tJ\dot{\gamma}(t)\right\},$$

$$Y_j(t)=\frac{2}{\kappa^2+1}exp^{\sqrt{-1}\kappa t}\sin\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2+1}tE_j(t)\,(j=3,\cdots,2n)$$

其中平行向量场 $E_3,\cdots,E_{2n}$ 是切平面 $\left(T_{\gamma(0)}CP^n\right)^{\perp}=\left\{\upsilon\in T_{\gamma(0)}CP^n \mid \upsilon\perp\dot{\gamma},J\dot{\gamma}(0)\right\}$ 的一组标准正交基。因此 $\theta_\kappa(t;1,n)$ 的具体表达式如下：

$$\theta_\kappa(t;1,n)=\left(\frac{2}{\sqrt{\kappa^2+1}}\sin\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2+1}t\right)^{2n-1}\cos\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2+1}t$$

从这个列子中，可以得到 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(r)$ 之间的距离 $\ell_\kappa(r;1)$ 满足当 $0<r<2\pi/\sqrt{\kappa^2+1}$ 时，有如下等式：

$$\sqrt{\kappa^2+1}\sin\ell_\kappa(r;1)/2=\sin\sqrt{\kappa^2+1}.$$

当 $0<r<\pi/\sqrt{\kappa^2+1}$ 时，可以得到 $\mathbf{B}_r^\kappa(p)=\mathbf{B}_{\ell_\kappa(r;1)}(p)$。

上述两个对轨道球体积求法的例子是比较特殊的，但我们还是能够从中看出在特殊的流行中轨道球的体积可以计算的出来。我们就会有一个很自然的想法：就是在一般的流行中轨道球的体积能否计算呢？在下面的部分就是关于这方面问题的研究，但通过研究发现在一般流行中轨道球体积的计算非常困难，我们只能它的体积进行一个估计，并不能计算出确切的值。

3. 用磁性 Jacobi 场比较定理来估计轨道球的体积

在这部分，我们利用磁性 Jacobi 场比较定理给出轨道球的体积估计，主要的方法是通过函数 $\theta_\kappa(t;c;n)$ 与磁性 Jacobi 场的关系，来给出轨道球体积的估计。在进行该工作之前，我们对常数 κ 定义关于该常数的两个函数：$\mathbb{S}_\kappa(\cdot;c):\left[0,2\pi/\sqrt{\kappa^2+c}\right]\to\mathbf{R}$，$\mathbb{T}_\kappa(\cdot;c):\left(0,2\pi/\sqrt{\kappa^2+c}\right]$。具体表达式如下：

$$\mathbb{S}_\kappa(t;c)=\begin{cases}\left(1/\sqrt{\kappa^2+c}\right)\sin\sqrt{\kappa^2+c}t & \kappa^2+c>0\\ t & \kappa^2+c=0\\ \sqrt{|c|-\kappa^2}\sinh\sqrt{|c|-\kappa^2}t & \kappa^2+c<0\end{cases}$$

$$\mathbb{T}_\kappa(t;c)=\begin{cases}\sqrt{\kappa^2+c}\cot\sqrt{\kappa^2+c}t & \kappa^2+c>0\\ 1/t & \kappa^2+c=0\\ \sqrt{|c|-\kappa^2}\coth\sqrt{|c|-\kappa^2}t & \kappa^2+c<0\end{cases}$$

接下来，我们在给出主要定理之前，介绍几个重要的引理。

引理 3.1 ([1])任取磁力为 $\mathbb{B}_\kappa$ 的完备 Kähler 流形 M 上一条轨道 $\gamma_\mu\,(\mu\in UM)$，假定轨道 γ_μ 在区间 $(0,r)$ 上没有共轭点。因此，γ_μ 上的 Jacobi 场 $W_2,\cdots,W_{2n}$ 都满足以下三个条件：

1) $W_j,\ j=2,\cdots,2n$；

2) $W_2^{\#}(r),\cdots,W_{2n}^{\#}$ 是切空间 $\left(T_{\gamma_{\mu(r)}}M\right)^{\#}=\left\{\upsilon\in T_{\gamma_{\mu(r)}}M \mid \upsilon\perp\dot{\gamma}_\mu(r)\right\}$；

3) $\left(\nabla_{\dot{\gamma}_\mu}W_2\right)(0)$ 是与 $J\mu$ 平行的。

引理 3.2 ([1]) 假定磁力为 $\mathbb{B}_\kappa$ 的完备 Kähler 流形 M 上的一轨道 γ_μ 在区间 $[0,r]$ 上没有共轭点，对于 γ_μ 的一 Jacobi 场 $W_2,\cdots,W_{2n}$；在根据引理 3.1 可得：

$$\frac{1}{\theta_\kappa(r,\mu)}\frac{\partial}{\partial t}\theta_\kappa(t,\mu)\Big|_{t=r}=\sum_{j=2}^{2n}\left\langle W_j^{\#}(r),\left(\nabla_{\dot{\gamma}_\mu}W_j^{\#}\right)(r)\right\rangle.$$

引理 3.3 ([3]) Y 是磁力为 $\mathbb{B}_\kappa$ 的完备 Kähler 流形 M 上一轨道 γ_μ 的任意 Jacobi 场，且有 $Y(0)=0$。向量场 X 是随 γ 运动的，并满足 X 是与 $\dot{\gamma}$ 正交和 $X(0)=0$。如果轨道 γ_μ 在区间 $[0,T]$ 上没有共轭点且 $X(T)=Y(T)$，则有 $Ind_0^T(X)\ge Ind_0^T(Y^{\#})$ (当且仅当 $X=Y^{\#}$ 时等式成立)。

引理 3.4 ([4])函数 $\mathbb{S}_\kappa(t;c)$ 和 $\mathbb{T}_\kappa(t;c)$ 在 $t\in\left[0,\pi/\sqrt{\kappa^2+c}\right]$ 区间上满足以下性质：

1) 当 $|\kappa_1|<|\kappa_2|$ 时，$\mathbb{T}_{\kappa_1}(t;c)>\mathbb{T}_{\kappa_2}(t;c)$；

2) $\mathbb{T}_\kappa(t;c)$ 在区间 $\left(0,\pi/2\sqrt{\kappa^2+c}\right)$ 上单调递增；

3) 当 $\kappa^2+c>0$ 时，$\mathbb{S}_\kappa(t;c)<2\mathbb{S}_\kappa(t/2;c)$，

当 $\kappa^2+c<0$ 时，$\mathbb{S}_\kappa(t;c)>2\mathbb{S}_\kappa(t/2;c)$；

4) 当 $\kappa^2+c>0$ 时，$2\mathbb{T}_\kappa(t;c)<\mathbb{T}_\kappa(t/2;c)$，

当 $\kappa^2+c<0$ 时，$2\mathbb{T}_\kappa(t;c)>\mathbb{T}_\kappa(t/2;c)$。

引理 3.5 ([4]) $Y=f_Y(t)\dot{\gamma}+g_Y J\dot{\gamma}+Y^{\perp}$ 是轨道 γ 的磁性 Jacobi 场。则对 $Y^{\#}=g_X J\dot{\gamma}+Y^{\perp}$，有 $Ind_0^T(Y^{\#})=\left\langle\nabla_{\dot{\gamma}}Y^{\#}(T),Y^{\#}(T)\right\rangle-\left\langle\nabla_{\dot{\gamma}}Y^{\#}(0),Y^{\#}(0)\right\rangle$。

定理 3.1 γ 是磁力 $\mathbb{B}_\kappa$ 为的完备 Kähler 流形 M 上的一轨道，ℓ 是整数，且有 $\ell\le c_\gamma(\gamma(0))$。如果截面曲率满足下面条件：

$$\min\left\{Riem(\upsilon,\dot{\gamma}(t)) \mid \upsilon\in T_{\gamma(t)}M,\upsilon\perp\gamma(t)\right\},\ \ 0<t<l.$$

则可以得到以下结论：

1) $c_\gamma(\gamma(0))\le 2\pi/\sqrt{\kappa^2+4c}$；

2) 对于磁力 $\mathbb{B}_\kappa$ 为的完备 Kähler 流形上的轨道 γ 的任何 Jacobi 场 Y 满足 $Y(0)=0$，当 $0<t<l$ 时有：

$$\left\langle\nabla_{\dot{\gamma}}Y^{\#}(t),Y^{\#}(t)\right\rangle\le\left\|Y^{\#}(t)\right\|^2\mathbb{T}_{\kappa/2}(t;c).$$

证明：首先取磁力为 $\mathbb{B}_\kappa$ 的 $\mathbb{C}M^1(c)$ 上一轨道 $\tilde{\gamma}$，然后又在磁力为 $\mathbb{B}_\kappa$ 的 $\mathbb{C}M^n(4c)$ 上取一轨道 $\hat{\gamma}$。定

义两个映射 P_γ^t 和 $\hat{P}_{\hat{\gamma}}^t$，其作用分别为 $P_\gamma^t: T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma(0)}M$ 和 $\hat{P}_{\hat{\gamma}}^t: T_{\hat{\gamma}(0)}\hat{M} \to T_{\gamma(t)}\hat{M}$。设映射 $I: T_{\gamma(0)}M \to T_{\hat{\gamma}}\hat{M}$，容易知映射 I 是等距映射，也是保内积的，并且满足 $I(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\hat{\gamma}}(0)$ 和 $I(J\dot{\gamma}(0)) = J\dot{\hat{\gamma}}(0)$。对于任一正数 T，有 $T \le \ell$，取轨道 $\hat{\gamma}$ 的一 Jacobi 场 $\hat{Y}$，则有 $\hat{Y}(0)=0; \hat{Y}(T) = \hat{P}_{\hat{\gamma}}^t \circ I \circ P_\gamma^t (Y^\perp(T))$。又可知对于轨道 $\tilde{\gamma}$ 的 Jacobi 场 $\tilde{f}\dot{\tilde{\gamma}} + \tilde{g}J\dot{\tilde{\gamma}}$ 满足 $\tilde{g}(0)=0, \tilde{g}(T) = g_Y(T)$。接着定义一个轨道 γ 的向量场 X，

$X = \tilde{g}(t)J\dot{\gamma}(t) + \hat{P}_{\hat{\gamma}}^t \circ I \circ P_\gamma^t (Y^\perp(T))^{-1}(\hat{Y}(t))$。由此可得

$$
\begin{aligned}
X(T) &= \tilde{g}(T)J\dot{\gamma}(T) + \hat{P}_{\hat{\gamma}}^T \circ I \circ P_\gamma^T (Y^\perp(T))^{-1}(\hat{Y}(T)) \\
&= g_Y(T)J\dot{\gamma}(T) + Y^\perp(T) = Y^\#(T)
\end{aligned}
$$

因此，有 $\mathbb{T}_{\kappa/2}(T;c) = 1/2\,\mathbb{T}_\kappa(T/2;4c)$，由引理 3.4 可以得

$$
\begin{aligned}
\left\|Y^\#(T)\right\|^2 \mathbb{T}_{\kappa/2}(T;c) &= \left|g_Y(T)\right|^2 \mathbb{T}_{\kappa/2}(T;c) + \left\|Y^\perp(T)\right\|^2 \mathbb{T}_{\kappa/2}(T;c) \\
&\ge \left|g_Y(T)\right|^2 \mathbb{T}_\kappa(T;c) + \left\|Y^\perp\right\|^2 \mathbb{T}_{\kappa/2}(T;c) \\
&= \left|g_Y(T)\right|^2 \mathbb{T}_\kappa(T;c) + \left\|\hat{Y}(T)\right\|^2 1/2\,\mathbb{T}_\kappa(T/2;4c) \\
&= \left\langle \tilde{g}(T)\mathbb{T}_\kappa(T;c)J\dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{g}(T)J\dot{\gamma}(t)\right\rangle + \left\|\hat{Y}(T)\right\|^2 1/2\,\mathbb{T}_\kappa(T/2;4c)
\end{aligned}
$$

经计算很容易可得：$\left\|Y^\#(T)\right\|^2 \mathbb{T}_{\kappa/2}(T;c) \ge \left\langle \tilde{g}(T)\mathbb{T}_\kappa(T;c)J\dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{g}(T)J\dot{\gamma}(t)\right\rangle + \left\langle \nabla_{\dot{\hat{\gamma}}}\hat{Y}(T), \hat{Y}(T)\right\rangle$。又由 $\tilde{g}(0)=0, \hat{Y}(0)=0$ 和引理 3.5 可得

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \dot{\tilde{g}}(T), \tilde{g}(T)\right\rangle + \left\langle \nabla_{\dot{\hat{\gamma}}}\hat{Y}(T), \hat{Y}(T)\right\rangle = Ind_0^T\left(\tilde{g}J\dot{\tilde{\gamma}}\right) + Ind_0^T\left(\hat{Y}(T)\right) \\
&\ge \int_0^T \left\{\dot{\tilde{g}}^2 - \kappa^2\tilde{g}^2 + \left\langle \nabla_{\dot{\hat{\gamma}}}\hat{Y} - \kappa J\hat{Y}, \nabla_{\dot{\hat{\gamma}}}\hat{Y}\right\rangle - c\left(\tilde{g}^2 + \left\|\hat{Y}\right\|^2\right)\right\}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \left\{\dot{\tilde{g}}^2 - \kappa^2\tilde{g}^2 + \left\langle \nabla_{\dot{\hat{\gamma}}}\hat{Y} - \kappa J\hat{Y}, \nabla_{\dot{\hat{\gamma}}}\hat{Y}\right\rangle - c\left(\left\|X\right\|^2\right)\right\}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

再由常曲率曲面的性质和引理 3.3 有

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \dot{\tilde{g}}(T), \tilde{g}(T)\right\rangle + \left\langle \nabla_{\dot{\hat{\gamma}}}\hat{Y}(T), \hat{Y}(T)\right\rangle \\
&\ge \int_0^T \left\{\dot{\tilde{g}}^2 - \kappa^2\tilde{g}^2 + \left\langle \nabla_{\dot{\hat{\gamma}}}\hat{Y} - \kappa J\hat{Y}, \nabla_{\dot{\hat{\gamma}}}\hat{Y}\right\rangle - \left\langle R(X,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, X\right\rangle\right\}\mathrm{d}t \\
&= Ind_0^T(X) = Ind_0^T\left(Y^\#\right) = \left\langle \nabla_{\dot{\gamma}}Y^\#(T), Y^\#(T)\right\rangle
\end{aligned}
$$

故容易得出 $\left\|Y^\#(T)\right\|^2 \mathbb{T}_{\kappa/2}(T;c) \ge \left\langle \nabla_{\dot{\gamma}}Y^\#(T), Y^\#(T)\right\rangle$ 的结论，则定理得证。

推论 3.1 M 是完备的 n 维 Kähler 流形，且满足 $Riem(M) \ge c$ （c 是常数)。对于任意一点 $p \in M$，以 p 点为球心、r 为半径的轨道球的体积满足下面的不等式

$$
Vol\left(\mathbf{B}_r^\kappa(p)\right) \le \omega_{2n-1}\int_0^r \mathbb{S}_{\kappa/2}(t;c)^{2n-1}\,\mathrm{d}t
$$

(ω_{2n-1} 是 R^{2n-1} 中单位球 S^{2n-1} 的体积)。

证明：设 $W_j\ (j=2,3,\cdots,2n)$ 是完备的 n 维 Kähler 流形上以 p 点为起始点的轨道 γ 的 Jacobi 场。由引理 3.2 可得

$$
\frac{1}{\theta_\kappa(r,\mu)}\frac{\partial}{\partial t}\theta_\kappa(t,\mu)\Big|_{t=r} = \sum_{j=2}^{2n}\left\langle W_j^\#(r), \left(\nabla_{\dot{\gamma}_\mu}W_j^\#\right)(r)\right\rangle.
$$

很容易看出 Jacobi 场与所求轨道球体积的关系，再用 Jacobi 场比较定理可得

$$\left\langle \nabla_{\dot{\gamma}} Y^{\#}(T), Y^{\#}(T) \right\rangle \le \left\| Y^{\#}(T) \right\|^2 \mathbb{T}_{\kappa/2}(T;c),$$

则就有

$$\frac{1}{\theta_\kappa(r,\mu)} \frac{\partial}{\partial t} \theta_\kappa(t,\mu) \Big|_{t=r} \le \left\| Y^{\#}(T) \right\|^2 \mathbb{T}_{\kappa/2}(T;c) \Big|_{t=r}.$$

又因 $W_j^{\#} = g_j(t) J\dot{\gamma} + W_j^{\perp}$，则可得

$$\frac{1}{\theta_\kappa(r,\mu)} \frac{\partial}{\partial t} \theta_\kappa(t,\mu) \Big|_{t=r} \le (2n-1) \mathbb{T}_{\kappa/2}(T;c) \Big|_{t=r}.$$

即有

$$\theta_\kappa(t,\mu) \le \mathbb{S}_{\kappa/2}(t;c)^{2n-1}.$$

所以可得

$$Vol\left(\mathbf{B}_r^\kappa(p)\right) \le \omega_{2n-1} \int_0^{\infty r} \mathbb{S}_{\kappa/2}(t;c)^{2n-1} \mathrm{d}t.$$

4. 总结

本文是通过磁性 Jacobi 场与轨道球的体积公式的关系，来估计轨道球的体积。主要运用了磁性 Jacobi 场比较定理来对轨道球体积进行了估计，并得到了较理想的结果。主要思想是对磁性 Jacobi 场进行放缩，从而得到我们所需的结果。该工作让我们对抽象的轨道球有一定的了解，为以后研究轨道的性质做出了重要的贡献。

参考文献

[1] Adachi, T. and Bai, P. (2012) Volume of Trajectory-Balls for Kähler Magnetic Fields. *Journal of Geometry*, **105**, 369-389. https://doi.org/10.1007/s00022-014-0226-2

[2] Shi, Q. and Adachi, T. (2016) An Estimate on Volumes of Trajectory-Balls for Kähler Magnetic Fields. *Proceedings of the Japan Academy Series A*: *Mathematical Sciences*, **92**, 47-50. https://doi.org/10.3792/pjaa.92.47

[3] Adachi, T. (1997) A Comparison Theorem for Magnetic Jacobi Fields. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **40**, 293-308. https://doi.org/10.1017/S0013091500023737

[4] Adachi, T. (2011) Magnetic Jacobi Fields for Kähler Magnetic Fields. In: *Recent Progress in Differential Geometry and Its Related Fields*, World Scientific Publishing, Hackensack, 41-53. https://doi.org/10.1142/9789814355476_0003