Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2022, 12(3), 738-747
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2022.123078

Hans汉斯

稀疏图的列表单射边染色

胡小兵，黄宁戈，陈莉莉*

华侨大学数学科学学院，福建 泉州

收稿日期：2022年7月3日；录用日期：2022年7月30日；发布日期：2022年8月8日

摘 要

图G的单射边染色是对图G的边进行染色，使得如果三条边e_1，e_2，e_3是连续的，那么e_1和e_3染不同的颜色。图G的单射边色数是所有单射边染色中所用颜色最少的颜色数。在本文中，我们考虑单射边染色的列表版本，得到在最大平均度条件限制下稀疏图的列表单射边色数的上界。

关键词

稀疏图，单射边染色，权转移法，列表单射边染色

List Injective Edge Coloring of Sparse Graphs

Xiaobing Hu, Ningge Huang, Lili Chen*

School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou Fujian

Received: Jul. 3rd, 2022; accepted: Jul. 30th, 2022; published: Aug. 8th, 2022

Abstract

An injective edge coloring of a graph G is a coloring of the edges of G, such that if three edges e_1, e_2, and e_3 are consecutive, then e_1 and e_3 are colored differently. The injective edge coloring number is the smallest number of colors used in all injective edge colorings of G. In this paper, we consider the list injective edge coloring of graphs, and obtain some upper bounds of the list injective edge coloring number of sparse graphs in terms of the maximum average degree of G.

Keywords

Sparse Graphs, Injective Edge Coloring, Discharging Method, List Injective Edge Coloring

*通讯作者。

文章引用: 胡小兵, 黄宁戈, 陈莉莉. 稀疏图的列表单射边染色[J]. 运筹与模糊学, 2022, 12(3): 738-747.
DOI: 10.12677/orf.2022.123078

1. 引言

图 G 的三条边 e_1，e_2，e_3 如果按此顺序形成一条长为 3 的路或一个 3-圈，则称它们是连续的。图 G 的 k-单射边染色是一个映射 $f:E(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$，使得如果边 e_1，e_2，e_3 是连续的，则 $f(e_1)\neq f(e_3)$。图 G 的单射边色数是所有单射边染色中所用颜色最少的颜色数，记为 $\chi'_{inj}(G)$。单射边染色的概念是由 Cardoso [1]等为解决分组无线网络问题提出的，是单射点染色的推广。单射点染色是 Hahn [2]等人提出，用于编码理论和电脑网络[3]的设计。Jin [4]等证明了确定图的单射色数是 NP 完全的。Cardoso [1]等和 Foucaud [5]等分别考虑了单射边色数的计算复杂性，并证明了确定单射边色数是否不超过 k 是 NP 完全的。由此可得确定一般图的单射边色数的精确值是比较困难的，因此学者们通常研究特殊图的单射边色数[6] [7] [8] [9]，或者在给定条件限制下来研究单射边色数的上下界。如 Kostochka [10]等人在 Hahn 的研究基础上得到了在最大度限制下次立方图的单射边色数的上界。卜月华[11]等人考虑了在最大度以及最大平均度限制下稀疏图的单射边色数的上界，得到如下结果：

定理 1 对于 $\Delta(G)\le 3$ 的图 G，有

(1) 若 $mad(G)<\frac{5}{2}$，则 $\chi'_{inj}(G)\le 5$，

(2) 若 $mad(G)<\frac{18}{7}$，则 $\chi'_{inj}(G)\le 6$。

定理 2 对于 $\Delta(G)\le 4$ 的图 G，有

(1) 若 $mad(G)<\frac{22}{7}$，则 $\chi'_{inj}(G)\le 12$，

(2) 若 $mad(G)<\frac{10}{3}$，则 $\chi'_{inj}(G)\le 13$，

(3) 若 $mad(G)<\frac{18}{5}$，则 $\chi'_{inj}(G)\le 14$，

(4) 若 $mad(G)<\frac{15}{4}$，则 $\chi'_{inj}(G)\le 15$。

苗正科[12]等人得到了最大度为 4，单射边色数不超过 9，10，11，12 的充分条件。本文在卜月华等人的研究基础上讨论在最大度及最大平均度限制下稀疏图的列表单射边色数的上界。令 L 是图 G 的边列表分配，即给每条边 e 分配可能的颜色集 $L(e)$。给定图 G 的边列表分配 L，如果它有一个单射边染色 f，使得对每条边 $e\in E(G)$，有 $f(e)\in L(e)$，则称图 G 是 L-单射边可染的，f 是图 G 的一个 L-单射边染色。如果对于图 G 的每个边列表分配 L，满足对每条边 $e\in E(G)$，$|L(e)|\ge k$，图 G 都是 L-单射边可染的，则称图 G 是 k-单射边可选的。使图 G 是 k-单射边可选的最小的 k 值称为图 G 的列表单射边色数，记为 $ch'_{inj}(G)$。显然，对于任意的图 G 有 $\chi'_{inj}(G)\le ch'_{inj}(G)$。Lv [6]等人考虑了次立方图的列表单射边色数的上界。本文讨论 $\Delta(G)\le 3$ 和 $\Delta(G)\le 4$ 的稀疏图的列表单射边色数的上界，得到如下结果：

定理 3 对于 $\Delta(G)\le 3$ 的图 G，有

(1) 若 $mad(G)<\frac{5}{2}$，则 $ch'_{inj}(G)\le 5$，

(2) 若 $mad(G)<\frac{13}{5}$，则 $ch'_{inj}(G)\le 6$，

(3) 若 $mad(G)<\frac{8}{3}$，则 $ch'_{inj}(G)\le 7$。

定理 4 对于 $\Delta(G)\le 4$ 的图 G，有

(1) 若 $mad(G)<\frac{19}{6}$，则 $ch'_{inj}(G)\le 12$，

(2) 若 $mad(G)<\frac{17}{5}$，则 $ch'_{inj}(G)\le 13$，

(3) 若 $mad(G)<\frac{18}{5}$，则 $ch'_{inj}(G)\le 14$，

(4) 若 $mad(G)<\frac{15}{4}$，则 $ch'_{inj}(G)\le 15$。

由于 $\chi'_{inj}(G)\le ch'_{inj}(G)$，定理 3 和定理 4 的结果对单射边色数也是成立的，因此我们的结果略微改进了卜月华等人的结果，并增加了列表单射边色数不超过 7 的充分条件。接下来我们先给出本文中需用到的基本概念和符号，然后给出定理 3 和定理 4 (1)和(2)的证明。由于定理 4 (3)和(4)的证明与定理 2 (3)和(4)的证明几乎一致，本文我们省略了这两个证明。

2. 预备知识

设图 G 是一个有限的、简单的无向连通图，分别用 $V(G)$，$E(G)$，$\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 来表示它的顶点集、边集、最小度和最大度。用 $d(v)$ 表示图 G 中顶点 v 的度数，如果 $d(v)=i$ （$d(v)\ge i$ 或 $d(v)\le i$），则称 v 为 i （i^+ 或 i^-)-点。用 $N(v)$ 表示 v 的邻点的集合，v 的 i （i^+ 或 i^-)-邻点表示 v 的一个度为 i （i^+ 或 i^-）的邻点。用 i_j-点表示与 j 个 2-点相邻的 i-点，i^j-点表示与 j 个 3-点相邻的 i-点，i_j^k-点表示与 j 个 2-点、k 个 3-点相邻的 i-点。如果两个顶点 u，v 与同一个 i-点相邻，那么称这两个顶点 u，v 是 i-弱相邻的。假设 f 是图 G 的一个部分边染色，对于边 $e\in E(G)$，用 $F_f(e)$ 表示染色过程中边 e 不能用的颜色集合，用 $L_f(e)$ 表示染色过程中 e 可用的颜色集合。

图 G 的最大平均度为 $mad(G)=\max\left\{\frac{2|E(H)|}{|V(H)|},H\subseteq G\right\}$。

若对于图 G，$ch'_{inj}(G)>k$ 且 $\forall H\subseteq G$，$ch'_{inj}(H)\le k$，则称图 G 为列表单射边 k-临界图。我们将用权转移法来进行定理的证明。权转移法的主要思想是：假设图 G 为列表单射边 k-临界图，对 G 中每一个点 v 进行赋权，初始权重 $w(v)=d(v)$。假设有 $m>0$，使得 $mad(G)<m$，那么有

$$\sum_{v\in V(G)} w(v)=\sum_{v\in V(G)} d(v)\le mad(G)\times|V(G)|<m\times|V(G)|. \tag{1}$$

再按照设立的权转移规则重新分配权重。在重新分配后，若 G 中每一点 v 都有一个新的权重 $w^*(v)$ 使得 $w^*(v)\ge m$，那么

$$m\times|V(G)|\le\sum_{v\in V(G)} w^*(v)=\sum_{v\in V(G)} w(v)<m\times|V(G)|. \tag{2}$$

出现矛盾，因此 $ch'_{inj}(G)\le k$。

3. 定理 3 的证明

假设图 G 是列表单射边 k-临界图，$k=5,6,7$，$\Delta(G)\le 3$，我们将分别给出图 G 的结构性质，运用权转移法得到定理 3 的证明。

3.1. 定理 3 (1)的证明

假设图 G 是列表单射边 5-临界图，其中 $\Delta(G)\le 3$，$mad(G)<\frac{5}{2}$。设 L 是图 G 的边列表分配，满足对每条边 $e\in E(G)$，$|L(e)|=5$，且图 G 不是 L-单射边可染的。则图 G 有下列性质：

引理 1 $\delta(G)\ge 2$。

证明 假设图 G 中包含一个 1-点 v，设 u 为 v 的邻点。由 G 的极小性，$G'=G-v$ 有一个 L-单射边染色 f。注意到 $|F_f(uv)|\le 4$，因此 $|L_f(uv)|\ge 1$。将边 uv 染 $L_f(uv)$ 中的颜色，可得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 2 G 中每个 3-圈最多含有 1 个 2-点。

证明 假设 $uvwu$ 是 G 中的一个 3-圈，u 和 v 是两个 2-点。由 G 的极小性，$G'=G-\{u,v\}$ 有一个 L-单射边染色 f。由于 $|L_f(uw)|\ge 3$，$|L_f(vw)|\ge 3$，$|L_f(uv)|\ge 4$，因此可以依次给边 uw，vw 和 uv 染色，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 3 G 中的 2-点最多与 1 个 2-点相邻。

证明 假设 G 中存在 2-点 u 与 2 个 2-点 v 和 w 相邻。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f，则 $|L_f(uv)|\ge 2$，$|L_f(uw)|\ge 2$，因此可以依次给边 uv 和 uw 染色，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 4 G 中的 3-点最多与 2 个 2-点相邻。

证明 假设 G 中存在 3-点 u 与 3 个 2-点 v_1，v_2，v_3 相邻。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f。根据引理 2，$v_i\,(i=1,2,3)$ 不会在 3-圈中，因此 uv_1，uv_2，uv_3 可以染相同颜色。又由于 $|L_f(uv_1)|\ge 1$，$|L_f(uv_2)|\ge 1$，$|L_f(uv_3)|\ge 1$，因此可以依次给边 uv_1，uv_2 和 uv_3 染色，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 5 G 中的 3_2-点不与任意 2-点 2-弱相邻。

证明 假设 G 中存在 3_2-点 u 与一个 2-点 2-弱相邻，设该 2-点为 v，w 是 u 和 v 的公共邻点，$d(w)=2$。由 G 的极小性，$G'=G-w$ 有一个 L 单射边染色 f-。由于 $|L_f(uw)|\ge 1$，$|L_f(wv)|\ge 1$，且由引理 2，uw 和 wv 不在同一个 3-圈中，可以染同种颜色，因此可以依次给边 uw 和 wv 染色，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

接下来对 G 中的每一个顶点 v 进行赋权，初始权重 $w(v)=d(v)$。

定义权转移规则如下：

R_{11}：每个 3_1-点给相邻的 2-点 $\frac{1}{2}$ 权重。

R_{12}：每个 3_2-点给相邻的 2-点 $\frac{1}{4}$ 权重。

对每个顶点 $v\in V(G)$，记 $w^*(v)$ 为新的权重。下面验证对每个顶点 $v\in V(G)$，$w^*(v)\ge\frac{5}{2}$。

如果 v 是 2-点且与两个 3-点相邻，那么由 R_{11}，R_{12} 有 $w^*(v)\ge 2+\frac{1}{4}\times 2=\frac{5}{2}$。如果 v 与一个 2-点相邻，根据引理 3，v 的另一个邻点是 3-点，设为顶点 u。由引理 5，u 是 3_1-点。因此，由 R_{11} 有 $w^*(v)\ge 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$。

如果 v 是 3-点，那么根据引理 4，v 最多与两个 2-点相邻。因此，由 R_{11}，R_{12} 有

$$w^*(v)\ge \min\left\{3-2\times\frac{1}{4},3-\frac{1}{2}\right\}=\frac{5}{2}。$$

在(1)和(2)式中取 $m=\frac{5}{2}$，得到矛盾。因此 $ch'_{inj}(G)\le 5$，定理 3 (1)证毕。

3.2. 定理 3 (2)的证明

注意到，当 $i\le j$ 时，列表单射边 i-临界图的性质同样适用于列表单射边 j-临界图。

假设图 G 是列表单射边 6-临界图，其中 $\Delta(G)\le 3$，$mad(G)<\frac{13}{5}$。设 L 是图 G 的边列表分配，满足对每条边 $e\in E(G)$，$|L(e)|=6$，且图 G 不是 L-单射边可染的。那么引理 1 至引理 5 的性质对图 G 仍成立，同时图 G 还具有以下性质：

引理 6 G 中每个 3-圈不含有 2-点。

证明 假设 $uwvu$ 是 G 中的一个 3-圈，其中 $d(u)=2$。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f，则 $|L_f(uv)|\ge 2$，$|L_f(uw)|\ge 2$，因此可以依次给边 uv 和 uw 染色，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 7 G 中不存在 2 个相邻的 2-点。

证明 假设 u 和 v 是 G 中 2 个相邻的 2-点，w 是 v 的另一个邻点。由 G 的极小性，$G'=G-v$ 有一个 L-单射边染色 f，则 $|L_f(uv)|\ge 2$，$|L_f(vw)|\ge 1$。因此可以依次给边 vw 和 uv 染色，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 8 G 中 2-点最多与 1 个 3_2-点相邻。

证明 假设 u 是 G 中的一个 2-点，与 u 相邻的两个顶点 v 和 w 都是 3_2-点。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f。根据引理 6，uv 和 uw 不在同一个 3-圈中，因此可以染相同颜色。又由于 v 和 w 都是 3_2-点，$|L_f(uv)|\ge 1$，$|L_f(uw)|\ge 1$。因此可以依次给边 uv 和 uw 染色，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

接下来对 G 中的每一个顶点 v 进行赋权，初始权重 $w(v)=d(v)$。

定义权转移规则如下：

R_{21}：每个 3_1-点给相邻的 2-点 $\frac{2}{5}$ 权重。

R_{22}：每个 3_2-点给相邻的 2-点 $\frac{1}{5}$ 权重。

对每个顶点 $v\in V(G)$，记 $w^*(v)$ 为新的权重。下面检验对任意 $v\in V(G)$，$w^*(v)\ge\frac{13}{5}$。

如果 v 是 2-点，则由引理 7、引理 8 以及 R_{21}、R_{22}，$w^*(v)\ge 2+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{13}{5}$。

假设 v 是 3-点。如果 v 是 3_1-点，则根据 R_{21} 有 $w^*(v)=3-\frac{2}{5}=\frac{13}{5}$。如果 v 是 3_2-点，则根据 R_{22} 有 $w^*(v)=3-\frac{1}{5}\times 2=\frac{13}{5}$。

在(1)和(2)式中取 $m=\frac{13}{5}$，得到矛盾。因此 $ch'_{inj}(G)\le 6$，定理 3 (2)证毕。

3.3. 定理 3 (3)的证明

假设图 G 是列表单射边 7-临界图，其中 $\Delta(G)\le 3$，$mad(G)<\frac{8}{3}$。设 L 是图 G 的边列表分配，满足对每条边 $e\in E(G)$，$|L(e)|=7$，且图 G 不是 L-单射边可染的。则列表单射边 6-临界图的性质对图 G 仍

成立，且图 G 还具有以下性质：

引理 9 G 中不存在 3_2-点。

证明 假设 G 中存在 3_2-点 u，v_1，v_2 和 v_3 是 u 的邻点且 $d(v_1)=d(v_2)=2$。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f。则 $|L_f(uv_1)|\ge 2$，$|L_f(uv_2)|\ge 2$，$|L_f(uv_3)|\ge 1$，根据引理 6，uv_1，uv_2，uv_3 中任意 2 条边不会在同一个 3-圈中，因此 uv_1，uv_2，uv_3 可以染相同颜色，依次给边 uv_1，uv_2 和 uv_3 染色，可以得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

接下来对 G 中的每一个顶点 v 进行赋权，初始权重 $w(v)=d(v)$。

定义权转移规则如下：

R_{31}：每个 3_1-点给相邻的 2-点 $\frac{1}{3}$ 权重。

对每个顶点 $v\in V(G)$，记 $w^*(v)$ 为新的权重。下面验证对每个顶点 $v\in V(G)$，$w^*(v)\ge\frac{8}{3}$。

如果 v 是 2-点，则由引理 7，v 不与 2-点相邻，再由引理 9，2-点只与 3_1-点相邻，由 R_{31} 有 $w^*(v)=2+2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$。

如果 v 是 3-点，则根据 R_{31} 有 $w^*(v)\ge 3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$。

在(1)和(2)式中取 $m=\frac{8}{3}$，得到矛盾。因此 $ch'_{inj}(G)\le 7$，定理 3 (3)证毕。

4. 定理 4 的证明

本节给出定理 4 (1)和(2)的证明。假设图 G 是列表单射边 k-临界图，$k=12,13$，$\Delta(G)\le 4$，我们将分别给出图 G 的结构性质，运用权转移法得到证明。

4.1. 定理 4 (1)的证明

假设图 G 是列表单射边 12-临界图，其中 $\Delta(G)\le 4$，$mad(G)<\frac{19}{6}$。设 L 是图 G 的边列表分配，满足对每条边 $e\in E(G)$，$|L(e)|=12$，且图 G 不是 L-单射边可染的。则图 G 有以下性质：

引理 10 $\delta(G)\ge 2$。

证明 该证明类似引理 1 的证明，故略去。□

引理 11 (1) G 中的每个 3-圈不含有 2-点；(2) G 中没有 3-点在 3 个 3-圈中。

证明 (1) 该证明类似引理 6 的证明，故略去。

(2) 假设 G 中存在 1 个 3-点 u 在 3 个 3-圈中，v，w 和 x 是 u 的 3 个邻点。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f。则 $|L_f(uv)|\ge 4$，$|L_f(uw)|\ge 4$，$|L_f(ux)|\ge 4$，因此可以给边 uv，uw 和 ux 染不同颜色，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 12 (1) G 中的 2-点只与 4-点相邻；(2) G 中的 4-点最多与 1 个 2-点相邻。

证明 (1) 假设 G 中存在 1 个 2-点 u，v 和 w 是 u 的邻点，且 v 是 3^--点。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f。则 $|L_f(uv)|\ge 3$，$|L_f(uw)|\ge 1$，因此可以依次染 uw，uv，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。

(2) 假设 G 中存在 1 个 4-点 u 与 2 个 2-点相邻。设 v 和 w 是 u 的 2 个 2-邻点，x 是 v 的另一个邻点。由 G 的极小性，$G'=G-v$ 有一个 L-单射边染色 f。首先，去掉边 uw 上的颜色。根据引理 11，uv，uw 和

vx 不在任何 3-圈中，因此 $\left|L_f\left(vx\right)\right|\geq 1$。我们先给 vx 染色，此时 $\left|L_f\left(uv\right)\right|\geq 2$，$\left|L_f\left(uw\right)\right|\geq 2$，所以可以依次染 uv，uw，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 13 G 中的 4_1-点最多与 2 个 3-点相邻。

证明 假设 G 中存在 1 个 4_1-点 u 与 3 个 3-点 v，w，x 相邻。设 u 的另一个 2-邻点为 y，y 的另一个邻点记为 z。由 G 的极小性，$G'=G-y$ 有一个 L-单射边染色 f。首先我们去掉边 ux 上的颜色。则 $\left|L_f\left(yz\right)\right|\geq 1$，$\left|L_f\left(uy\right)\right|\geq 3$，$\left|L_f\left(ux\right)\right|\geq 2$，因此可以依次染边 yz，ux，uy，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 14 G 中的 2-点最多与 1 个 4_1^2-点相邻。

证明 假设 G 中存在 1 个 2-点 u，它的 2 个邻点 v 和 w 均为 4_1^2-点。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f。由于 $\left|L_f\left(uv\right)\right|\geq 2$，$\left|L_f\left(uw\right)\right|\geq 2$，因此可以依次染边 uv，uw，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 15 G 中的每个 3-圈最多包含 2 个 3-点。

证明 假设 G 中存在 1 个 3-圈 $uvwu$，且 $d\left(u\right)=d\left(v\right)=d\left(w\right)=3$。设 u，v，w 在 3-圈之外的邻点分别是 u_1，v_1，w_1。

如果 u_1，v_1，w_1 两两均不重合，那么由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f。首先，去掉边 vw 上的颜色。此时 $\left|L_f\left(uu_1\right)\right|\geq 1$，$\left|L_f\left(uv\right)\right|\geq 5$，$\left|L_f\left(uw\right)\right|\geq 5$，$\left|L_f\left(vw\right)\right|\geq 6$，我们可以依次染边 uu_1，uv，uw，vw，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。

如果 u_1，v_1，w_1 有重合，那么根据引理 11，在 $\{u_1,v_1,w_1\}$ 中最多有 2 个点重合。不妨设 $v_1=w_1=x$。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有 1 个 L-单射边染色 f。首先，去掉边 vw 上的颜色。此时 $\left|L_f\left(uu_1\right)\right|\geq 1$，$\left|L_f\left(uv\right)\right|\geq 6$，$\left|L_f\left(uw\right)\right|\geq 6$，$\left|L_f\left(vw\right)\right|\geq 8$，我们可以依次染边 uu_1，uv，uw，vw，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 16 G 中的 3-点最多与 2 个 3-点相邻。

证明 假设 G 中存在 1 个 3-点 u 与 3 个 3-点 v，w，x 相邻。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f。由于 u，v，w，x 都是 3-点，根据引理 15，u 不在 G 的任意一个 3-圈内，因此 uv，uw，ux 可以染相同颜色。又由于 $\left|L_f\left(uv\right)\right|\geq 2$，$\left|L_f\left(uw\right)\right|\geq 2$，$\left|L_f\left(ux\right)\right|\geq 2$，故我们可以依次染边 uv，uw，ux，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

下面对 G 中的每一个顶点 v 进行赋权，初始权重 $w\left(v\right)=d\left(v\right)$。

定义权转移规则如下：

R_{41}：每个 2-点从与它相邻的 $4_1^0,4_1^1$-点获得 $\frac{2}{3}$ 权重。

R_{42}：每个 2-点从与它相邻的 4_1^2-点获得 $\frac{1}{2}$ 权重。

R_{43}：每个 3-点从与它相邻的 4-点获得 $\frac{1}{6}$ 权重。

接下来，我们检查对任意 $v\in V\left(G\right)$，新的权重 $w^*\left(v\right)\geq\frac{19}{6}$。

如果 v 是 2-点，则根据引理 12，v 有 2 个 4-邻点，且这 2 个 4-邻点都是 4_1-点。根据引理 13、引理 14，R_{41} 和 R_{42} 有 $w^*\left(v\right)\geq 2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{19}{6}$。

如果 v 是 3-点，则根据引理 16，v 至少与 1 个 4-点相邻，由 R_{43} 有 $w^*\left(v\right)\geq 3+\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$。

如果 v 是 4-点，则根据引理 12，v 只能是 4_1-点或 4_0-点。如果 v 是 4_1-点，那么根据引理 13，v 只能是 4_1^0-点、4_1^1-点或 4_1^2-点。当 v 是 4_1^0 或 4_1^1-点时，$w^*(v)\ge 4-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=\frac{19}{6}$；当 v 是 4_1^2-点时，$w^*(v)=4-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\times 2=\frac{19}{6}$。如果 v 是 4_0-点，则由 R_{43} 有 $w^*(v)\ge 4-\frac{1}{6}\times 4=\frac{20}{6}>\frac{19}{6}$。

于是在(1)和(2)式中取 $m=\frac{19}{6}$，得到矛盾。因此 $ch'_{inj}(G)\le 12$，定理 4 (1)证毕。

4.2. 定理 4 (2)的证明

假设图 G 是列表单射边 13-临界图，其中 $\Delta(G)\le 4$，$mad(G)<\frac{17}{5}$。设 L 是图 G 的边列表分配，满足对每条边 $e\in E(G)$，$|L(e)|=13$，且图 G 不是 L-单射边可染的。如果 1 个顶点 u 仅与 1 个 4-点相邻，那么我们称 u 为坏点，否则称 u 为好点。因为图 G 是列表单射边 13-临界图，所以引理 10 至引理 16 的性质对图 G 仍然成立，且图 G 还具有以下性质：

引理 17 $\delta(G)\ge 3$。

证明 假设 G 中存在 2-点 u，设 v 和 w 是 u 的 2 个邻点。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f。则 $|L_f(uv)|\ge 1$，$|L_f(uw)|\ge 1$，且由引理 11，uv，uw 不在同一个 3-圈中，因此可以染相同颜色，于是依次染 uv，uw，可以得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 18 (1) G 中的 3-点最多在 1 个 3-圈中；(2) G 中每个 3-圈最多含有 1 个 3-点。

证明 (1) 假设 G 中存在 3-点 u 在两个 3-圈中，v,w,x 是 u 的 3 个邻点。不妨设 $vw\in E(G)$，$vx\in E(G)$。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f。则 $|L_f(uv)|\ge 4$，$|L_f(uw)|\ge 2$，$|L_f(ux)|\ge 2$。所以可以依次染边 uw，uv，ux 得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。

(2) 假设 G 中含有 3-圈 $uvwu$，且 $d(u)=d(v)=3$。设 u 在 3-圈外的邻点为 x。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f。首先，去掉边 vw 上的颜色，则 $|L_f(ux)|\ge 1$，$|L_f(uw)|\ge 3$，$|L_f(wv)|\ge 4$，$|L_f(uv)|\ge 5$。因此我们可以依次染边 ux，uw，wv，uv，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 19 G 中的 4-点最多与 3 个 3-点相邻。

证明 假设 G 中存在 4-点 u 与 4 个 3-点相邻，设 u 的邻点分别为 x，w，v，y。由 G 的极小性，$G'=G-u$ 有一个 L-单射边染色 f。则 $|L_f(ux)|\ge 1$，$|L_f(uw)|\ge 1$，$|L_f(uv)|\ge 1$，$|L_f(uy)|\ge 1$。根据引理 18，ux，uw，uv，uy 中任何 2 条边都不会在同一个 3-圈中，因此它们可以染相同颜色。所以可以依次染边 ux，uw，uv，uy，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 20 G 中任意 2 个坏的 3-点不相邻。

证明 假设 u，v 是 G 中的 2 个坏的 3-点，且 $uv\in E(G)$。设 u_1 和 v_1 分别是与 u 和 v 相邻的 3-点，u_2 和 v_2 分别是与 u 和 v 相邻的 4-点。由 G 的极小性，$G'=G-v$ 有一个 L-单射边染色 f。首先，去掉边 uu_1 的颜色，则 $|L_f(vv_2)|\ge 1$，$|L_f(uv)|\ge 3$，$|L_f(vv_1)|\ge 3$，$|L_f(uu_1)|\ge 4$。因此，我们可以依次染边 vv_2，uv，vv_1，uu_1，得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。□

引理 21 如果 G 中存在 1 个坏的 3-点 v，v_1，v_2 是 v 的 2 个 3-邻点，则在 $N(v_i)\backslash\{v\}(i=1,2)$ 中至少存在 1 个好点。

证明 假设 w 和 x 是 v_1 的除 v 外的 2 个邻点，且 w 和 x 都是坏点。根据引理 20，v_1 是好点，又由引理 16，v_1 的邻点不能都是 3-点，因此 w 和 x 都是 4-点。由 G 的极小性，$G'=G-v_1$ 有一个 L-单射边染色 f。若 v_1w，v_1x 不在同一个 3-圈中，则 $|L_f(vv_1)|\ge 2$，$|L_f(v_1w)|\ge 1$，$|L_f(v_1x)|\ge 1$，且 v_1w，v_1x 可以染相同颜色，因此可以依次染 v_1w，v_1x，vv_1 得到 G 的 L-单射边染色，与假设矛盾。若 v_1w，v_1x 在同一个

3-圈中，则$\left|L_f\left(vv_1\right)\right|\ge 3$，$\left|L_f\left(v_1w\right)\right|\ge 4$，$\left|L_f\left(v_1x\right)\right|\ge 4$，因此可以依次染边$vv_1$，$v_1w$，$v_1x$，得到$G$的$L$-单射边染色，与假设矛盾。所以$w$和$x$至少存在1个好点。同理，$N\left(v_2\right)\setminus\{v\}$中至少存在1个好点。□

引理22 如果G中存在1个好的4-点v，w是v的3-邻点，则w的邻点中至多有1个坏的3-点。

证明 由于w与1个4-点v相邻，因此w最多有2个3-邻点。若w有2个坏的3-邻点，则w也是坏点，因此存在2个坏的3-点相邻，与引理20矛盾。所以w的邻点中至多有1个坏的3-点。□

接下来对G中的每一个顶点v进行赋权，初始权重$w(v)=d(v)$。

定义权转移规则如下：

R_{51}：每个3-点从与它相邻的4-点获得$\frac{1}{5}$权重。

R_{52}：每个坏的3-点从与它3-弱相邻的好的4-点获得$\frac{1}{10}$权重。

接下来，我们检查对任意$v\in V(G)$，新的权重$w^*(v)\ge\frac{17}{5}$。

如果v是3-点，则由引理16，v至少与1个4-点相邻。若v与恰好1个4-点相邻，即v是坏点，根据引理21，v的每个3-邻点都至少与1个好的4-点相邻。由R_{52}，v从与它3-弱相邻的好的4-点获得$\frac{1}{10}$权重。又因为v有2个相邻的3-点，于是$w^*(v)\ge 3+\frac{1}{10}\times 2+\frac{1}{5}=\frac{17}{5}$。若$v$与至少2个4-点相邻，则由$R_{51}$有$w^*(v)\ge 3+\frac{1}{5}\times 2=\frac{17}{5}$。

如果v是4-点，则由引理19，v至少与1个4-点相邻。若v是坏点，则由R_{51}有$w^*(v)\ge 4-\frac{1}{5}\times 3=\frac{17}{5}$。若$v$是好点，则$v$最多与2个3-点相邻，由引理22，每个3-点最多与1个坏的3-点相邻，因此v最多与2个坏的3-点3-弱相邻。由R_{51}，R_{52}有$w^*(v)\ge 4-\frac{1}{5}\times 2-\frac{1}{10}\times 2=\frac{17}{5}$。

于是在(1)和(2)式中取$m=\frac{17}{5}$，得到矛盾。因此$ch'_{inj}(G)\le 13$，定理4 (2)证毕。

基金项目

福建省自然科学基金(2020J05058)，华侨大学中央高校基本科研业务费专项资金(ZQN-903)。

参考文献

[1] Cardoso, D.M., Cerdeira, J.O., Dominic, C. and Cruz, J.P. (2019) Injective Edge Coloring of Graphs. *Filomat*, **33**, 6411-6423. https://doi.org/10.2298/FIL1919411C

[2] Hahn, G., Kratochvil, J., Siran, J. and Sotteau, D. (2002) On the Injective Chromatic Number of Graphs. *Discrete Mathematics*, **256**, 179-192. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(01)00466-6

[3] Bertossi, A.A. and Bonuccelli, M.A. (1995) Code Assignment for Hidden Terminal Interference Avoidance in Multihop Packet Radio Networks. *IEEE*/*ACM Transactions on Networking*, **3**, 441-449. https://doi.org/10.1109/90.413218

[4] Jin, J., Xu, B.G. and Zhang, X.Y. (2013) On the Complexity of Injective Colorings and its Generalizations. *Theoretical Computer Science*, **491**, 119-126. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2013.04.026

[5] Foucaud, F., Hocquard, H. and Lajou, D. (2021) Complexity and Algorithms for Injective Edge-Coloring in Graphs. *Information Processing Letters*, **170**, Article No. 106121. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2021.106121

[6] 卜月华, 齐晨涛, 朱俊蕾. 平面图的单射边染色[J]. 数学进展, 2020, 49(6): 675-684.

[7] 卜月华, 陈雯雯. 围长至少是6的平面图的Injective-边染色[J]. 浙江师范大学学报, 2020, 43(1): 19-25.

[8] Li, Y.Y. and Chen, L. (2021) Injective Edge Coloring of Generalized Petersen Graphs. *AIMS Mathematics*, **6**, 7929-7943.

https://doi.org/10.3934/math.2021460

[9] Yue, J., Zhang, S. and Zhang, X. (2016) Note on the Perfect EIC-Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **289**, 481-485. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.05.031

[10] Kostochka, A., Raspaud, A. and Xu, J.W. (2021) Injective Edge-Coloring of Graphs with Given Maximum Degree. *European Journal of Combinatorics*, **96**, Article No. 103355. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103355

[11] Bu, Y.H. and Qi, C.T. (2018) Injective Coloring of Sparse Graphs. *Discrete Mathematics*, *Algorithms and Applications*, **10**, Article No. 1850022. https://doi.org/10.1142/S1793830918500222

[12] Miao, Z.K., Song, Y.M. and Yu, G.X. (2022) Note on Injective Edge-Coloring of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **310**, 65-74. https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.12.021